

# Klausurenkurs zum Staatsexamen (WS 2011/12):

## Lineare Algebra und analytische Geometrie 3

### — Lösungsvorschlag —

3.1 Mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen sowie der Tatsache, daß sich die Determinante einer Dreiecksmatrix als Produkt ihrer Hauptdiagonalelemente errechnet, ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{2 aus II, 3 aus III, 4 aus IV, 5 aus V} \\ \\ \\ \end{array} \\
 &= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{II-I, III-I, IV-I, V-I} \\ \\ \\ \end{array} \\
 &= 120 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(((I+II)+III)+IV)+V} \\ \\ \\ \end{array} \\
 &= 120 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Dreiecks-} \\ \text{matrix} \\ \\ \end{array} \\
 &= 120 \cdot 4 \cdot (-1)^4 = 480.
 \end{aligned}$$

3.2 a) Es ist

- $A_1 = (-1)$ , also  $\det(A_1) = -1$ ,
- $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ , also  $\det(A_2) = 1 - 1 = 0$ , sowie
- $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ , also  $\det(A_3) = -1 + 0 + 0 - (0 - 1 - 1) = 1$ .

b) Für  $n \geq 4$  erhalten wir mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes

$$\begin{aligned}
 \det(A_n) &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & A_{n-2} & \\ \vdots & \vdots & & & \end{vmatrix} \stackrel{\text{1. Zeile}}{=} \\
 &= (-1)^{1+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & & & \\ 0 & & A_{n-2} & \\ \vdots & & & \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & & & \\ 0 & & A_{n-2} & \\ \vdots & & & \end{vmatrix} = \\
 &= -\det(A_{n-1}) - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & & & \\ 0 & & A_{n-2} & \\ \vdots & & & \end{vmatrix} \stackrel{\text{1. Spalte}}{=} -\det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2}).
 \end{aligned}$$

c) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 4$  gilt

$$\det(A_n) = -\det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2})$$

und analog

$$\det(A_{n-1}) = -\det(A_{n-2}) - \det(A_{n-3}),$$

woraus  $\det(A_n) = \det(A_{n-3})$  folgt. Damit ergibt sich für alle  $k \in \mathbb{N}$

- $\det(A_{3k+1}) = \det(A_1) = -1$ ,
- $\det(A_{3k+2}) = \det(A_2) = 0$  sowie
- $\det(A_{3k+3}) = \det(A_3) = 1$ .

3.3 a) Für die gegebene Matrix

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

erhalten wir für  $n > 2$  mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes

$$\det(T_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & \vdots & \vdots \\ & & & \vdots & \vdots \\ & T_{n-2} & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{\substack{n\text{-te} \\ \text{Zeile}}}{=} & (-1)^{n+(n-1)} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} & & \vdots \\ & T_{n-2} & \vdots \\ & & 0 \\ \dots & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} + \\
& & + (-1)^{n+n} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} & & \vdots \\ & T_{n-2} & \vdots \\ & & 1 \\ \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
= & (-1)^{2n-1} \cdot \begin{vmatrix} & & \vdots \\ & T_{n-2} & \vdots \\ & & 0 \\ \dots & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2n} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} & & \vdots \\ & T_{n-2} & \vdots \\ & & 1 \\ \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
= & - \begin{vmatrix} & & \vdots \\ & T_{n-2} & \vdots \\ & & 0 \\ \dots & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \det(T_{n-1}) \\
& \stackrel{\substack{(n-1)\text{-te} \\ \text{Spalte}}}{=} & -(-1)^{(n-1)+(n-1)} \cdot 1 \cdot \det(T_{n-2}) + 2 \cdot \det(T_{n-1}) \\
= & -(-1)^{2n-2} \cdot \det(T_{n-2}) + 2 \cdot \det(T_{n-1}) \\
= & 2 \cdot \det(T_{n-1}) - \det(T_{n-2}).
\end{aligned}$$

b) Für den Induktionsanfang ergibt sich bei „ $n = 1$ “

$$T_1 = (1) \quad \text{und damit} \quad \det(T_1) = 1,$$

und für „ $n = 2$ “

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und damit} \quad \det(T_2) = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1;$$

für den Induktionsschritt „ $n - 1 \rightarrow n$ “ erhält man unter Verwendung von a)

$$\det(T_n) = 2 \cdot \det(T_{n-1}) - \det(T_{n-2}) = 2 \cdot 1 - 1 = 1.$$

3.4 Für die in Abhängigkeit vom Parameter  $\alpha \in \mathbb{R}$  gegebene Matrix

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \alpha \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
(M_\alpha \mid E_3) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
&\stackrel{\sim}{\underset{\text{I} \leftrightarrow \text{II}}{=}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
&\stackrel{\sim}{\underset{\text{III} - 2\text{I}}{=}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \\
&\stackrel{\sim}{\underset{\text{II} - \alpha \text{III}}{=}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \\
&\stackrel{\sim}{\underset{\text{I} + 2\text{II}}{=}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 2 & 1 + 4\alpha & -2\alpha \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \\
&\stackrel{\sim}{\underset{\substack{(-1) \cdot \text{I} \\ (-1) \cdot \text{II}}}{=}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 - 4\alpha & 2\alpha \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) = (E_3 \mid M'_\alpha);
\end{aligned}$$

damit ist  $M_\alpha$  invertierbar, und für ihre Inverse gilt

$$M_\alpha^{-1} = M'_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & -1 - 4\alpha & 2\alpha \\ -1 & -2\alpha & \alpha \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Alternativ läßt sich die Invertierbarkeit der Matrix  $M_\alpha$  mit Hilfe ihrer Determinante nachweisen und ihre Inverse  $M_\alpha^{-1}$  über die zu  $M_\alpha$  komplementäre Matrix  $\widetilde{M}_\alpha$  berechnen: wegen

$$\det(M_\alpha) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & \alpha \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Sarrus}}{=} (0 + 0 - 4\alpha) - (-4\alpha + 0 + 1) = -1 \neq 0$$

ist die Matrix  $M_\alpha$  für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  invertierbar, und es gilt

$$\begin{aligned}
M_\alpha^{-1} &= \frac{1}{\det(M_\alpha)} \cdot \widetilde{M}_\alpha = \\
&= \frac{1}{\det(M_\alpha)} \cdot \begin{pmatrix} +\det(M'_{11}) & -\det(M'_{21}) & +\det(M'_{31}) \\ -\det(M'_{12}) & +\det(M'_{22}) & -\det(M'_{32}) \\ +\det(M'_{13}) & -\det(M'_{23}) & +\det(M'_{33}) \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 + 4\alpha & -2\alpha \\ 1 & 2\alpha & -\alpha \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 - 4\alpha & 2\alpha \\ -1 & -2\alpha & \alpha \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3.5 Für die in Abhängigkeit vom Parameter  $\alpha \in \mathbb{R}$  gegebene Matrix

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
 (M_\alpha \mid E_3) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 &\stackrel{\text{II-I}}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 &\stackrel{\text{III-II}}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Damit enthält die zur gegebenen Matrix  $M_\alpha$  zeilenäquivalente Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

für  $\alpha = 0$  in der ersten Zeile eine Nullzeile sowie für  $\alpha = 1$  in der zweiten und dritten Zeile jeweils eine Nullzeile und ist damit in diesen Fällen insbesondere nicht invertierbar; folglich ist aber auch  $M_\alpha$  für  $\alpha \in \{0, 1\}$  nicht invertierbar.

Für  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  ergibt sich ferner

$$\begin{aligned}
 (M_\alpha \mid E_3) &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \\
 &\stackrel{\frac{1}{\alpha} \cdot \text{I}, \frac{1}{1-\alpha} \cdot \text{II}}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{\alpha-1} & -\frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{array} \right) \\
 &\stackrel{\frac{1}{\alpha-1} \cdot \text{III}}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{\alpha-1} & -\frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{array} \right) \\
 &\stackrel{\text{I-II}}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\alpha-1} & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{array} \right) \\
 &\stackrel{\text{II-III}}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\alpha-1} & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{array} \right) = (E_3 \mid M'_\alpha);
 \end{aligned}$$

damit ist  $M_\alpha$  invertierbar, und für ihre Inverse gilt

$$M_\alpha^{-1} = M'_\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ \frac{1}{\alpha-1} & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Alternativ läßt sich die Invertierbarkeit der Matrix  $M_\alpha$  mit Hilfe ihrer Determinante überprüfen und gegebenenfalls ihre Inverse  $M_\alpha^{-1}$  über die zu  $M_\alpha$  komplementäre Matrix  $\widetilde{M}_\alpha$  berechnen: wegen

$$\begin{aligned}
 \det(M_\alpha) &= \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \end{vmatrix} \stackrel{\text{Sarrus}}{=} (\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2) - (\alpha^2 + \alpha + \alpha^3) = \\
 &= 2\alpha^2 - \alpha - \alpha^3 = -\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1) = -\alpha(\alpha - 1)^2
 \end{aligned}$$

ist die Matrix  $M_\alpha$  genau dann invertierbar, wenn

$$\det(M_\alpha) = -\alpha(\alpha-1)^2 \neq 0, \quad \text{also} \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\},$$

gilt, und in diesem Fall ergibt sich

$$\begin{aligned} M_\alpha^{-1} &= \frac{1}{\det(M_\alpha)} \cdot \widetilde{M}_\alpha \\ &= \frac{1}{\det(M_\alpha)} \cdot \begin{pmatrix} +\det(M'_{11}) & -\det(M'_{21}) & +\det(M'_{31}) \\ -\det(M'_{12}) & +\det(M'_{22}) & -\det(M'_{32}) \\ +\det(M'_{13}) & -\det(M'_{23}) & +\det(M'_{33}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-\alpha(\alpha-1)^2} \cdot \begin{pmatrix} \alpha-1 & -\alpha(\alpha-1) & 0 \\ -\alpha(\alpha-1) & 0 & \alpha(\alpha-1) \\ 0 & \alpha(\alpha-1) & -\alpha(\alpha-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ \frac{1}{\alpha-1} & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- 3.6 a) Eine Matrix  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (hier für  $n = 3$ ) ist genau dann invertierbar, wenn für ihre Determinante  $\det(M) \neq 0$  gilt. Wegen

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & s \\ 0 & 1-s & 0 \\ s & s & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{2. Zeile}}{=} (1-s) \cdot \begin{vmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (1-s) \cdot (1-s^2) = (1-s)^2 \cdot (1+s) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \det(B) &= \begin{vmatrix} -s & s & -1 \\ 0 & -1 & s \\ s^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\text{3. Zeile}}{=} s^2 \cdot \begin{vmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{vmatrix} = \\ &= s^2 \cdot (s^2 - 1) = s^2 \cdot (s-1) \cdot (s+1) \end{aligned}$$

für alle  $s \in \mathbb{R}$  ist

- die Matrix  $A$  genau dann invertierbar, wenn  $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  gilt, sowie
  - die Matrix  $B$  genau dann invertierbar, wenn  $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$  gilt.
- b) Für  $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$  sind gemäß a) die beiden Matrizen  $A$  und  $B$  invertierbar; folglich ist auch ihr Matrixprodukt  $A \cdot B$  invertierbar und besitzt damit vollen Rang. In diesem Fall ist also  $\text{Rang}(A \cdot B) = 3$ , und für die verbleibenden Fälle ergibt sich:

- Für  $s = -1$  ist

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2} \cdot \text{I}]{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} - 2\text{I}]{\text{II} + 2\text{I}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit  $\text{Rang}(A \cdot B) = 1$ .

- Für  $s = 0$  ist

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II} \rightarrow \text{I}]{} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-1) \cdot \text{I}]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit  $\text{Rang}(A \cdot B) = 2$ .

- Für  $s = 1$  ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit  $\text{Rang}(A \cdot B) = 0$ .

3.7 Es ist

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & -a \\ a+b & a+b & 2a \end{vmatrix} \stackrel{\text{III} \rightarrow \text{I}}{=} \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & -a \\ b & a & 2a-b \end{vmatrix} \stackrel{\text{III} \rightarrow \text{II}}{=} \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & -a \\ 0 & 0 & 3a-b \end{vmatrix} \stackrel{\text{3. Zeile}}{=} \\ &= (-1)^{3+3} \cdot (3a-b) \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = (3a-b) \cdot (a \cdot a - b \cdot b) = (a^2 - b^2)(3a-b); \end{aligned}$$

die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  besitzt nun genau dann den vollen Rang 3, wenn sie invertierbar ist, also genau im Falle  $\det(A) \neq 0$ , und es gilt

$$\begin{aligned} \det(A) \neq 0 &\iff (a^2 - b^2)(3a-b) \neq 0 \iff \\ &\iff a^2 - b^2 \neq 0 \quad \text{und} \quad 3a-b \neq 0 \iff a^2 \neq b^2 \quad \text{und} \quad b \neq 3a. \end{aligned}$$

3.8 a) Die in Abhängigkeit von  $a, b, c \in \mathbb{R}$  mit  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  gegebene Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

besitzt unter der Voraussetzung  $a + b + c = 0$  die Determinante

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} \stackrel{(\text{III}+\text{I})+\text{II}}{=} \begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} = \\ &\stackrel{a+b+c \text{ aus III}}{=} \underbrace{(a+b+c)}_{=0} \cdot \begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

und ist folglich nicht invertierbar.

b) Für  $a = 0$  ergibt sich mit Hilfe der Regel von Sarrus

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ b & 0 & c \\ c & b & 0 \end{vmatrix} = (0 + c^3 + b^3) - (0 + 0 + 0) = b^3 + c^3;$$

da  $A$  als nicht invertierbar vorausgesetzt ist, gilt  $\det(A) = 0$ , also  $b^3 + c^3 = 0$ , woraus sich  $b^3 = -c^3 = (-c)^3$  und damit  $b = -c$ , also  $b + c = 0$  ergibt. Mit  $a = 0$  ist demnach  $a + b + c = 0$ .

c) Für  $a = b = c = 1$  ergibt sich die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

die wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (1 + 1 + 1) - (1 + 1 + 1) = 0$$

nicht invertierbar ist; es ist aber  $a + b + c = 3 \neq 0$ . Damit kann in b) auf die Voraussetzung  $a = 0$  nicht verzichtet werden.

3.9 Wir bearbeiten zunächst die beiden Teilaufgaben a) und b) unter Verwendung der Determinante  $\det(M)$  von  $M$  und der zu  $M$  komplementären Matrix  $\widetilde{M}$ :

a) Für alle  $s \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} \det(M) &= \begin{vmatrix} 1 & s & s^2 \\ s^2 & 1 & s \\ s & s^2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} \\ &= ((1^3 + s^3 + (s^2)^3) - (s^2 \cdot 1 \cdot s + 1 \cdot s \cdot s^2 + s \cdot s^2 \cdot 1)) = \\ &= 1 + s^3 + s^6 - 3s^3 = 1 - 2s^3 + (s^3)^2 = (1 - s^3)^2. \end{aligned}$$

Die Matrix  $M$  ist genau dann invertierbar, wenn  $\det(M) \neq 0$  ist; dies ist wegen

$$\det(M) = 0 \iff (1 - s^3)^2 = 0 \iff s^3 = 1 \iff s = 1$$

genau für  $s \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  der Fall.

b) Für alle  $s \in \mathbb{R}$  ergibt sich für die zu  $M$  komplementäre Matrix

$$\begin{aligned} \widetilde{M} &= \begin{pmatrix} +\det(M'_{11}) & -\det(M'_{21}) & +\det(M'_{31}) \\ -\det(M'_{12}) & +\det(M'_{22}) & -\det(M'_{32}) \\ +\det(M'_{13}) & -\det(M'_{23}) & +\det(M'_{33}) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 - s^3 & -s(1 - s^3) & 0 \\ 0 & 1 - s^3 & -s(1 - s^3) \\ -s(1 - s^3) & 0 & 1 - s^3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

so daß wir für alle  $s \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  die zu  $M$  inverse Matrix

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \frac{1}{\det(M)} \cdot \widetilde{M} = \\ &= \frac{1}{(1-s^3)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1-s^3 & -s(1-s^3) & 0 \\ 0 & 1-s^3 & -s(1-s^3) \\ -s(1-s^3) & 0 & 1-s^3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{1-s^3} \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ 0 & 1 & -s \\ -s & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

erhalten.

Alternativ lassen sich die Teilaufgaben a) und b) auch mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen lösen: Es ist

$$(M|E_3) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & s & s^2 & 1 & 0 & 0 \\ s^2 & 1 & s & 0 & 1 & 0 \\ s & s^2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{II} - s^2 \cdot \text{I} \\ \text{III} - s \cdot \text{I} \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & s & s^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-s^3 & s-s^4 & -s^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-s^3 & -s & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Damit ist für  $s = 1$  die Matrix  $M$  zur Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  zeilenäquivalent und folglich nicht invertierbar. Für  $s \neq 1$  ist  $1-s^3 \neq 0$ , und man erhält

$$\begin{aligned} (M|E_3) &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & s & s^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-s^3 & s(1-s^3) & -s^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-s^3 & -s & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{II} \cdot \frac{1}{1-s^3} \\ \text{IV} \cdot \frac{1}{1-s^3} \end{array} \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & s & s^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s & -\frac{s^2}{1-s^3} & \frac{1}{1-s^3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{s}{1-s^3} & 0 & \frac{1}{1-s^3} \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \text{I} - s \cdot \text{II} \end{array} \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-s^3} & -\frac{s}{1-s^3} & 0 \\ 0 & 1 & s & -\frac{s^2}{1-s^3} & \frac{1}{1-s^3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{s}{1-s^3} & 0 & \frac{1}{1-s^3} \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \text{II} - s \cdot \text{III} \end{array} \\ &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-s^3} & -\frac{s}{1-s^3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-s^3} & -\frac{s}{1-s^3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{s}{1-s^3} & 0 & \frac{1}{1-s^3} \end{array} \right) = (E_3|M') \end{aligned}$$

Damit ist  $M$  invertierbar mit

$$M^{-1} = M' = \frac{1}{1-s^3} \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ 0 & 1 & -s \\ -s & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Bearbeitung für die Teilaufgabe c) ist unabhängig von dem für die beiden Teilaufgaben a) und b) gewählten Lösungsweg.

- c) Für  $s \neq 1$  ist  $M$  nach a) invertierbar; damit besitzt das lineare Gleichungssystem  $M \cdot x = b$  mit  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  genau eine Lösung, nämlich

$$\begin{aligned} x = M^{-1} \cdot b &= \frac{1}{1-s^3} \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ 0 & 1 & -s \\ -s & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{1-s^3} \begin{pmatrix} 1-s \\ 1-s \\ 1-s \end{pmatrix} = \frac{1-s}{1-s^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+s+s^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für  $s = 1$  gilt

$$(M|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Damit ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1-\lambda-\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge des durch  $(M|b)$  gegebenen linearen Gleichungssystems.

- 3.10 a) Für alle  $s \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} \det(M) &= \begin{vmatrix} 1 & s & s^2 \\ s & 1 & s \\ s^2 & s & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} \\ &= ((1^3 + s \cdot s \cdot s^2 + s^2 \cdot s \cdot s) - (s^2 \cdot 1 \cdot s^2 + 1 \cdot s \cdot s + s \cdot s \cdot 1)) = \\ &= (1 + s^4 + s^4) - (s^4 + s^2 + s^2) = 1 - 2s^2 + s^4 = (1 - s^2)^2. \end{aligned}$$

- b) Die Matrix  $M_s$  ist genau dann invertierbar, wenn  $\det(M) \neq 0$  ist; dies ist wegen

$$\det(M) = 0 \iff (1 - s^2)^2 = 0 \iff s^2 = 1 \iff s = \pm 1$$

genau für  $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  der Fall. Für alle  $s \in \mathbb{R}$  ergibt sich für die zu  $M_s$  komplementäre Matrix

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_s &= \begin{pmatrix} +\det(M'_{11}) & -\det(M'_{21}) & +\det(M'_{31}) \\ -\det(M'_{12}) & +\det(M'_{22}) & -\det(M'_{32}) \\ +\det(M'_{13}) & -\det(M'_{23}) & +\det(M'_{33}) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1-s^2 & -s(1-s^2) & 0 \\ -s(1-s^2) & 1-s^4 & -s(1-s^2) \\ 0 & -s(1-s^2) & 1-s^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

so daß wir für alle  $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  die zu  $M_s$  inverse Matrix

$$\begin{aligned} M_s^{-1} &= \frac{1}{\det(M_s)} \cdot \widetilde{M}_s = \\ &= \frac{1}{(1-s^2)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1-s^2 & -s(1-s^2) & 0 \\ -s(1-s^2) & 1-s^4 & -s(1-s^2) \\ 0 & -s(1-s^2) & 1-s^2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{1-s^2} \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ -s & 1+s^2 & -s \\ 0 & -s & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

erhalten.

- c) Nach dem Kriterium von Hurwitz ist die symmetrische Matrix  $M_s$  genau dann positiv definit, wenn ihre drei Hauptminoren

$$\det(1) = 1, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{pmatrix} = 1-s^2 \quad \text{und} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 \\ s & 1 & s \\ s^2 & s & 1 \end{pmatrix} = (1-s^2)^2$$

positiv sind; dies ist aber genau im Falle  $1-s^2 > 0$ , also für  $s \in ]-1; 1[$ .

- 3.11 a) Es ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} D \cdot E_2 - S \cdot A + A^2 &= \\ &= (ad-bc) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - (a+d) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} ad-bc-a^2-ad+a^2+bc & -ab-bd+ab+bd \\ -ac-cd+ac+cd & ad-bc-ad-d^2+bc+d^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

- b) Für „ $\Leftarrow$ “ gilt im Falle  $S = 0$  und  $D = -1$  mit Hilfe von a)

$$0 = D \cdot E_2 - S \cdot A + A^2 = -E_2 + A^2, \quad \text{also} \quad A^2 = E_2,$$

und im Falle  $b = c = 0$  und  $a^2 = d^2 = 1$  gemäß der Rechnung von a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2.$$

Für „ $\Rightarrow$ “ wird  $A^2 = E_2$  vorausgesetzt; im Falle  $S = 0$  ergibt sich mit Hilfe von a)

$$0 = D \cdot E_2 - S \cdot A + A^2 = D \cdot E_2 + E_2 = (D+1) \cdot E_2, \quad \text{also} \quad D = -1,$$

und im Falle  $S = a + d \neq 0$  erhält man gemäß der Rechnung von a)

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also zunächst  $b = c = 0$  in der Nebendiagonale und danach  $a^2 = d^2 = 1$  in der Hauptdiagonale.

- 3.12 a) Aufgrund ihrer Symmetrie ist die Matrix  $B \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  orthogonal diagonalisierbar. Wegen

$$B - (-1)E_4 = B + E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist  $\text{Rang}(B + E_4) = 1$ ; damit ist  $\lambda_1 = -1$  ein Eigenwert von  $B$  der Vielfachheit 3, und die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis von  $E = \text{Eig}(B; \lambda_1)$ .

- b) Wegen  $E = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$  ist  $E^\perp = \mathbb{R} \cdot n$  mit  $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Wegen

$$B \cdot n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot n$$

ist  $n$  ein Eigenvektor von  $B$  zum Eigenwert  $\lambda_2 = 3$ . Insgesamt besitzt also  $B$  den dreifachen Eigenwert  $\lambda_1 = -1$  sowie den einfachen Eigenwert  $\lambda_2 = 3$ , so daß sich für das charakteristische Polynom

$$\chi_B(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^3 (\lambda - \lambda_2) = (\lambda + 1)^3 (\lambda - 3)$$

ergibt.

- c) Für  $b = 0$  gilt

$$\det \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a^4;$$

und für  $b \neq 0$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} &= b^4 \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{a}{b} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{a}{b} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{a}{b} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \frac{a}{b} \end{pmatrix} = b^4 \cdot \chi_B \left( -\frac{a}{b} \right) = \\ &= b^4 \left( -\frac{a}{b} + 1 \right)^3 \left( -\frac{a}{b} - 3 \right) = (-a + b)^3 (-a - 3b) = (a - b)^3 (a + 3b). \end{aligned}$$

Damit gilt für alle  $a, b \in \mathbb{R}$

$$\det \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} = (a - b)^3 (a + 3b).$$

3.13 Eine Matrix  $A = (s_1, s_2, s_3, s_4) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  ist genau dann orthogonal, wenn ihre Spalten  $s_1, s_2, s_3, s_4$  eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^4$  bezüglich des Standardskalarprodukts  $\circ$  bilden; folglich sind die Matrizen  $A_1$  und  $A_2$  orthogonal, die Matrizen  $A_3$  und  $A_4$  wegen  $s_1 \circ s_2 = 1 \neq 0$  aber nicht.

Für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} \chi_{A_1}(\lambda) = \det(A_1 - \lambda E_4) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{1. Zeile}}{=} \\ &= (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\text{3. Zeile}}{=} \\ &= (-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (\lambda^2 + 1) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 + 1) \cdot ((-\lambda)^2 - (-1)) = (\lambda^2 + 1)^2 > 0; \end{aligned}$$

damit besitzt  $A_1$  keinen reellen Eigenwert und ist damit insbesondere nicht reell diagonalisierbar; dagegen ist  $A_2$  als symmetrische Matrix (orthogonal) diagonalisierbar. Für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} \chi_{A_3}(\lambda) = \det(A_3 - \lambda E_4) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{Dreiecksmatrix}}{=} \\ &= (1 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) \cdot (3 - \lambda) \cdot (4 - \lambda); \end{aligned}$$

damit besitzt  $A_3$  die vier verschiedenen reellen Eigenwerte  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$  und  $\lambda_4 = 4$  und ist daher als  $4 \times 4$ -Matrix reell diagonalisierbar. Schließlich gilt für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\chi_{A_4}(\lambda) = \det(A_4 - \lambda E_4) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{Dreiecksmatrix}}{=} (1 - \lambda)^4;$$

damit ist  $\lambda_0 = 1$  der einzige Eigenwert der Matrix  $A_4$ ; er besitzt die algebraische Vielfachheit  $\alpha_0 = 4$ , wegen

$$A_4 - \lambda_0 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aber nur die geometrische Vielfachheit

$$\gamma = 4 - \text{Rang}(A_4 - \lambda_0 \cdot E_4) = 4 - 3 = 1,$$

weswegen  $A_4$  nicht reell diagonalisierbar ist.

3.14 Wir nehmen zum Widerspruch an, es gebe zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

eine invertierbare Matrix  $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , so daß

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

eine obere Dreiecksmatrix ist. Damit sind aber die Matrizen  $A$  und  $B$  zueinander ähnlich und besitzen gemäß

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) &= \det(B - \lambda E_3) = \det(C^{-1}AC - \lambda E_3) = \\ &= \det(C^{-1}AC - C^{-1}(\lambda E_3)C) = \det(C^{-1}(A - \lambda E_3)C) = \\ &= \det(C)^{-1} \cdot \det(A - \lambda E_3) \cdot \det(C) = \det(A - \lambda E_3) = \chi_A(\lambda) \end{aligned}$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  dasselbe charakteristische Polynom; dies steht allerdings im Widerspruch dazu, daß

$$\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} - \lambda & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{Dreiecks-}}{\underset{\text{matrix}}{=}} (b_{11} - \lambda) \cdot (b_{22} - \lambda) \cdot (b_{33} - \lambda)$$

in die drei reellen Linearfaktoren  $b_{11} - \lambda$ ,  $b_{22} - \lambda$  und  $b_{33} - \lambda$  zerfällt, während

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{3. \text{ Zeile}}{=} (3 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (3 - \lambda) \cdot ((-\lambda)^2 - (-1)) = (3 - \lambda) \cdot (\lambda^2 + 1) \end{aligned}$$

neben dem reellen Linearfaktor  $3 - \lambda$  auch den quadratischen Faktor  $\lambda^2 + 1$  ohne reelle Nullstelle beinhaltet. Folglich kann es keine invertierbare Matrix  $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  geben, so daß  $B = C^{-1}AC$  eine obere Dreiecksgestalt besitzt.

3.15 Nach Voraussetzung gibt es für die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Orthonormalbasis  $b_1, \dots, b_n$  des euklidischen  $\mathbb{R}^n$  aus Eigenvektoren von  $A$ ; seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die zugehörigen Eigenwerte. Damit ist  $P = (b_1, \dots, b_n) \in O_n(\mathbb{R})$  eine orthogonale Matrix, und mit der Diagonalmatrix  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt

$$P^\top \cdot A \cdot P = D \quad \text{bzw.} \quad A = P \cdot D \cdot P^\top,$$

wobei  $P^{-1} = P^\top$  verwendet wird. Damit ergibt sich wegen  $D^\top = D$  dann

$$A^\top = (P \cdot D \cdot P^\top)^\top = (P^\top)^\top \cdot D^\top \cdot P^\top = P \cdot D \cdot P^\top = A;$$

folglich ist die Matrix  $A$  symmetrisch.

3.16 Eine Matrix  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist genau dann symmetrisch, wenn  $M^\top = M$  gilt, und genau dann orthogonal, wenn  $M^\top \cdot M = E_n$  (oder gleichwertig  $M \cdot M^\top = E_n$ ) ist.

a) Die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

sind (wegen  $\det(A) = -1$  und  $\det(B) = -1$ ) invertierbar und symmetrisch, ihr Produkt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist allerdings nicht symmetrisch.

b) Eine symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  besitzt die Gestalt  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  mit Koeffizienten  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , und für die zu  $A$  inverse Matrix gilt dann

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix};$$

folglich ist auch  $A^{-1}$  symmetrisch.

c) Es ist

$$(C^\top A C)^\top = C^\top A^\top (C^\top)^\top \underset{A^\top = A}{=} C^\top A C;$$

folglich ist  $C^\top A C$  eine symmetrische Matrix.

d) Es ist

$$\begin{aligned} (A \cdot B)^\top \cdot (A \cdot B) &= (B^\top \cdot A^\top) \cdot (A \cdot B) = B^\top \cdot (A^\top \cdot A) \cdot B \underset{A^\top \cdot A = E_2}{=} \\ &= B^\top \cdot E_2 \cdot B = B^\top \cdot B = E_2; \end{aligned}$$

damit ist auch  $A \cdot B$  eine orthogonale Matrix.

e) Es ist

$$(A^{-1})^\top \cdot A^{-1} \underset{A^{-1} = A^\top}{=} (A^{-1})^\top \cdot A^\top = (A \cdot A^{-1})^\top = E_2^\top = E_2;$$

damit ist auch  $A^{-1}$  eine orthogonale Matrix.

f) Die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

sind (wegen  $\det(A) = 1$  und  $\det(C) = 2$ ) invertierbar; darüber hinaus ist  $A$  (als Einheitsmatrix) sogar orthogonal, aber die Matrix

$$C^T A C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ist etwa wegen  $\det(C^T A C) = 4$ , also  $\det(C^T A C) \neq \pm 1$ , nicht orthogonal.

Damit sind die Aussagen a) und f) falsch, die Aussagen b) bis e) dagegen richtig.

3.17 Sind die beiden Matrizen  $A$  und  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ähnlich, gibt es also eine invertierbare Matrix  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $B = T^{-1} A T$ , so besitzen sie gemäß

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) &= \det(B - \lambda E_n) = \det(T^{-1} A T - \lambda E_n) = \\ &= \det(T^{-1} A T - T^{-1}(\lambda E_n) T) = \det(T^{-1} (A - \lambda E_n) T) = \\ &= \det(T)^{-1} \cdot \det(A - \lambda E_n) \cdot \det(T) = \det(A - \lambda E_n) = \chi_A(\lambda) \end{aligned}$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  insbesondere dasselbe charakteristische Polynom.

Zur Widerlegung der falschen Aussagen wählen wir für  $n = 2$  speziell

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

sowie

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad T_0^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$B_0 = T_0^{-1} A_0 T_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

insbesondere sind also die Matrizen  $A_0$  und  $B_0$  zueinander ähnlich.

a) Ist  $\lambda \in \mathbb{R}$  ein Eigenwert von  $A$ , so ist  $\chi_A(\lambda) = 0$ ; folglich ist auch  $\chi_B(\lambda) = 0$ , so daß  $\lambda$  auch ein Eigenwert  $B$  ist.

b) Für den Vektor  $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  gilt  $v \neq 0$  mit

$$A_0 \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$B_0 \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

damit ist  $v$  zwar ein Eigenvektor von  $A_0$ , aber nicht von  $B_0$ .

- c) Ist  $A$  invertierbar, so ist  $\lambda = 0$  kein Eigenwert von  $A$ ; gemäß a) ist dann  $\lambda = 0$  auch kein Eigenwert von  $B$ , weswegen  $B$  invertierbar ist.
- d) Die Matrix  $A_0$  ist eine Diagonalmatrix, die Matrix  $B_0$  nicht.
- e) Ist  $A = E_n$  die Einheitsmatrix, so gilt

$$B = T^{-1}E_nT = T^{-1}T = E_n.$$

- f) Es ist

$$\det(A) = \chi_A(0) = \chi_B(0) = \det(B).$$

Damit sind die Aussagen a), c), e) und f) richtig, die Aussagen b) und d) dagegen falsch.

- 3.18 a) Nach dem Determinantenmultiplikationssatz gilt  $\det(A B) = \det(A) \cdot \det(B)$ ; da nun ein Produkt zweier reeller Zahlen genau dann 0 ist, wenn mindestens einer der beiden Faktoren selbst 0 ist, erhält man damit in

$$\det(AB) = 0 \iff \det(A) \cdot \det(B) = 0 \iff \det(A) = 0 \text{ oder } \det(B) = 0$$

die Behauptung.

- b) Die Aussage ist falsch, denn für  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  gilt zwar  $A \neq 0$  und  $B \neq 0$ , aber dennoch  $AB = 0$ .
- c) Zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$  der Matrix  $A$  gibt es einen Eigenvektor  $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$  mit  $Ax = \lambda x$ . Damit gilt

$$A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda(\lambda x) = \lambda^2x;$$

damit ist  $x \neq 0$  Eigenvektor von  $A^2$  zum Eigenwert  $\lambda^2$ . Weiter gilt

$$A^3x = (AA^2)x = A(A^2x) = A(\lambda^2x) = \lambda^2(Ax) = \lambda^2(\lambda x) = \lambda^3x;$$

damit ist  $x \neq 0$  Eigenvektor von  $A^3$  zum Eigenwert  $\lambda^3$ . Führt man diese Überlegungen induktiv fort, so erhält man, daß  $x \neq 0$  Eigenvektor von  $A^k$  zum Eigenwert  $\lambda^k$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ist.

- d) Die Aussage ist falsch, denn für  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  gilt zwar  $A \neq E$  und  $A \neq -E$ , aber dennoch  $A^2 = E$ .

Damit sind die Aussagen a) und c) richtig, die Aussagen b) und d) dagegen falsch.