MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 9
17.06.2013

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“

33. Man zeige, daß die beiden Mengen

$$M_1 = \left\{ \frac{n!}{n^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{und} \quad M_2 = \left\{ 2 - \frac{(-1)^n}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind, und bestimme jeweils Infimum und Supremum. Handelt es sich hierbei sogar um ein Minimum bzw. ein Maximum?

34. Für nichtleere nach oben beschränkte Teilmengen M und N von $\mathbb{R}$ zeige man:

    a) Die Teilmenge $\lambda \cdot M = \{\lambda \cdot m \mid m \in M\}$ von $\mathbb{R}$ ist
        - für $\lambda \geq 0$ nach oben beschränkt mit $\sup(\lambda \cdot M) = \lambda \cdot \sup M$.
        - für $\lambda \leq 0$ nach unten beschränkt mit $\inf(\lambda \cdot M) = \lambda \cdot \sup M$.

    b) Die Teilmenge $M + N = \{m + n \mid m \in M \text{ und } n \in N\}$ von $\mathbb{R}$ ist nach oben beschränkt mit $\sup(M + N) = \sup M + \sup N$.

35. Man zeige, daß die beiden Mengen

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \\ M_2 &= \left\{ \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n+1}} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \end{aligned}$$

beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind, und bestimme jeweils Infimum und Supremum. Handelt es sich hierbei sogar um ein Minimum bzw. ein Maximum?

36. Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$.

    a) Für alle $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ zeige man $\sqrt[n]{a+b} \leq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ mit

$$\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \iff \big(a = 0 \text{ oder } b = 0\big).$$

    b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ mit $a \geq b$ zeige man $\sqrt[n]{a-b} \geq \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$ mit

$$\sqrt[n]{a-b} = \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} \iff \big(a = b \text{ oder } b = 0\big).$$

Abgabe bis Montag, den 24. Juni 2013, 14^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).