



Prof. Dr. Daniel Rost

Klausurenkurs zum Staatsexamen (WS 2011/12): Differential- und Integralrechnung 1

1.1 (Frühjahr 2002, Thema 3, Aufgabe 2)

Formulieren Sie das Prinzip der vollständigen Induktion und beweisen Sie damit die folgende Aussage: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, gilt

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

1.2 (Herbst 2005, Thema 3, Aufgabe 1)

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Gleichheit für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{n}\right).$$

1.3 (Frühjahr 1999, Thema 1, Aufgabe 1)

Sei $a_k := \frac{\sqrt{k} - 3}{\sqrt{k} + 1}$ für $k = 1, 2, \dots$. Zeigen Sie, dass die Folge $a_1, a_2, \dots$ konvergiert

und berechnen Sie ein n_* , so dass für $n \geq n_*$ gilt: $\left|a_n - \lim_{k \rightarrow \infty} a_k\right| \leq 0,01$.

1.4 (Herbst 2006, Thema 3, Aufgabe 1)

Gegeben sei die durch

$$a_n = \frac{(\sin(n))^3 - 3 \cos(n)}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 1$$

definierte Folge $(a_n)_{n \geq 1}$, und eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$. Bestimmen Sie eine reelle Zahl a und eine natürliche Zahl $N = N(\varepsilon)$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N$$

gilt.

1.5 (Herbst 2002, Thema 2, Aufgabe 1)

Für $k, n \in \mathbb{N}$ bezeichne

$$c_{n,k} := k \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n\right).$$

Zeigen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{n,k} = k \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} c_{n,k} = n.$$

1.6 (Herbst 2002, Thema 3, Aufgabe 1)

Sei $a \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^2\right).$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{2n+2}.$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{2i}.$

1.7 (Herbst 2006, Thema 1, Teilaufgabe 1a)

Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$(i) \ a_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}, \quad (ii) \ a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{7^k}, \quad (iii) \ a_n = \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

Zeigen Sie, dass diese Folgen konvergieren und berechnen Sie ihre Grenzwerte.

1.8 (Herbst 2009, Thema 3, Teilaufgabe 1a)

Untersuchen Sie für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ die durch $a_n := \frac{1-x^n}{1+x^n}$ gegebene Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konvergenz und ermitteln Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

1.9 (Herbst 2009, Thema 3, Teilaufgabe 1c)

Untersuchen Sie die durch $x_1 := 1$ und $x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^3 + 1)$ rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konvergenz.

1.10 (Frühjahr 2007, Thema 3, Aufgabe 1)

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist rekursiv definiert durch

$$a_0 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie:

a) $a_n \leq a_{n+1} \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert,

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}).$

1.11 (Herbst 2007, Thema 1, Aufgabe 1)

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{12 + a_n}, \quad n \geq 1.$$

a) Zeigen Sie, dass (a_n) monoton wachsend und beschränkt ist.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert von (a_n) .

1.12 (Herbst 2007, Thema 2, Aufgabe 1)

Gegeben sei die durch

$$a_1 = 5 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = 3 + \frac{2}{7 - a_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- a) Man zeige $3 \leq a_n \leq 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- b) Man beweise, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
- c) Man bestimme den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1.13 (Frühjahr 2009, Thema 2, Aufgabe 1)

Gegeben sei die durch

$$a_1 = \frac{7}{2} \quad \text{und} \quad a_{n+1} = 5 - \sqrt{11 - 2a_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- a) Man zeige $1 \leq a_n \leq 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- b) Man beweise, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
- c) Man bestimme den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1.14 (Herbst 2008, Thema 1, Aufgabe 2)

Man zeige, dass die durch

$$x_1 := 1, \quad x_{n+1} := x_n - \frac{x_n^3}{10} + \frac{x_n^5}{100}, \quad n \geq 1,$$

definierte Folge konvergiert und bestimme ihren Grenzwert.

1.15 (Frühjahr 2004, Thema 1, Aufgabe 2)

Gegeben sei die durch $x_0 = 1$ und $x_{n+1} = e^{2 - \frac{1}{x_n}}$ für $n \geq 0$ definierte Folge.

- a) Man zeige, dass die Folge (x_n) konvergiert.
- b) Man begründe, dass der Grenzwert a der Folge (x_n) eine Lösung der Gleichung $x = e^{2 - \frac{1}{x}}$ ist.

1.16 (Frühjahr 2009, Thema 1, Aufgabe 1)

Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$x_{n+1} = e^{x_n - 1}, \quad x_1 = 0.$$

- a) Zeigen Sie, dass die Folge monoton wachsend und durch 1 nach oben beschränkt ist.
- b) Zeigen Sie, dass die Folge gegen 1 konvergiert.

1.17 (Frühjahr 2008, Thema 2, Aufgabe 1)

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 := 3, \quad a_{n+1} := \frac{a_n^2 + 4}{2a_n}.$$

- a) Zeigen Sie: $a_n \geq 2$ für alle n .
- b) Zeigen Sie: Die Folge a_n fällt monoton.
- c) Berechnen Sie den Grenzwert a der Folge a_n .

1.18 (Frühjahr 2005, Thema 1, Aufgabe 1)

Gegeben sei die durch

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1 + a_n^2}{2 + a_n}, \quad n \geq 1$$

definierte Folge.

- a) Zeigen Sie, daß $a_n > \frac{1}{2}$ für alle $n \geq 1$ gilt.
- b) Untersuchen Sie die Folge (a_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

1.19 (Frühjahr 2009, Thema 3, Aufgabe 1)

Die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ sei definiert durch

$$a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n^2 + \frac{3}{4}, \quad \text{mit } a_0 \in [1, 3].$$

- a) Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ für alle $a_0 \in [1, 3]$ monoton fallend ist.
- b) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ in Abhängigkeit von a_0 , falls der Grenzwert existiert.

1.20 (Frühjahr 2006, Thema 2, Aufgabe 2)

Man zeige, dass für jeden Startwert $x_0 \in [0; 3]$ die durch die Rekursion

$$x_{n+1} = \frac{1}{5} (x_n^2 + 6) \quad (n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\})$$

definierte Folge konvergiert und bestimme jeweils den Grenzwert.

1.21 (Herbst 2009, Thema 2, Aufgabe 1)

Die reelle Zahlenfolge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$x_1 \geq 1, \quad x_{k+1} = f(x_k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

wobei $f(x) := \frac{1}{5} (4x + \frac{1}{x^4})$ für $x > 0$. Zeigen Sie:

- a) $f(x) \geq 1$ für alle $x > 0$.
- b) $x_{k+1} - x_k \leq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
- c) $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Bestimmen Sie auch den Grenzwert $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$.

1.22 (*Frühjahr 2005, Thema 2, Aufgabe 1*)

Für $n = 1, 2, \dots$ sei

$$a_n := \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

- a) Untersuchen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ beschränkt ist.
- b) Untersuchen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergent ist.

1.23 (*Frühjahr 2007, Thema 1, Aufgabe 2*)

Gegeben sei die durch

$$x_1 := 1, \quad x_{n+1} := 1 + \frac{1}{x_n}, \quad n \geq 1$$

definierte Folge.

- a) Man zeige, dass die Teilfolgen (x_{2n+1}) bzw. (x_{2n}) monoton wachsend bzw. monoton fallend sind.
- b) Man zeige die Konvergenz der Folge (x_n) und bestimme ihren Grenzwert.

1.24 (*Herbst 2005, Thema 2, Aufgabe 4*)

Sei a eine reelle Zahl, und sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen. Es sei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = a^2.$$

Beweisen Sie: Ist c Grenzwert einer konvergenten Teilfolge der Folge $(a_n)_{n \geq 1}$, so ist $c = a$ oder $c = -a$.

1.25 (*Frühjahr 2011, Thema 3, Aufgabe 3*)

- a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge, die gegen a konvergiere. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge der

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$$

gegen a konvergiert.

- b) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aber nicht.