Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“

29. Man betrachte ein gleichschenkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit den Schenkeln $[AC]$ und $[BC]$ der Länge $s = \overline{AC} = \overline{BC}$ und der Basis $[AB]$ der Länge $b = \overline{AB}$ sowie dem Innenwinkel $\alpha = \sphericalangle BAC = 72^\circ$; die Winkelhalbierende w_α von α schneide die gegenüberliegende Seite $[BC]$ im Punkt D .

a) Man zeige, daß die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle BDA$ ähnlich sind, und folgere

$$s = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} b.$$

b) Man bestimme $\cos 36^\circ$ und $\cos 72^\circ$.

30. Im Dreieck $\triangle ABC$ seien die üblichen Bezeichnungen a , b und c für die Seitenlängen sowie α , β und γ für die Innenwinkel gewählt.

a) Es seien $a = 9$, $b = 24$ und $c = 21$ gegeben. Man bestimme γ , den Flächeninhalt und die Höhen sowie die Längen der Seitenhalbierenden von $\triangle ABC$.

b) Es seien $b = 21$ und $\beta = 60^\circ$ sowie der Flächeninhalt $F_{\triangle ABC} = 54\sqrt{3}$ gegeben. Man berechne die Seitenlängen a und c von $\triangle ABC$.

31. Es sei $\triangle ABC$ ein beliebiges Dreieck mit den Innenwinkeln α , β und γ sowie den Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$ und $c = \overline{AB}$.

a) Man zeige: mit dem Umkreisradius r gilt der *erweiterte Sinussatz*

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r.$$

b) Man beweise für den Fall $\alpha > 90^\circ$ den Cosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

32. Es sei $\triangle ABC$ ein beliebiges Dreieck mit den Innenwinkeln α , β und γ sowie den Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$ und $c = \overline{AB}$; ferner liege der Höhenfußpunkt H von C auf AB zwischen den Punkten A und B mit $h = \overline{HC}$ sowie $p = \overline{HB}$ und $q = \overline{AH}$. Man zeige:

a) Gilt $h^2 = p \cdot q$, so gilt $a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$.

b) Gilt $a^2 = c \cdot p$ oder $b^2 = c \cdot q$, so gilt auch $a^2 + b^2 = c^2$.

c) Aus $a^2 + b^2 = c^2$ folgt $\gamma = 90^\circ$.

Welche Konsequenzen ergeben sich daraus für die Satzgruppe des Pythagoras?

Abgabe bis Montag, den 17. Juni 2013, 14⁰⁰ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).