MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 5
20.05.2013

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“

17. Man betrachte den Ergebnisraum $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ sowie die drei Ereignisse $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,4,5,8\}$ und $C = \{1,2,7,8\}$.

    a) Es gelte zunächst $P(\{k\}) = \frac{1}{8}$ für alle $k = 1,2,\ldots,8$. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ und $A \cap B \cap C$, und zeige, daß die Ereignisse A, B und C unabhängig sind.

    b) Es gelte nunmehr $P(\{k\}) = \frac{1}{16}$ für $k = 1,3,5,7$ sowie $P(\{\ell\}) = \frac{3}{16}$ für $\ell = 2,4,6,8$. Man zeige, daß zwar die Ereignisse A und B bzw. A und C bzw. B und C unabhängig sind, nicht jedoch die Ereignisse A, B und C.

    c) Es gelte schließlich $P(\{k\}) = \frac{1}{12}$ für $k = 1,2,4,6,7,8$ sowie $P(\{\ell\}) = \frac{1}{4}$ für $\ell = 3,5$. Man zeige $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ und entscheide, ob die Ereignisse A, B und C unabhängig sind.

18. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum sowie A und $B \in \mathcal{A}$ zwei Ereignisse. Man zeige

$$A, B \text{ unabhängig} \iff P(A \cap B) \cdot P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A} \cap B) \cdot P(A \cap \overline{B})$$

sowie im Falle $0 < P(B) < 1$ auch

$$A, B \text{ unabhängig} \iff P_B(A) = P_{\overline{B}}(A).$$

19. a) Max schießt auf die Torwand, und zwar in jedem Durchgang zuerst auf das untere und anschließend auf das obere Loch; dabei hat er eine Trefferwahrscheinlichkeit von 40 % unten und unabhängig davon von 25 % oben.

    - Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft Max unten und oben?
    - Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft Max genau einmal?
    - Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft Max überhaupt nicht?

    b) Nun führt Max 20 Durchgänge unabhängig voneinander aus.

    - Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft Max in genau drei Durchgängen unten und oben?
    - Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft Max in höchstens fünf Durchgängen genau einmal?
    - Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft Max in mindestens 16 Durchgängen mindestens eines der beiden Ziele?

20. Durch einen absichtlichen Fehler wird bei der Übertragung einer Nachricht mit einer Wahrscheinlichkeit p das Gegenteil der Nachricht übermittelt.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt in den Fällen $p = 0{,}2$ und $p = 0{,}8$ die Nachricht bei einer Kette von $n = 6$ bzw. $n = 7$ unabhängigen Übertragungen korrekt an?

   b) Die Nachricht wird nun allgemein n–mal unabhängig übertragen mit $n \geq 2$; dabei bezeichne k die größte natürliche Zahl mit $2k \leq n$. Man zeige, daß die Nachricht mit einer Wahrscheinlichkeit von
   $$P = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{2i} p^{2i} \, q^{n-2i}$$
   korrekt ankommt.

   c) Man wende den binomischen Lehrsatz auf $(q+p)^n$ und $(q-p)^n$ an und zeige damit
   $$P = \frac{1 + (1 - 2\,p)^n}{2}.$$

   d) Man interpretiere den Zusammenhang von p und P in den Fällen, daß n gerade bzw. ungerade ist.

Abgabe bis Montag, den 27. Mai 2013, 12^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).