



Prof. Dr. Daniel Rost

Klausurenkurs zum Staatsexamen (WS 2011/12): Differential- und Integralrechnung 1 — Lösungsvorschlag —

1.1 Das Prinzip der vollständigen Induktion lautet:

„Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage. Dabei gelte:

- $A(1)$ ist richtig.
- Für jedes beliebige $n \in \mathbb{N}$ gilt: ist $A(n)$ richtig, so ist auch $A(n+1)$ richtig.

Damit ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig.“

Wir beweisen damit $A(n)$: $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

„ $n = 1$ “:

$$\sum_{k=1}^1 (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{1+1} 1^2 = 1 = (-1)^{1+1} \cdot \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

„ $n \rightarrow n+1$ “:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} k^2 &= \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2 \right) + (-1)^{n+2} (n+1)^2 = \\ &= (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+2} (n+1)^2 = (-1)^{n+1} \frac{n+1}{2} \cdot (n - 2(n+1)) = \\ &= (-1)^{n+1} \frac{n+1}{2} \cdot (-n-2) = (-1)^{n+2} \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

1.2 Wir beweisen die Gleichheit

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{2}{k(k+1)} \right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{n} \right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ mit Hilfe vollständiger Induktion:

„ $n = 2$ “:

$$\prod_{k=2}^2 \left(1 - \frac{2}{k(k+1)} \right) = 1 - \frac{2}{2(2+1)} = \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{2} \right)$$

„ $n \rightarrow n+1$ “:

$$\begin{aligned}
 \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)} \right) &= \left(\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{2}{k(k+1)} \right) \right) \cdot \left(1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{n} \right) \cdot \left(1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{(n+1)(n+2)} - \frac{4}{n(n+1)(n+2)} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2(n+1)(n+2) - 2n - 4}{n(n+1)(n+2)} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2n^2 + 6n + 4 - 2n - 4}{n(n+1)(n+2)} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2n^2 + 4n}{n(n+1)(n+2)} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2n(n+2)}{n(n+1)(n+2)} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{n+1} \right)
 \end{aligned}$$

1.3 Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_k = \frac{\sqrt{k} - 3}{\sqrt{k} + 1} = \frac{1 - \frac{3}{\sqrt{k}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{k}}};$$

wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{\sqrt{k}} \right) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}} \right) = 1$$

und damit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{\sqrt{k}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{k}}} = 1.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt damit

$$\begin{aligned}
 \left| a_n - \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \right| &= \left| \frac{\sqrt{n} - 3}{\sqrt{n} + 1} - 1 \right| = \left| \frac{(\sqrt{n} - 3) - (\sqrt{n} + 1)}{\sqrt{n} + 1} \right| = \\
 &= \left| \frac{-4}{\sqrt{n} + 1} \right| = \frac{4}{\sqrt{n} + 1} \leq \frac{4}{\sqrt{n}}
 \end{aligned}$$

mit

$$\frac{4}{\sqrt{n}} \leq 0,01 \iff \sqrt{n} \geq 400 \iff n \geq 400^2 = 160.000;$$

damit kann etwa $n_* = 160.000 \in \mathbb{N}$ gewählt werden.

1.4 Wir weisen anhand der Definition nach, daß die gegebene Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{(\sin n)^3 - 3 \cos n}{\sqrt{n}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

den Grenzwert $a = 0$ besitzt; sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= \left| \frac{(\sin n)^3 - 3 \cos n}{\sqrt{n}} - 0 \right| = \frac{|(\sin n)^3 - 3 \cos n|}{\sqrt{n}} \leq \\ &\leq \frac{|(\sin n)^3| + |3 \cos n|}{\sqrt{n}} = \frac{|\sin n|^3 + 3 \cdot |\cos n|}{\sqrt{n}} \leq \frac{1^3 + 3 \cdot 1}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

mit

$$\frac{4}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \frac{4}{\varepsilon} < \sqrt{n} \iff \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^2 < n.$$

Wir wählen eine natürliche Zahl $N = N(\varepsilon)$ mit $N > \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^2$, so daß wir für alle $n \geq N$ wegen $n > \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^2$ damit

$$|a_n - a| \leq \frac{4}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

erhalten.

1.5 Wir halten zunächst $k \in \mathbb{N}$ fest und betrachten die Folge $(c_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$. Wegen

$$0 < \frac{1}{k} \leq 1 \quad \text{ist} \quad 0 \leq 1 - \frac{1}{k} < 1,$$

und damit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n = 0, \quad \text{also} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n\right) = 1,$$

und schließlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{n,k} = \lim_{n \rightarrow \infty} k \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n\right) = k.$$

Wir halten nun $n \in \mathbb{N}$ fest und betrachten die Folge $(c_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt nach dem Binomischen Lehrsatz

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n &= \sum_{j=0}^n \left[\binom{n}{j} \cdot 1^{n-j} \cdot \left(-\frac{1}{k}\right)^j \right] = \sum_{j=0}^n \left[\binom{n}{j} \cdot \left(-\frac{1}{k}\right)^j \right] = \\ &= 1 + n \cdot \left(-\frac{1}{k}\right) + \sum_{j=2}^n \left[\binom{n}{j} \cdot \left(-\frac{1}{k}\right)^j \right] = 1 - \frac{n}{k} + \sum_{j=2}^n \left[\binom{n}{j} \cdot \left(-\frac{1}{k}\right)^j \right], \end{aligned}$$

also

$$1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n = \frac{n}{k} - \sum_{j=2}^n \left[\binom{n}{j} \cdot \left(-\frac{1}{k}\right)^j \right]$$

und damit

$$\begin{aligned} c_{n,k} &= k \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k} \right)^n \right) = \\ &= n - k \cdot \sum_{j=2}^n \left[\binom{n}{j} \cdot \left(-\frac{1}{k} \right)^j \right] = n + \sum_{j=2}^n \left[\binom{n}{j} \cdot \left(-\frac{1}{k} \right)^{j-1} \right]. \end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{k} \right)^{j-1} = 0$$

für alle $2 \leq j \leq n$ ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=2}^n \left[\binom{n}{j} \cdot \left(-\frac{1}{k} \right)^{j-1} \right] = 0,$$

insgesamt also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_{n,k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(n + \sum_{j=2}^n \left[\binom{n}{j} \cdot \left(-\frac{1}{k} \right)^{j-1} \right] \right) = n.$$

Alternativ läßt sich der letzte Grenzwert

$$c_{n,k} = k \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k} \right)^n \right) = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{k} \right)^n}{\frac{1}{k}} \quad \text{für } k \rightarrow \infty$$

vom Typ „ $\frac{0}{0}$ “ auch mit Hilfe der Regel von de l'Hospital behandeln. Dazu betrachten wir die beiden differenzierbaren Funktionen

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 - (1 - x)^n, \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x,$$

mit

$$f'(x) = -n(1 - x)^{n-1}(-1) = n(1 - x)^{n-1} \quad \text{und} \quad g'(x) = 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$; dabei ist $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ sowie

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (1 - (1 - x)^n) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} x = 0.$$

Wegen

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{n(1 - x)^{n-1}}{1} = n(1 - x)^{n-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0+} n \cdot 1 = n$$

existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, und nach der Regel von de l'Hospital existiert

damit auch der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{g(x)}$ mit

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - (1 - x)^n}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = n.$$

Schließlich erhalten wir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_{n,k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{k} \right)^n}{\frac{1}{k}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - (1 - x)^n}{x} = n.$$

1.6 a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^2\right) &= n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{2a}{n} + \frac{a^2}{n^2}\right)\right) = \\ &= n \cdot \left(-\frac{2a}{n} - \frac{a^2}{n^2}\right) = -2a - \frac{a^2}{n}; \end{aligned}$$

damit ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-2a - \frac{a^2}{n}\right) = -2a.$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{2n+2} = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{2n} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 = \left[\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n\right]^2 \left(1 + \frac{a}{n}\right)^2;$$

mit Hilfe des Grenzwertes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{2n+2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n\right]^2 \left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 = \\ &= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n\right]^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 = e^{2a} \cdot 1^2 = e^{2a}. \end{aligned}$$

c) Für $a = 0$ ergibt sich zunächst

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{2i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1^{2i} = \frac{1}{n} \cdot n = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit insbesondere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{2i} = 1.$$

Sei nun $a \neq 0$ sowie $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq |a|$; damit ist $q = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 \neq 1$, und mit der geometrischen Summenformel ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{2i} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n q^i = \frac{1}{n} \cdot q \cdot \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{1}{n} \cdot q \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \\ &= \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{2n}}{1 - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^2} = \frac{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{2n+2}}{n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^2\right)}. \end{aligned}$$

Nach a) gilt für den Nenner

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^2\right) = -2a,$$

und nach b) ist im Zähler

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{2n+2} = e^{2a};$$

damit erhält man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{2i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{2n+2}}{n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^2\right)} = \frac{1 - e^{2a}}{-2a} = \frac{e^{2a} - 1}{2a}.$$

1.7 Mit der Gaußformel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ergibt sich

$$a_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2};$$

damit konvergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $a = \frac{1}{2}$.

Mit der Summenformel für eine geometrische Summe ergibt sich ferner

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{7^k} = \sum_{k=0}^n \left(-\frac{2}{7}\right)^k = \frac{1 - \overbrace{\left(-\frac{2}{7}\right)^{n+1}}^{\rightarrow 0, \text{ da } \left|-\frac{2}{7}\right| < 1}}{1 - \left(-\frac{2}{7}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \left(-\frac{2}{7}\right)} = \frac{1}{\frac{9}{7}} = \frac{7}{9};$$

damit konvergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $a = \frac{7}{9}$.

Mit der Regel von de l'Hospital erhält man schließlich den Funktionengrenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos x}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ "0/0"}} \frac{\sin x}{1} = \sin 0 = 0,$$

wobei über

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \cos x = \cos 0 = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \sin x = \sin 0 = 0$$

die Stetigkeit von Cosinus und Sinus an der Stelle 0 eingeht; wegen $\frac{1}{n} \rightarrow 0+$ für $n \rightarrow \infty$ ergibt sich damit der Folgengrenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

1.8 Wir untersuchen das Konvergenzverhalten der gegebenen Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \frac{1 - x^n}{1 + x^n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

mit der folgenden Fallunterscheidung hinsichtlich des Parameters $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

- Für $|x| < 1$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \quad \text{und damit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^n}{1 + x^n} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$$

- Für $|x| > 1$ können wir

$$a_n = \frac{1 - x^n}{1 + x^n} = \frac{\frac{1}{x^n} - 1}{\frac{1}{x^n} + 1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ schreiben; wegen

$$\left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|} < 1 \quad \text{ist} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right)^n = 0$$

und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^n} - 1}{\frac{1}{x^n} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1.$$

- Für $|x| = 1$ ist wegen $x \neq -1$ nur $x = 1$ zu betrachten; wegen

$$a_n = \frac{1 - 1^n}{1 + 1^n} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dann eine Nullfolge.

1.9 Wir weisen die Konvergenz der durch

$$x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^3 + 1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierten Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dadurch nach, indem wir jeweils mit vollständiger Induktion zeigen, daß $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und (etwa durch 0) nach unten beschränkt ist:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \geq x_{n+1}$:
 „ $n = 1$ “: Es ist $x_1 = 1$ und $x_2 = \frac{1}{3}(x_1^3 + 1) = \frac{2}{3}$, also $x_1 \geq x_2$.
 „ $n \rightarrow n + 1$ “: Aus der Induktionsvoraussetzung $x_n \geq x_{n+1}$ folgt wegen der Monotonie der dritten Potenz $x_n^3 \geq x_{n+1}^3$, woraus sich mit dem Monotoniegesetz der Addition

$$x_n^3 + 1 \geq x_{n+1}^3 + 1$$

sowie mit dem Monotoniegesetz der Multiplikation

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^3 + 1) \geq \frac{1}{3}(x_{n+1}^3 + 1) = x_{n+2},$$

also die Induktionsbehauptung, ergibt.

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \geq 0$:
 „ $n = 1$ “: Es ist $x_1 = 1$, also $x_1 \geq 0$.
 „ $n \rightarrow n + 1$ “: Aus der Induktionsvoraussetzung $x_n \geq 0$ folgt $x_n^3 \geq 0$ und damit in

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^3 + 1) \geq \frac{1}{3}(0^3 + 1) = \frac{1}{3} \geq 0$$

die Induktionsbehauptung.

Die Bestimmung des in seiner Existenz nachgewiesenen Grenzwertes $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ist nicht verlangt.

- 1.10 a) Wir zeigen $a_n \leq a_{n+1} \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit vollständiger Induktion:
 „ $n = 0$ “: Es ist $a_0 = 1$ und $a_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ und damit $a_0 \leq a_1 \leq 2$.
 „ $n \rightarrow n+1$ “: Aus der Induktionsvoraussetzung

$$a_n \leq a_{n+1} \leq 2$$

folgt zunächst

$$1 + a_n \leq 1 + a_{n+1} \leq 3,$$

woraus sich wegen der Monotonie der Quadratwurzel

$$\sqrt{1 + a_n} \leq \sqrt{1 + a_{n+1}} \leq \sqrt{3} \leq 2,$$

also die Induktionsbehauptung

$$a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq 2$$

ergibt.

- b) Gemäß a) ist die gegebene Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- wegen $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ monoton wachsend und
 - wegen $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach oben beschränkt,
- insgesamt also konvergent.
- c) Für den gemäß b) existierenden Grenzwert $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ gilt

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + a_n} = \sqrt{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt{1 + a}$$

und damit $a^2 = 1 + a$ bzw. $a^2 - a - 1 = 0$, also

$$a = \frac{1}{2} \left(-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1)} \right) = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2};$$

da die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, ergibt sich daraus $a \geq a_0 = 1$ und damit $a = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5})$.

- 1.11 a) Wir zeigen zunächst $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:
 „ $n = 1$ “:

$$a_1 = 1 \leq \sqrt{13} = a_2.$$

„ $n \rightarrow n+1$ “:

$$\begin{aligned} a_n \leq a_{n+1} &\implies 12 + a_n \leq 12 + a_{n+1} \implies \\ &\implies a_{n+1} = \sqrt{12 + a_n} \leq \sqrt{12 + a_{n+1}} = a_{n+2}. \end{aligned}$$

Damit ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend, insbesondere also durch $a_1 = 1$ nach unten beschränkt.

Wir zeigen nun noch $a_n \leq 13$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

„ $n = 1$ “:

$$a_1 = 1 \leq 13.$$

„ $n \rightarrow n + 1$ “:

$$a_n \leq 13 \implies 12 + a_n \leq 25 \implies a_{n+1} = \sqrt{12 + a_n} \leq \sqrt{25} = 5 \leq 13.$$

Zum Nachweis, daß die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist, ist ja lediglich *irgendeine* obere Schranke b , hier $b = 13$ zu finden; es muß sich dabei in keinsten Weise um das Supremum der Folgenglieder handeln.

- b) Nach a) ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt; damit ist die Folge auch konvergent. Für den Grenzwert $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ gilt

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{12 + a_n} = \sqrt{12 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt{12 + a}$$

und damit $a^2 = 12 + a$ bzw. $a^2 - a - 12 = 0$, also

$$a = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + 48} \right) = \frac{1 \pm 7}{2}$$

und folglich $a = -3$ oder $a = 4$; da die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, ergibt sich daraus $a \geq a_1 = 1$ und damit $a = 4$.

- 1.12 a) Wir zeigen die Behauptung mit vollständiger Induktion:

„ $n = 1$ “:

Es ist $a_1 = 5$ und damit $3 \leq a_1 \leq 5$.

„ $n \rightarrow n + 1$ “:

$$\begin{aligned} 3 \leq a_n \leq 5 \implies 4 \geq 7 - a_n \geq 2 \implies \frac{1}{2} \leq \frac{2}{7 - a_n} \leq 1 \implies \\ \frac{7}{2} \leq 3 + \frac{2}{7 - a_n} \leq 4 \implies 3 \leq a_{n+1} \leq 5 \end{aligned}$$

- b) Wir zeigen $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

„ $n = 1$ “:

$$a_1 = 5 \geq 4 = 3 + \frac{2}{7 - 5} = a_2.$$

„ $n \rightarrow n + 1$ “:

$$\begin{aligned} a_n \geq a_{n+1} \implies 7 - a_n \leq 7 - a_{n+1} \implies \frac{2}{7 - a_n} \geq \frac{2}{7 - a_{n+1}} \implies \\ a_{n+1} = 3 + \frac{2}{7 - a_n} \geq 3 + \frac{2}{7 - a_{n+1}} = a_{n+2} \end{aligned}$$

Damit ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und gemäß a) beschränkt, folglich ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent.

- c) Für den Grenzwert $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ gilt $3 \leq a \leq 5$ gemäß a), und damit erhält man

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{7 - a_n} \right) = 3 + \frac{2}{7 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = 3 + \frac{2}{7 - a}.$$

Damit folgt

$$(a-3)(7-a) = 2 \implies -a^2 + 10a - 21 = 2 \implies$$

$$a^2 - 10a + 23 = 0 \implies a = \frac{10 \pm \sqrt{8}}{2} = 5 \pm \sqrt{2};$$

wegen $3 \leq a \leq 5$ folgt hieraus schon $a = 5 - \sqrt{2}$.

1.13 a) Wir zeigen $1 \leq a_n \leq 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

„ $n = 1$ “:

$$\text{Es ist } a_1 = \frac{7}{2} \quad \text{und damit} \quad 1 \leq a_1 \leq 5.$$

„ $n \rightarrow n+1$ “:

$$1 \leq a_n \leq 5 \implies 9 \geq 11 - 2a_n \geq 1 \implies 3 \geq \sqrt{11 - 2a_n} \geq 1 \implies$$

$$2 \leq 5 - \sqrt{11 - 2a_n} \leq 4 \implies 1 \leq a_{n+1} \leq 5$$

b) Wir zeigen $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

„ $n = 1$ “:

$$a_1 = \frac{7}{2} \geq 3 = 5 - \sqrt{11 - 2 \cdot \frac{7}{2}} = a_2.$$

„ $n \rightarrow n+1$ “:

$$\begin{aligned} a_n \geq a_{n+1} &\implies 11 - 2a_n \leq 11 - 2a_{n+1} \implies \sqrt{11 - 2a_n} \leq \sqrt{11 - 2a_{n+1}} \implies \\ a_{n+1} &= 5 - \sqrt{11 - 2a_n} \geq 5 - \sqrt{11 - 2a_{n+1}} = a_{n+2} \end{aligned}$$

Damit ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und gemäß a) beschränkt, folglich ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent.

c) Für den Grenzwert $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ gilt $1 \leq a \leq 5$ gemäß a), und wegen der Stetigkeit der Quadratwurzel erhält man

$$\begin{aligned} a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (5 - \sqrt{11 - 2a_n}) = \\ &= 5 - \sqrt{11 - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = 5 - \sqrt{11 - 2a}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$a - 5 = -\sqrt{11 - 2a} \implies (a - 5)^2 = (-\sqrt{11 - 2a})^2 \implies$$

$$a^2 - 10a + 25 = 11 - 2a \implies a^2 - 8a + 14 = 0 \implies$$

$$a = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 14}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{8}}{2} = 4 \pm \sqrt{2};$$

wegen $1 \leq a \leq 5$ folgt hieraus schon

$$a = 4 - \sqrt{2}.$$

1.14 Wir zeigen zunächst $0 \leq x_{n+1} \leq x_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

„ $n = 1$ “: Es ist

$$x_1 = 1 \quad \text{und damit} \quad x_2 = 1 - \frac{1^3}{10} + \frac{1^5}{100} = \frac{91}{100},$$

insgesamt also $0 \leq x_2 \leq x_1 \leq 1$.

„ $n \rightarrow n + 1$ “: Es ist $0 \leq x_{n+1} \leq x_n \leq 1$, insbesondere $x_{n+1} \leq 1$, und damit

$$1 - \frac{x_{n+1}^2}{10} = 1 - \underbrace{\frac{1}{10} \cdot \underbrace{x_{n+1}^2}_{\leq 1}}_{\leq \frac{1}{10}} \geq 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \geq 0,$$

woraus sich zum einen

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{x_{n+1}^3}{10} + \frac{x_{n+1}^5}{100} = \underbrace{x_{n+1}}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{x_{n+1}^2}{10}\right)}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{x_{n+1}^5}{100}}_{\geq 0} \geq 0$$

und zum anderen

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{x_{n+1}^3}{10} + \frac{x_{n+1}^5}{100} = \underbrace{x_{n+1}}_{\leq 1} - \underbrace{\frac{x_{n+1}^3}{10}}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{x_{n+1}^2}{10}\right)}_{\geq 0} \leq x_{n+1} \leq 1,$$

insgesamt also $0 \leq x_{n+2} \leq x_{n+1} \leq 1$ ergibt.

Damit ist die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wegen $x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ monoton fallend und wegen $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach unten beschränkt, insgesamt also konvergent. Für ihren Grenzwert $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ergibt sich

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n - \frac{x_n^3}{10} + \frac{x_n^5}{100} \right) = a - \frac{a^3}{10} + \frac{a^5}{100}$$

und damit

$$0 = -\frac{a^3}{10} + \frac{a^5}{100} = -\frac{a^3}{100} (10 - a^2), \quad \text{also} \quad a \in \left\{ -\sqrt{10}, 0, \sqrt{10} \right\},$$

woraus man wegen $0 \leq a \leq 1$ schon $a = 0$ erhält.

1.15 a) Wir zeigen zunächst $1 \leq x_n \leq e^2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe vollständiger Induktion:

„ $n = 0$ “:

Es ist $x_0 = 1$ und damit $1 \leq x_0 \leq e^2$.

„ $n \rightarrow n + 1$ “:

$$1 \leq x_n \leq e^2 \implies 1 \geq \frac{1}{x_n} \geq \frac{1}{e^2} \implies 1 \leq 2 - \frac{1}{x_n} \leq 2 - \frac{1}{e^2} \implies \\ e \leq e^{2 - \frac{1}{x_n}} \leq e^{2 - \frac{1}{e^2}} \implies 1 \leq x_{n+1} \leq e^2$$

Wir zeigen nun $x_n \leq x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

„ $n = 0$ “:

$$x_0 = 1 \leq e = e^{2-\frac{1}{1}} = x_1.$$

„ $n \rightarrow n + 1$ “:

$$\begin{aligned} x_n \leq x_{n+1} &\stackrel{x_n > 0}{\implies} \frac{1}{x_n} \geq \frac{1}{x_{n+1}} \implies 2 - \frac{1}{x_n} \leq 2 - \frac{1}{x_{n+1}} \implies \\ &\stackrel{\text{exp. monoton steigend}}{\implies} x_{n+1} = e^{2-\frac{1}{x_n}} \leq e^{2-\frac{1}{x_{n+1}}} = x_{n+2} \end{aligned}$$

Damit ist die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton wachsend und beschränkt, insbesondere konvergiert also die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) Für den Grenzwert $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ gilt $1 \leq a \leq e^2$ gemäß a), und man erhält

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x_n} \right) = 2 - \frac{1}{a}$$

und aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{2-\frac{1}{x_n}} = e^{2-\frac{1}{a}};$$

folglich ergibt sich mit Hilfe der Rekursionsvorschrift

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{2-\frac{1}{x_n}} = e^{2-\frac{1}{a}},$$

weswegen der Grenzwert a eine Lösung der Gleichung

$$x = e^{2-\frac{1}{x}}$$

ist.

1.16 a) Wir zeigen $x_n \leq x_{n+1} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe vollständiger Induktion:
„ $n = 0$ “:

$$\text{Es ist } x_1 = 0, \text{ also } x_2 = e^{0-1} = \frac{1}{e} \text{ und damit } x_1 \leq x_2 \leq 1.$$

„ $n \rightarrow n + 1$ “:

$$\begin{aligned} x_n \leq x_{n+1} \leq 1 &\implies x_n - 1 \leq x_{n+1} - 1 \leq 0 \implies \\ &\stackrel{\text{exp. monoton steigend}}{\implies} e^{x_n-1} \leq e^{x_{n+1}-1} \leq e^0 \implies x_{n+1} \leq x_{n+2} \leq 1 \end{aligned}$$

Damit ist die gegebene Folge monoton wachsend und durch 1 nach oben beschränkt.

b) Die gegebene Folge ist gemäß a) monoton wachsend und nach oben beschränkt, mithin konvergent. Für den Grenzwert

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

ergibt sich aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{x_n - 1} = e^{a-1}$$

und folglich mit Hilfe der Rekursionsvorschrift

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{x_n - 1} = e^{a-1},$$

weswegen der Grenzwert a eine Nullstelle der Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{x-1} - x,$$

ist. Wegen

$$f(1) = e^{1-1} - 1 = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

ist 1 eine Nullstelle von f ; wir weisen im folgenden nach, daß f keine weiteren Nullstellen besitzt, weswegen für den Grenzwert $a = 1$ gelten muß.

Die Funktion f ist (als Summe der Exponentialfunktion und einer linearen Funktion) stetig und differenzierbar mit

$$f'(x) = e^{x-1} - 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} :$$

- für alle $x < 1$ ist $x - 1 < 0$ und damit

$$f'(x) = \underbrace{e^{x-1}}_{<1} - 1 < 0;$$

folglich ist f auf $]-\infty; 1]$ streng monoton fallend; insbesondere gilt $f(x) > f(1) = 0$ für alle $x < 1$.

- für alle $x > 1$ ist $x - 1 > 0$ und damit

$$f'(x) = \underbrace{e^{x-1}}_{>1} - 1 > 0;$$

folglich ist f auf $[1; +\infty[$ streng monoton steigend; insbesondere gilt $f(x) > f(1) = 0$ für alle $x > 1$.

1.17 a) Wir zeigen Sie $a_n \geq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe vollständiger Induktion:

„ $n = 0$ “: Es ist $a_0 = 3$ und damit $a_0 \geq 2$.

„ $n \rightarrow n + 1$ “: Es ist $a_n \geq 2$, insbesondere also $a_n > 0$, und es folgt

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 2 &= \frac{a_n^2 + 4}{2 a_n} - 2 = \frac{(a_n^2 + 4) - 2 \cdot (2 a_n)}{2 a_n} = \\ &= \frac{a_n^2 - 4 a_n + 4}{2 a_n} = \frac{(a_n - 2)^2}{2 a_n} \geq 0, \quad \text{also } a_{n+1} \geq 2. \end{aligned}$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt wegen $a_n \geq 2$ zum einen $a_n^2 \geq 4$, also $a_n^2 - 4 \geq 0$, und zum anderen $2 a_n \geq 4 > 0$, woraus sich

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2 + 4}{2 a_n} = \frac{a_n \cdot (2 a_n) - (a_n^2 + 4)}{2 a_n} = \frac{a_n^2 - 4}{2 a_n} \geq 0$$

und damit $a_n \geq a_{n+1}$ ergibt; folglich ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton fallend.

- c) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist gemäß a) etwa durch 2 nach unten beschränkt und gemäß b) monoton fallend, insgesamt also konvergent. Für ihren Grenzwert $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ gilt damit $a \geq 2$, und wir erhalten mit der Rekursionsvorschrift

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 + 4}{2 a_n} = \frac{a^2 + 4}{2 a},$$

woraus sich

$$2 a^2 = a^2 + 4, \quad \text{also} \quad a^2 = 4,$$

und damit wegen $a \geq 2$ schon $a = 2$ ergibt.

- 1.18 a) Wir zeigen $a_n > \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe vollständiger Induktion:
„ $n = 1$ “:

$$a_1 = 1 > \frac{1}{2}.$$

„ $n \rightarrow n + 1$ “: Wegen $a_n > \frac{1}{2}$ ist $a_n - \frac{1}{2} > 0$ sowie $a_n > 0$ und $2 + a_n > 0$,
woraus sich

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \frac{1}{2} &= \frac{1 + a_n^2}{2 + a_n} - \frac{1}{2} = \frac{2(1 + a_n^2) - (2 + a_n)}{2(2 + a_n)} = \frac{2 + 2a_n^2 - 2 - a_n}{2(2 + a_n)} = \\ &= \frac{2a_n^2 - a_n}{2(2 + a_n)} = \frac{2a_n(a_n - \frac{1}{2})}{2(2 + a_n)} = \frac{a_n(a_n - \frac{1}{2})}{2 + a_n} > 0 \end{aligned}$$

und damit $a_{n+1} > \frac{1}{2}$ ergibt.

- b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n > \frac{1}{2}$ gemäß a) und damit $2a_n > 1$, also $1 - 2a_n < 0$,
sowie $2 + a_n > 0$, woraus sich

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1 + a_n^2}{2 + a_n} - a_n = \frac{(1 + a_n^2) - a_n(2 + a_n)}{2 + a_n} = \\ &= \frac{1 + a_n^2 - 2a_n - a_n^2}{2 + a_n} = \frac{1 - 2a_n}{2 + a_n} < 0 \end{aligned}$$

und damit $a_{n+1} < a_n$ ergibt; damit ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton fallend. Da sie zudem gemäß a) nach unten (durch $\frac{1}{2}$) beschränkt ist, ergibt sich daraus schon ihre Konvergenz. Für ihren Grenzwert

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

gilt dann unter Verwendung der Rekursionsvorschrift

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a_n^2}{2 + a_n} = \frac{1 + a^2}{2 + a},$$

woraus sich

$$a(2 + a) = 1 + a^2, \quad \text{also} \quad 2a + a^2 = 1 + a^2,$$

und damit

$$2a = 1, \quad \text{also} \quad a = \frac{1}{2}$$

ergibt.

1.19 a) Wir zeigen zunächst $1 \leq a_n \leq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe vollständiger Induktion:

„ $n = 0$ “:

Es ist $a_0 \in [1, 3]$ und damit $1 \leq a_0 \leq 3$.

„ $n \rightarrow n + 1$ “:

$$\begin{aligned} 1 \leq a_n \leq 3 &\implies 1^2 \leq a_n^2 \leq 3^2 \implies \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} a_n^2 \leq \frac{9}{4} \implies \\ &\implies \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \leq \frac{1}{4} a_n^2 + \frac{3}{4} \leq \frac{9}{4} + \frac{3}{4} \implies 1 \leq a_{n+1} \leq 3 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(\frac{1}{4} a_n^2 + \frac{3}{4} \right) - a_n = \frac{1}{4} \cdot (a_n^2 + 3 - 4a_n) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot (a_n^2 - 4a_n + 3) \underset{\text{Vieta}}{=} \frac{1}{4} \cdot \underbrace{(a_n - 1)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(a_n - 3)}_{\leq 0} \leq 0, \end{aligned}$$

also $a_{n+1} \leq a_n$; damit ist die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ monoton fallend.

b) Gemäß a) ist die gegebene Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ für jeden Startwert $a_0 \in [1, 3]$ monoton fallend und (durch 1) nach unten beschränkt, mithin konvergent. Für ihren Grenzwert

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

gilt dann unter Verwendung der Rekursionsvorschrift

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} a_n^2 + \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{4} a^2 + \frac{3}{4},$$

woraus sich

$$0 = a^2 - 4a + 3 \underset{\text{Vieta}}{=} (a - 1)(a - 3)$$

und damit $a = 1$ oder $a = 3$ ergibt; dies motiviert die folgende Fallunterscheidung hinsichtlich des Startwertes $a_0 \in [1, 3]$:

- Für $a_0 \in [1, 3[$ gilt im Hinblick auf das in a) ermittelte Monotonieverhalten der Folge $a \leq a_0 < 3$ und damit $a = 1$.
- Für $a_0 = 3$ ist $a_1 = \frac{1}{4} \cdot 3^2 + \frac{3}{4} = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3$ und analog $a_n = 3$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; damit ist $(a_n)_{n \geq 0}$ eine konstante Folge mit $a = 3$.

1.20 Im Falle der Konvergenz der durch die Rekursionsvorschrift

$$x_{n+1} = \frac{1}{5} (x_n^2 + 6) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

definierten Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ kommen für den Grenzwert $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ wegen

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} (x_n^2 + 6) = \frac{1}{5} (a^2 + 6)$$

und damit

$$0 = a^2 - 5a + 6 \underset{\text{Vieta}}{=} (a - 2)(a - 3)$$

nur die beiden Werte $a = 2$ und $a = 3$ in Frage. Dies motiviert die folgende Fallunterscheidung hinsichtlich des Startwertes $x_0 \in [0, 3]$:

- Für $x_0 = 2$ ist $x_1 = \frac{1}{5}(2^2 + 6) = \frac{1}{5} \cdot 10 = 2$ und analog $x_n = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; damit ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine konstante Folge mit Grenzwert $a = 2$.
- Für $x_0 = 3$ ist $x_1 = \frac{1}{5}(3^2 + 6) = \frac{1}{5} \cdot 15 = 3$ und analog $x_n = 3$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; damit ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine konstante Folge mit Grenzwert $a = 3$.
- Für $x_0 \in]2; 3[$ zeigen wir zunächst $x_n \in]2; 3[$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe vollständiger Induktion: für „ $n = 0$ “ ist dies klar, und für „ $n \rightarrow n + 1$ “ gilt

$$\begin{aligned} x_n \in]2; 3[&\implies 2 < x_n < 3 \implies 4 < x_n^2 < 9 \implies 10 < x_n^2 + 6 < 15 \implies \\ &\implies 2 < \frac{1}{5}(x_n^2 + 6) < 3 \implies 2 < x_{n+1} < 3 \implies x_{n+1} \in]2; 3[. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich aber

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{5}(x_n^2 + 6) - x_n = \frac{1}{5}(x_n^2 - 5x_n + 6) = \frac{1}{5} \underbrace{(x_n - 3)}_{<0} \underbrace{(x_n - 2)}_{>0} < 0$$

und somit $x_{n+1} < x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; folglich ist die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ streng monoton fallend und (etwa durch 2) nach unten beschränkt, also konvergent; als Grenzwert kommt nur $a = 2$ in Frage.

- Für $x_0 \in [0; 2[$ zeigen wir zunächst $x_n \in [0; 2[$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe vollständiger Induktion: für „ $n = 0$ “ ist dies klar, und für „ $n \rightarrow n + 1$ “ gilt

$$\begin{aligned} x_n \in [0; 2[&\implies 0 \leq x_n < 2 \implies 0 \leq x_n^2 < 4 \implies 6 \leq x_n^2 + 6 < 10 \implies \\ &\implies \frac{6}{5} \leq \frac{1}{5}(x_n^2 + 6) < 2 \implies 0 \leq x_{n+1} < 2 \implies x_{n+1} \in [0; 2[. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich aber

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{5}(x_n^2 + 6) - x_n = \frac{1}{5}(x_n^2 - 5x_n + 6) = \frac{1}{5} \underbrace{(x_n - 3)}_{<0} \underbrace{(x_n - 2)}_{<0} > 0$$

und somit $x_{n+1} > x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; folglich ist die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ streng monoton wachsend und (etwa durch 2) nach oben beschränkt, also konvergent; als Grenzwert kommt nur $a = 2$ in Frage.

1.21 a) Die Funktion

$$f :]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{5} \left(4x + \frac{1}{x^4} \right),$$

ist (als gebrochen-rationale Funktion) differenzierbar, und für alle $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{5} \left(4 - \frac{4}{x^5} \right) = \frac{4}{5x^5} (x^5 - 1).$$

Für alle $0 < x \leq 1$ ist $x^5 \leq 1$ und damit

$$f'(x) = \underbrace{\frac{4}{5x^5}}_{>0} \cdot \underbrace{(x^5 - 1)}_{\leq 0} \leq 0,$$

so daß f auf $]0; 1]$ monoton fällt, und für alle $x \geq 1$ ist $x^5 \geq 1$ und damit

$$f'(x) = \underbrace{\frac{4}{5x^5}}_{>0} \cdot \underbrace{(x^5 - 1)}_{\geq 0} \geq 0,$$

so daß f auf $[1; \infty[$ monoton steigt; insbesondere besitzt f in $x = 1$ ein globales Minimum, und für alle $x > 0$ gilt

$$f(x) \geq f(1) = \frac{1}{5} \left(4 \cdot 1 + \frac{1}{1^4} \right) = 1.$$

b) Für die durch einen Startwert $x_1 \geq 1$ und die Rekursionsvorschrift

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

definierte Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gilt gemäß a)

$$x_{k+1} = f(x_k) \geq 1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N};$$

damit ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ durch 1 nach unten beschränkt, und für alle $k \in \mathbb{N}$ erhält man infolgedessen

$$x_{k+1} - x_k = f(x_k) - x_k = \frac{1}{5} \left(4x_k + \frac{1}{x_k^4} \right) - x_k = \frac{1}{5} \left(\underbrace{\frac{1}{x_k^4}}_{\leq 1} - \underbrace{x_k}_{\geq 1} \right) \leq 0.$$

c) Gemäß b) ist die gegebene Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wegen

$$x_{k+1} - x_k \leq 0, \quad \text{also} \quad x_{k+1} \leq x_k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ monoton fallend und zudem durch 1 nach unten beschränkt, mithin konvergent. Für den Grenzwert

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$$

gilt dann wegen $x \geq 1$ unter Verwendung der Rekursionsvorschrift

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \left(4x_k + \frac{1}{x_k^4} \right) = \frac{1}{5} \left(4x + \frac{1}{x^4} \right),$$

woraus sich

$$5x = 4x + \frac{1}{x^4}, \quad \text{also} \quad x = \frac{1}{x^4},$$

und damit

$$x^5 = 1, \quad \text{also} \quad x = 1,$$

ergibt.

1.22 a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist das Folgenglied

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$$

die Summe der $n + 1$ aufeinanderfolgenden Stammbrüche $\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{2n}$; damit ergibt sich zum einen

$$a_n = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\leq \frac{1}{n}} + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\leq \frac{1}{n}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\leq \frac{1}{n}} \leq (n+1) \cdot \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leq 2$$

und zum anderen

$$a_n = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\geq \frac{1}{2n}} \geq (n+1) \cdot \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}.$$

Damit ist die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ beschränkt.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{\leq \frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{\leq \frac{1}{2n}} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0; \end{aligned}$$

damit ist die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton fallend. Zusammen mit der in a) gezeigten Beschränktheit ist die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ insbesondere also konvergent.

1.23 Für die gegebene durch

$$x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = \frac{3}{2}, \quad x_4 = \frac{5}{3}, \quad x_5 = \frac{8}{5}, \quad x_6 = \frac{13}{8}, \dots$$

Sie besitzt daher die Teilfolgen

$$(x_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}} = (x_1, x_3, x_5, \dots) = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \dots\right)$$

und

$$(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}} = (x_2, x_4, x_6, \dots) = \left(2, \frac{5}{3}, \frac{13}{8}, \dots\right)$$

Wir zeigen zunächst $1 \leq x_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

„ $n = 1$ “: Es ist $x_1 = 1$ und damit $1 \leq x_1 \leq 2$.

„ $n \rightarrow n + 1$ “: Es ist $1 \leq x_n \leq 2$ und damit

$$1 \geq \frac{1}{x_n} \geq \frac{1}{2} \implies 2 \geq 1 + \frac{1}{x_n} \geq \frac{3}{2} \implies 2 \geq x_{n+1} \geq 1.$$

- a) Wir zeigen $x_{2n-1} \leq x_{2n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:
 „ $n = 1$ “: Es ist

$$x_1 = 1 \leq \frac{3}{2} = x_3.$$

„ $n \rightarrow n + 1$ “: Es ist

$$\begin{aligned} x_{2n-1} \leq x_{2n+1} &\stackrel{x_{2n-1} > 0}{\implies} \frac{1}{x_{2n-1}} \geq \frac{1}{x_{2n+1}} \implies \\ \underbrace{1 + \frac{1}{x_{2n-1}}}_{=x_{2n}} &\geq \underbrace{1 + \frac{1}{x_{2n+1}}}_{=x_{2n+2}} \implies x_{2n} \geq x_{2n+2} \stackrel{x_{2n+2} > 0}{\implies} \frac{1}{x_{2n}} \leq \frac{1}{x_{2n+2}} \\ &\implies \underbrace{1 + \frac{1}{x_{2n}}}_{=x_{2n+1}} \leq \underbrace{1 + \frac{1}{x_{2n+2}}}_{=x_{2n+3}} \implies x_{2n+1} \leq x_{2n+3} \end{aligned}$$

Damit ist die zunächst Teilfolge $(x_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt also $x_{2n-1} \leq x_{2n+1}$, woraus sich

$$\frac{1}{x_{2n-1}} \geq \frac{1}{x_{2n+1}} \quad \text{und damit} \quad x_{2n} = 1 + \frac{1}{x_{2n-1}} \geq 1 + \frac{1}{x_{2n+1}} = x_{2n+2}$$

ergibt; folglich ist dann die Teilfolge $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend.

- b) Die Teilfolge $(x_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ ist gemäß a) monoton wachsend und gemäß den einleitenden Bemerkungen (durch 1 nach unten und 2 nach oben) beschränkt, also konvergent, und besitzt daher einen Grenzwert $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1}$, für den ebenfalls $1 \leq a \leq 2$ gilt. Wegen

$$x_{2n+1} = 1 + \frac{1}{x_{2n}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{2n-1}}} = 1 + \frac{x_{2n-1}}{x_{2n-1} + 1} = \frac{2x_{2n-1} + 1}{x_{2n-1} + 1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_{2n-1} + 1}{x_{2n-1} + 1} = \frac{2a + 1}{a + 1}$$

und damit

$$a(a + 1) = 2a + 1, \quad \text{also} \quad a^2 - a - 1 = 0,$$

woraus sich

$$a = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

wegen $1 \leq a \leq 2$ also

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

ergibt. Des weiteren ist die Teilfolge gemäß a) $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt, also konvergent, und mit denselben Überlegungen wie eben ergibt sich für den Grenzwert $b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n}$ dann

$$b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Damit konvergiert auch die gesamte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $a = b$.

1.24 Sei c Grenzwert einer konvergenten Teilfolge der gegebenen Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ reeller Zahlen; sei etwa $(a_{n_k})_{k \geq 1}$ diese Teilfolge mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = c.$$

Folglich gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}^2 = c^2;$$

dabei ist $(a_{n_k}^2)_{k \geq 1}$ eine Teilfolge der sogar als konvergent vorausgesetzten Folge $(a_n^2)_{n \geq 1}$ reeller Zahlen. Damit erhalten wir

$$c^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = a^2,$$

woraus sich aber sofort $c = a$ oder $c = -a$ ergibt.

1.25 a) Da die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach Voraussetzung gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, ist die Folge $(a_n - a)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge und damit insbesondere beschränkt; es gibt also ein $M > 0$ mit $|a_n - a| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir weisen nun anhand der Definition nach, daß auch die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der arithmetischen Mittelwerte

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert; sei dazu $\varepsilon > 0$.

- Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ gibt es zu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq n_1;$$

- dann gibt es wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Mn_1}{n} = 0$ ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{Mn_1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq n_2.$$

Sei nun $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$; für alle $n \geq n_0$ gilt dann

$$\begin{aligned} |b_n - a| &= \left| \frac{1}{n} (a_1 + \dots + a_n) - a \right| = \frac{1}{n} \cdot |(a_1 + \dots + a_n) - n \cdot a| \\ &= \frac{1}{n} \cdot |(a_1 - a) + \dots + (a_n - a)| \leq \frac{1}{n} \cdot (|a_1 - a| + \dots + |a_n - a|) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \left(\underbrace{|a_1 - a| + \dots + |a_{n_1} - a|}_{\leq M} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{n} \cdot \left(\underbrace{|a_{n_1+1} - a| + \dots + |a_n - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} \right) \\ &\leq \frac{1}{n} \cdot n_1 \cdot M + \frac{1}{n} \cdot \underbrace{(n - n_1)}_{\leq n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{Mn_1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

- b) Die alternierende Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ besitzt die beiden Häufungspunkte -1 und 1 , ist also insbesondere nicht konvergent. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt aber

$$\sum_{k=1}^n a_k = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{=0} + \underbrace{(a_3 + a_4)}_{=0} + \dots + a_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ -1, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

und damit

$$|b_n| = \left| \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n a_k \right| = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\left| \sum_{k=1}^n a_k \right|}_{\leq 1} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

woraus sich mit dem Schrankenlemma $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ergibt.