LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Lineare Algebra und analytische Geometrie 8 — Lösungsvorschlag —

8.1 Die gegebene Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 13\,x^2 - 32\,x\,y + 37\,y^2 = 45 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 45 \qquad \text{für} \qquad A = \begin{pmatrix} 13 & -16 \\ -16 & 37 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Wegen

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\,E_2) = \begin{vmatrix} 13-\lambda & -16 \\ -16 & 37-\lambda \end{vmatrix} = (13-\lambda)(37-\lambda) - (-16)^2 =$$
$$= \left(481 - 50\lambda + \lambda^2\right) - 256 = \lambda^2 - 50\lambda + 225 = (\lambda - 5)(\lambda - 45)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = 45$; wegen

$$A - \lambda_1\,E_2 = \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ -16 & 32 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 5$, und wegen

$$A - \lambda_2\,E_2 = \begin{pmatrix} -32 & -16 \\ -16 & -8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 45$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top A P = D$. Mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$ ergibt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot P^\top A P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 45,$$

also

$$\begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 45 \qquad \text{bzw.} \qquad 5\,w^2 + 45\,z^2 = 45,$$

woraus sich in

$$\frac{w^2}{9} + z^2 = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{3^2} + \frac{z^2}{1^2} = 1$$

die euklidische Normalform einer Ellipse mit den Halbachsen 3 und 1 ergibt.

8.2 Der gegebene Kegelschnitt

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - 4\,x_1\,x_2 + 4\,x_2^2 - 6\,x_1 + 12\,x_2 + 8 = 0 \right\}.$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{und} \qquad c = 8 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)(4-\lambda) - (-2)^2 = \\ &= (4 - 5\,\lambda + \lambda^2) - 4 = (\lambda - 5)\cdot\lambda \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = 0$; wegen

$$A - \lambda_1\,E_2 = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 5$, und wegen

$$A - \lambda_2\,E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 0$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top A P = D$. Mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ergibt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} P^\top A P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + b^\top P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 12 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + 8 = 0,$$

und damit

$$5\, y_1^2 + \frac{30}{\sqrt{5}}\, y_1 + 8 = 0.$$

Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich

$$5 \left(y_1^2 + 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot y_1 + \left(\frac{3}{\sqrt{5}} \right)^2 \right) = -8 + 5 \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{5}} \right)^2,$$

also

$$5 \left(y_1 + \frac{3}{\sqrt{5}} \right)^2 = 1,$$

so daß sich mit der erneuten Variablentransformation $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + \frac{3}{\sqrt{5}} \\ y_2 \end{pmatrix}$ dann

$$5\, z_1^2 = 1, \qquad \text{also} \qquad \frac{z_1^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = 1,$$

die euklidische (metrische) Normalform einer Parallelenpaares ergibt.

8.3 Die gegebene Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 4\, x_1\, x_2 - 2\, x_2^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}\, x_1 - \frac{4}{\sqrt{5}}\, x_2 - 4 = 0 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} -\frac{8}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = -4 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda\, E_2) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda) - 2^2 = \\ &= \left(-2 + \lambda + \lambda^2\right) - 4 = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3) \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -3$; wegen

$$A - \lambda_1 E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$, und wegen

$$A - \lambda_2 E_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = -3$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top A P = D$. Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ führt nun die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + c = 0$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot P^\top A P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + b^\top P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + c = 0$$

über, also

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{8}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - 4 = 0,$$

und damit

$$2\, y_1^2 - 3\, y_2^2 - 4\, y_1 - 4 = 0.$$

Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich

$$2 \left(y_1^2 - 2 \cdot 1 \cdot y_1 + 1^2 \right) - 3\, y_2^2 = 4 + 2 \cdot 1^2,$$

also

$$2\, (y_1 - 1)^2 - 3\, y_2^2 = 6,$$

so daß sich mit der erneuten Variablentransformation $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - 1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dann

$$2\, z_1^2 - 3\, z_2^2 = 6, \qquad \text{also} \qquad \frac{z_1^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} - \frac{z_2^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1,$$

die euklidische (metrische) Normalform einer Hyperbel ergibt.

8.4 Der gegebene Kegelschnitt

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 7\,y^2 + 24\,x\,y - 2\,y + 24 = 0 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = 24 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 12 \\ 12 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,(7-\lambda) - 12^2 = \lambda^2 - 7\,\lambda - 144 = (\lambda+9)(\lambda-16)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = -9$ und $\lambda_2 = 16$; wegen

$$A - \lambda_1\,E_2 = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = -9$, und wegen

$$A - \lambda_2\,E_2 = \begin{pmatrix} -16 & 12 \\ 12 & -9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 16$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top A P = D$. Mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ergibt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} P^\top A P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^\top P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 24 = 0,$$

und damit

$$-9\,u^2 + 16\,v^2 - \frac{6}{5}\,u - \frac{8}{5}\,v + 24 = 0.$$

Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich

$$-9\left(u^2+2\cdot\frac{1}{15}\cdot u+\left(\frac{1}{15}\right)^2\right)+16\left(v^2-2\cdot\frac{1}{20}\cdot v+\left(\frac{1}{20}\right)^2\right)= \\ =-24-9\cdot\left(\frac{1}{15}\right)^2+16\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^2,$$

also

$$-9\left(u+\frac{1}{15}\right)^2+16\left(v-\frac{1}{20}\right)^2=-24,$$

so daß sich mit der erneuten Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u+\frac{1}{15} \\ v-\frac{1}{20} \end{pmatrix}$ dann

$$-9\,w^2+16\,z^2=-24,\qquad\text{also}\qquad \frac{w^2}{\left(\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)^2}-\frac{z^2}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)^2}=1,$$

die euklidische (metrische) Normalform einer Hyperbel ergibt.

8.5 Die gegebene Quadrik

$$Q=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid 7\,x^2+48\,x\,y-7\,y^2-6\,x+8\,y=0\right\}.$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\cdot A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+b^\top\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+c=0$$

mit

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 24 \\ 24 & -7 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2},\qquad b=\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\quad\text{und}\quad c=0\in\mathbb{R}.$$

Wegen

$$\det(A-\lambda\,E_2)=\begin{vmatrix} 7-\lambda & 24 \\ 24 & -7-\lambda \end{vmatrix}=(7-\lambda)\,(-7-\lambda)-24^2= \\ =\left(\lambda^2-49\right)-576=\lambda^2-625=(\lambda-25)\,(\lambda+25)$$

für alle $\lambda\in\mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1=25$ und $\lambda_2=-25$; wegen

$$A-\lambda_1\,E_2=\begin{pmatrix} -18 & 24 \\ 24 & -32 \end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\qquad\text{ist}\qquad v_1=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1=25$, und wegen

$$A-\lambda_2\,E=\begin{pmatrix} 32 & 24 \\ 24 & 18 \end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\qquad\text{ist}\qquad v_2=\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2=-25$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P=\left(\frac{v_1}{\|v_1\|},\frac{v_2}{\|v_2\|}\right)=\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\in\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top AP = D$. Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ führt nun die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot P^\top AP \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^\top P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0,$$

und damit

$$25\,u^2 - 25\,v^2 + 10\,v = 0$$

über. Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich ferner

$$25\,u^2 - 25\left(v^2 - 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot v + \left(\frac{1}{5}\right)^2\right) = -25\,\left(\frac{1}{5}\right)^2$$

und damit

$$\left(v - \frac{1}{5}\right)^2 - u^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

so daß sich mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v - \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ die Gleichung

$$\frac{z^2}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} - \frac{w^2}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = 1$$

ergibt; letztere stellt die euklidische (metrische) Normalform einer Hyperbel dar.

8.6 Es ist

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \right\}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = -4 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - (-1)^2 = (\lambda - 2) \cdot \lambda$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 0$; wegen

$$A - \lambda_1 E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$, und wegen

$$A - \lambda_2 E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 0$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top A P = D$. Mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ergibt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} P^\top A P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^\top P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - 4 = 0,$$

und damit

$$2\,u^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}\,u - \frac{2}{\sqrt{2}}\,v - 4 = 0.$$

Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich

$$2 \left(u^2 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot u + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) - \sqrt{2}\,v - 4 - 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 0,$$

also

$$2 \left(u - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - \sqrt{2} \left(v + \frac{5}{\sqrt{2}} \right) = 0,$$

so daß sich mit der erneuten Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ v + \frac{5}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ dann

$$2\,w^2 - \sqrt{2} z = 0, \qquad \text{also} \qquad \sqrt{2}\,w^2 - z = 0,$$

die euklidische (metrische) Normalform einer Parabel ergibt.

8.7 Die gegebene Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 4x_1 - 2x_2 + 1 = 0 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = 1 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\det(A - \lambda\, E_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 2^2 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda\,(\lambda - 5)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = 0$; wegen

$$A - \lambda_1\, E_2 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 5$, und wegen

$$A - \lambda_2\, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 0$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top A P = D$. Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ führt nun die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + c = 0$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot P^\top A P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + b^\top P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + 1 = 0,$$

und damit

$$5\,y_1^2 - \frac{10}{\sqrt{5}}\,y_2 + 1 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad 5\,y_1^2 - \frac{10}{\sqrt{5}}\left(y_2 - \frac{\sqrt{5}}{10}\right) = 0$$

über; die Variablentransformation $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - \frac{\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix}$ liefert nun die Gleichung

$$5\,z_1^2 - \frac{10}{\sqrt{5}}\,z_2 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{z_1^2}{\frac{2}{\sqrt{5}}} - z_2 = 0,$$

also die euklidische (metrische) Normalform einer Parabel.

8.8 Die gegebene Quadrik

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 17\,x^2 - 32\,x\,y - 7\,y^2 - 66\,x + 18\,y - 33 = 0 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -16 \\ -16 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} -66 \\ 18 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = -33 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\det(A) = 17 \cdot (-7) - (-16)^2 = -375 \neq 0$$

ist die Matrix A invertierbar mit der Inversen

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{-375} \begin{pmatrix} -7 & 16 \\ 16 & 17 \end{pmatrix},$$

so daß die Quadrik H genau einen Mittelpunkt besitzt, nämlich

$$m = -\tfrac{1}{2} A^{-1} b = \tfrac{1}{750} \begin{pmatrix} -7 & 16 \\ 16 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -66 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + m$ erhält man die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \left(c + \frac{1}{2}\,b^\top m\right) = 0$$

mit

$$c + \frac{1}{2}\,b^\top m = -33 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -66 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -33 - 42 = -75,$$

also insgesamt

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 75.$$

Die Matrix A besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 10\,\lambda - 375 = (\lambda - 25)(\lambda + 15)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und damit die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 25$ und $\lambda_2 = -15$; bezeichnen v_1 und v_2 dazugehörige normierte Eigenvektoren, so ergibt sich mit der orthogonalen Matrix $P = (v_1, v_2)$ dann

$$P^\top A P = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -15 \end{pmatrix}.$$

Mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$ ergibt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} P^\top A P \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 75, \qquad \text{also} \qquad \begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 75,$$

und damit

$$25\,w^2 - 15\,z^2 = 75, \qquad \text{also} \qquad \frac{w^2}{\sqrt{3}^{\,2}} - \frac{z^2}{\sqrt{5}^{\,2}} = 1;$$

dies ist die euklidische Normalform einer Hyperbel.

8.9 Die gegebene Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3\,x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 + 3\,x_2^2 - 2\,x_1 + 10\,x_2 - 5 = 0 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = -5 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\det(A - \lambda\,E_2) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1^2 = (2-\lambda)\,(4-\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 4$; wegen

$$A - \lambda_1\,E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$, und wegen

$$A - \lambda_2\,E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top A P = D$. Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ führt nun die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + c = 0$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot P^\top A P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + b^\top P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - 5 = 0,$$

und damit

$$2\, y_1^2 + 4\, y_2^2 - \frac{12}{\sqrt{2}}\, y_1 + \frac{8}{\sqrt{2}}\, y_2 - 5 = 0$$

über. Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich ferner

$$\begin{aligned} 2\left(y_1^2 - 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}\, y_1 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2\right) + 4\left(y_2^2 + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot y_2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) &= \\ = 5 + 2 \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \end{aligned}$$

und damit

$$2\left(y_1 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 16,$$

so daß sich mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - \frac{3}{\sqrt{2}} \\ y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ die Gleichung

$$\frac{z_1^2}{8} + \frac{z_2^2}{4} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{z_1^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2} + \frac{z_2^2}{2^2} = 1$$

ergibt; letztere stellt die euklidische (metrische) Normalform dar. Insgesamt ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} z_1 + \frac{3}{\sqrt{2}} \\ z_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + P \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} &= \\ = P \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=t}; \end{aligned}$$

damit ist Q eine Ellipse mit dem Mittelpunkt $t = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, den Hauptachsen

$$t + \mathbb{R} \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t + \mathbb{R} \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie den den Hauptachsenabschnitten der Länge $2\sqrt{2}$ und 2.

8.10 Die gegebene ebene Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 14\,x\,y + 44\,x + 20\,y + 76 = 0 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} 44 \\ 20 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = 76 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 7 \\ 7 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 7^2 = (-6-\lambda)\,(8-\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = -6$ und $\lambda_2 = 8$; wegen

$$A - \lambda_1\,E_2 = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = -6$, und wegen

$$A - \lambda_2\,E_2 = \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ 7 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 8$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top A P = D$. Mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ergibt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} P^\top A P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^\top P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 44 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 76 = 0,$$

und damit

$$-6\,u^2 + 8\,v^2 + 12\sqrt{2}\,u + 32\sqrt{2}\,v + 76 = 0.$$

Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich

$$\begin{aligned} -6\left(u^2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot u + \left(\sqrt{2}\right)^2\right) + 8\left(v^2 + 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot v + \left(2\sqrt{2}\right)^2\right) &= \\ = -76 - 6\left(\sqrt{2}\right)^2 + 8\left(2\sqrt{2}\right)^2, \end{aligned}$$

also

$$-6\left(u - \sqrt{2}\right)^2 + 8\left(v + 2\sqrt{2}\right)^2 = -24,$$

so daß sich mit der erneuten Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - \sqrt{2} \\ v + 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ dann

$$-6\,w^2 + 8\,z^2 = -24, \qquad \text{also} \qquad \frac{w^2}{2^2} - \frac{z^2}{\sqrt{3}^2} = 1,$$

die euklidische (metrische) Normalform einer Hyperbel ergibt.

8.11 a) Die gegebene Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 9\,y^2 - 40\,x\,y + 64\,y + 80\,x = 64 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -20 \\ -20 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} 80 \\ 64 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = -64 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -20 \\ -20 & 9 \end{vmatrix} = 0 \cdot 9 - (-20)^2 = -400 \neq 0$$

ist die Matrix A invertierbar; damit besitzt Q den Mittelpunkt

$$t = -\frac{1}{2} \cdot A^{-1} \cdot b = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-400} \begin{pmatrix} 9 & 20 \\ 20 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 64 \end{pmatrix} = \frac{1}{800} \begin{pmatrix} 2000 \\ 1600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Verschiebung des Mittelpunkts in den Ursprung wird durch die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + t = \begin{pmatrix} u + \frac{5}{2} \\ v + 2 \end{pmatrix}$ vermittelt; diese führt die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

(gemäß der in der Vorlesung durchgeführten Rechnung) in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \left(c + \tfrac{1}{2} \cdot b^\top t\right) = 0$$

über; wegen

$$c + \tfrac{1}{2} \cdot b^\top t = -64 + \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 80 & 64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = -64 + 164 = 100$$

ergibt sich also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 100 = 0.$$

b) Wegen

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda\, E_2) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & -20 \\ -20 & 9-\lambda \end{vmatrix} &= -\lambda \cdot (9-\lambda) - (-20)^2 = \\ &= \lambda^2 - 9\,\lambda - 400 = (\lambda + 16)\,(\lambda - 25) \end{aligned}$$

besitzt die Matrix A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = -16$ und $\lambda_2 = 25$. Wegen

$$A - \lambda_1\, E_2 = \begin{pmatrix} 16 & -20 \\ -20 & 25 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = -16$, und wegen

$$A - \lambda_2\, E_2 = \begin{pmatrix} -25 & -20 \\ -20 & -16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 25$; mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) \qquad \text{gilt dann} \qquad P^\top A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Die erneute Variablentransformation $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$ liefert die Gleichung

$$\begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot P^\top A P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + 100 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda_1 \cdot w^2 + \lambda_2 \cdot z^2 = -100$$

und folglich

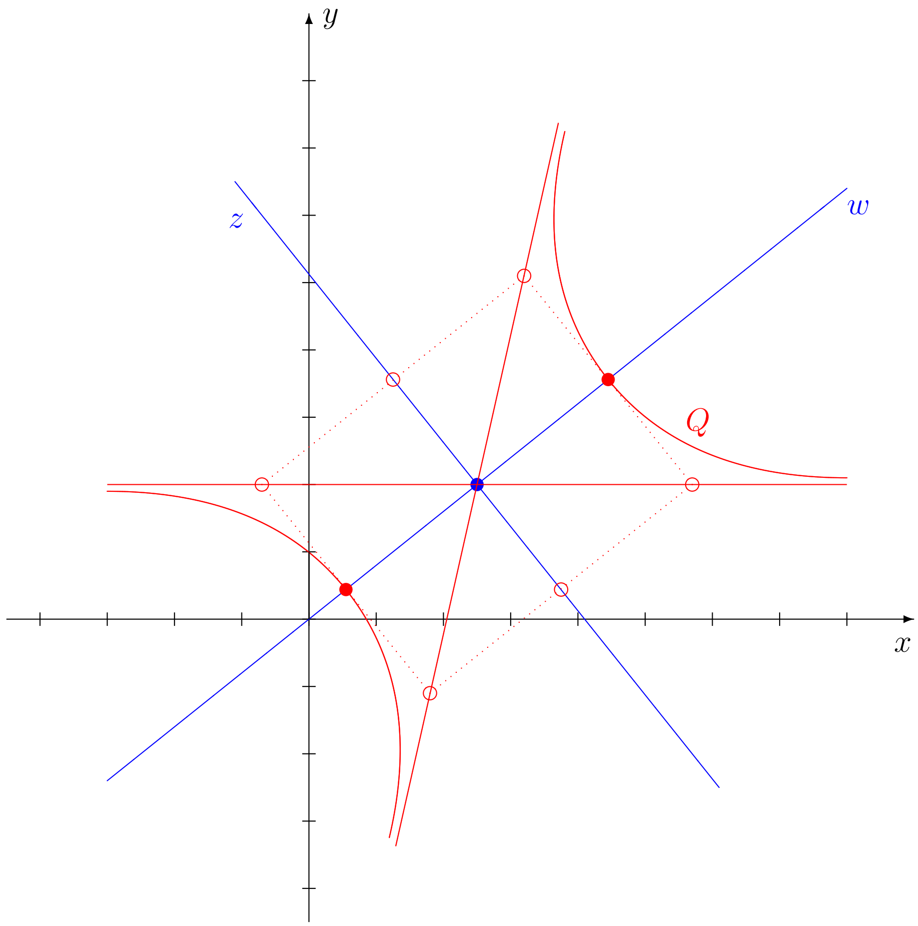
$$-16 \cdot w^2 + 25 \cdot z^2 = -100 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} - \frac{z^2}{2^2} = 1;$$

die letzte Gleichung ist die euklidische Normalform von Q.

c) Gemäß a) und b) ist die Quadrik Q eine Hyperbel mit dem Mittelpunkt $t = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ und den beiden Hauptachsen

$$t + \mathbb{R} \cdot v_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t + \mathbb{R} \cdot v_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix};$$

diese beiden Geraden entsprechen der w–Achse und der z–Achse desjenigen Koordinatensystems, in dem Q die in b) ermittelte euklidische Normalform besitzt.



8.12 a) Die gegebene Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 8\,x^2 - 12\,x\,y + 17\,y^2 + 44\,x - 58\,y + 48 = 0 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 17 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad b = \begin{pmatrix} 44 \\ -58 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = 48 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\det(A - \lambda\, E_2) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -6 \\ -6 & 17-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)\,(17-\lambda) - (-6)^2 =$$
$$= \left(\lambda^2 - 25\,\lambda + 136\right) - 36 = \lambda^2 - 25\,\lambda + 100 = (\lambda-5)(\lambda-20)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = 20$; wegen

$$A - \lambda_1\, E_2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 5$, und wegen

$$A - \lambda_2\, E = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 20$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2\right) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top A P = D$. Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ führt nun die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot P^\top A P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^\top P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 44 & -58 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 48 = 0,$$

und damit

$$5\,u^2 + 20\,v^2 + \frac{30}{\sqrt{5}}\,u - \frac{160}{\sqrt{5}}\,v + 48 = 0$$

über. Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich ferner

$$5 \cdot \left(u^2 + 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot u + \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2\right) + 20 \cdot \left(v^2 - 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot v + \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2\right) =$$
$$= -48 + 5 \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 + 20 \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2$$

und damit

$$5 \cdot \left(u + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 + 20 \cdot \left(v - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 = 25,$$

so daß sich mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + \frac{3}{\sqrt{5}} \\ v - \frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ die Gleichung

$$\frac{w^2}{5} + \frac{z^2}{\frac{5}{4}} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{(\sqrt{5})^2} + \frac{z^2}{(\frac{1}{2}\sqrt{5})^2} = 1$$

ergibt; letztere stellt die euklidische Normalform einer Ellipse dar.

b) Gemäß der in a) ermittelten euklidischen Normalform ist Q eine Ellipse mit den Hauptachsenabschnitten $\alpha = \sqrt{5}$ und $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Wegen

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w - \frac{3}{\sqrt{5}} \\ z + \frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ &= P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ \frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

besitzt Q im x–y–Koordinatensystem den Mittelpunkt $m = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie die w–Achse $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die z–Achse $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Hauptachsen; die Scheitelpunkte auf der w–Achse sind

$$s_{1,2} = m \pm \alpha \cdot \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

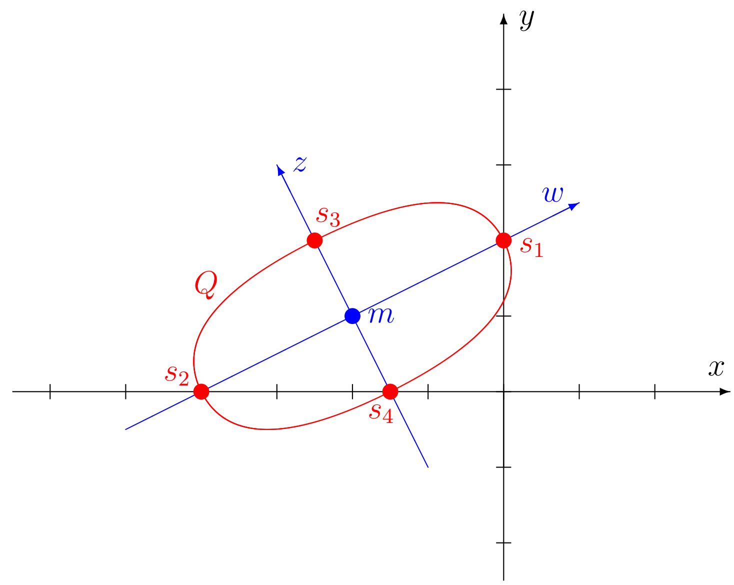
und die Scheitelpunkte auf der z–Achse sind

$$s_{3,4} = m \pm \beta \cdot \frac{v_2}{\|v_2\|} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

insgesamt also

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad s_3 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s_4 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich die folgende Skizze:



8.13 Der gegebene Kegelschnitt

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2\,s\,x\,y + y^2 + 2\,x + 2\,y + 1 = 0 \right\}.$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = 1 \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist der Kegelschnitt P genau dann eine Parabel, wenn er ohne Mittelpunkt ist, also das lineare Gleichungssystem $A \cdot m = -\frac{1}{2}\,b$ keine Lösung besitzt: wegen

$$\left(A \,\middle|\, -\tfrac{1}{2}\,b\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & s & -1 \\ s & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{\text{II}-s\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & s & -1 \\ 0 & 1-s^2 & -1+s \end{array}\right)$$

ist dies genau für $1 - s^2 = 0$ und $-1 + s \neq 0$, also für $s = -1$ der Fall. Wegen

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - (-1)^2 = (\lambda - 2) \cdot \lambda$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 0$; wegen

$$A - \lambda_1\,E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$, und wegen

$$A - \lambda_2\,E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 0$. Mit der orthogonalen Matrix

$$T = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $T^\top A T = D$. Mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ergibt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} T^\top A T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^\top T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 1 = 0,$$

und damit

$$2\,u^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}\,v + 1 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad 2\,u^2 + \frac{4}{\sqrt{2}} \left(v + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = 0.$$

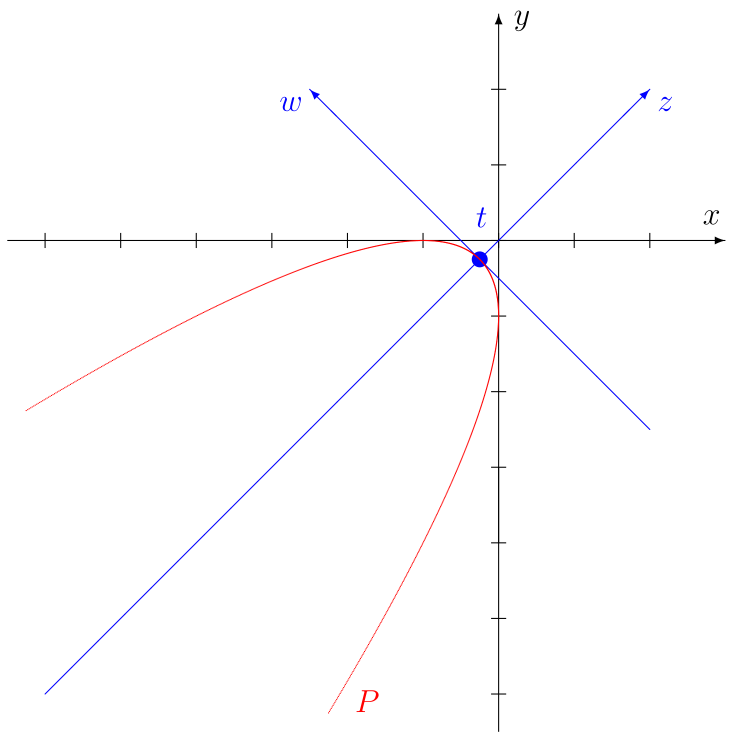
Mit der erneuten Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v + \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$ dann

$$2\,w^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}\,z = 0, \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\,w^2 + z = 0,$$

die euklidische (metrische) Normalform einer Parabel ergibt. Insgesamt ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= T \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} w \\ z - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} = \\ &= T \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}}_{=t}; \end{aligned}$$

es ist t der Scheitel und die z–Achse $t + \mathbb{R} \cdot v_2$ die Symmetrieachse von P.



8.14 Die in Abhängigkeit vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ gegebene Quadrik

$$Q_s = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid s\,x^2 + 2\,x\,y + s\,y^2 + 2\,x + 2\,y - 1 = 0 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A_s \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A_s = \begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{und} \qquad c = -1 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \chi_{A_s}(\lambda) = \det(A_s - \lambda\,E_2) = \begin{vmatrix} s-\lambda & 1 \\ 1 & s-\lambda \end{vmatrix} = (s-\lambda)^2 - 1^2 = \\ = (s-\lambda-1)\cdot(s-\lambda+1) = (\lambda-(s-1))\cdot(\lambda-(s+1)) \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A_s die beiden (verschiedenen) Eigenwerte $\lambda_1 = s-1$ und $\lambda_2 = s+1$; wegen

$$A_s - \lambda_1\,E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A_s zum Eigenwert $\lambda_1 = s-1$, und wegen

$$A_s - \lambda_2\,E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A_s zum Eigenwert $\lambda_2 = s+1$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top A P = D$. Mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ergibt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} P^\top A P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^\top P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - 1 = 0,$$

und damit

$$(*) \qquad (s-1)\, u^2 + (s+1)\, v^2 + 2\sqrt{2}\, v - 1 = 0.$$

Für $s = -1$ erhält man

$$(*) \quad -2\,u^2 + 2\sqrt{2}\, v - 1 = 0 \iff$$
$$\iff -2\,u^2 + 2\sqrt{2}\left(v - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 0 \iff \frac{u^2}{\sqrt{2}} - \left(v - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 0,$$

mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v - \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ also in $\frac{w^2}{\sqrt{2}} - z = 0$ die euklidische Normalform einer Parabel. Für $s \neq -1$ ist $s+1 \neq 0$, und es gilt

$$(*) \quad (s-1)\, u^2 + (s+1)\left(v^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{s+1} \cdot v\right) = 1 \iff$$
$$(s-1)\, u^2 + (s+1)\left(v^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{s+1} \cdot v + \left(\frac{\sqrt{2}}{s+1}\right)^2\right) = 1 + \frac{2}{s+1}$$
$$\iff (s-1)\, u^2 + (s+1)\left(v + \frac{\sqrt{2}}{s+1}\right)^2 = \frac{s+3}{s+1},$$

mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v + \frac{\sqrt{2}}{s+1} \end{pmatrix}$ also

$$(*) \qquad (s-1)\, w^2 + (s+1)\, z^2 = \frac{s+3}{s+1}.$$

Für $s = 1$ erhält man in

$$(*) \qquad 2\,z^2 = 2 \iff z^2 = 1$$

die euklidische Normalform eines parallelen Geradenpaars, und für $s = -3$ erhält man in

$$(*) \qquad -4\,w^2 - 2\,z^2 = 0 \iff 2\,w^2 + z^2 = 0$$

die euklidische Normalform eines Punktes; für $s \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1\}$ ergibt sich schließlich die euklidische Normalform

$$(*) \qquad \frac{w^2}{\frac{s+3}{(s+1)(s-1)}} + \frac{z^2}{\frac{s+3}{(s+1)^2}} = 1,$$

und im Hinblick auf das Vorzeichen der beiden Nenner erhalten wir:

	$s < -3$	$-3 < s < -1$	$-1 < s < 1$	$1 < s$
$s+3$	< 0	> 0	> 0	> 0
$s+1$	< 0	< 0	> 0	> 0
$s-1$	< 0	< 0	< 0	> 0
$\frac{s+3}{(s+1)(s-1)}$	< 0	> 0	< 0	> 0
$\frac{s+3}{(s+1)^2}$	< 0	> 0	> 0	> 0
Typ	leere Menge	Ellipse	Hyperbel	Ellipse

8.15 Die in Abhängigkeit von den Parametern a, $b \in \mathbb{R}$ gegebene Quadrik $Q_{a,b}$ im $\mathbb{R}^2$ mit Variablen x, $y \in \mathbb{R}$ besitzt die Gleichung

$$(a+b)\,x^2 + (a+b)\,y^2 + 2(b-a)\,xy + 2(2b-a)\,x + 2(2b+a)\,y + a + 4b = 2$$

und damit

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A_{a,b} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + t_{a,b}^\top \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c_{a,b} = 0$$

mit der symmetrischen Matrix

$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} a+b & b-a \\ b-a & a+b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

sowie

$$t_{a,b} = \begin{pmatrix} 2(2b-a) \\ 2(2b+a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \qquad \text{und} \qquad c_{a,b} = a + 4b - 2 \in \mathbb{R}.$$

Für $a = b$ ist $A_{a,a}$ bereits eine Diagonalmatrix, für $a = b = 0$ sogar die Nullmatrix, so daß $Q_{0,0}$ strenggenommen keine Quadrik ist; wegen der unlösbaren Gleichung $0 = 2$ ist $Q_{0,0}$ die leere Menge. Für $a = b \neq 0$ besitzt $Q_{a,a}$ die Gleichung

$$2a\,x^2 + 2a\,y^2 + 2a\,x + 6a\,y + 5a = 2,$$

nach Division durch $2a \neq 0$ also

$$x^2 + y^2 + x + 3y + \frac{5}{2} = \frac{1}{a} \qquad \text{bzw.} \qquad \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 + 3y + \frac{9}{4}\right) = \frac{1}{a}$$

und damit
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{a};$$
mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+\frac{1}{2} \\ y+\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ ergibt sich
$$w^2+z^2=\frac{1}{a}$$
und damit für $a>0$ in
$$\frac{w^2}{(\frac{1}{\sqrt{a}})^2}+\frac{z^2}{(\frac{1}{\sqrt{a}})^2}=1$$
die euklidische Normalform eines Kreises sowie für $a<0$ in
$$\frac{w^2}{(\frac{1}{\sqrt{-a}})^2}+\frac{z^2}{(\frac{1}{\sqrt{-a}})^2}=-1$$
die euklidische Normalform der leeren Menge.

Für $a\neq b$ besitzt nun die Matrix $A_{a,b}$ wegen
$$\begin{aligned}\chi_{A_{a,b}}(\lambda) &= \det(A_{a,b}-\lambda\cdot E_2)=\begin{vmatrix}(a+b)-\lambda & b-a \\ b-a & (a+b)-\lambda\end{vmatrix} \\ &= ((a+b)-\lambda)^2-(b-a)^2=(2a-\lambda)\,(2b-\lambda)\end{aligned}$$
für alle $\lambda\in\mathbb{R}$ die beiden Eigenwerte $\lambda_1=2a$ und $\lambda_2=2b$; wegen
$$A_{a,b}-\lambda_1\cdot E_2=\begin{pmatrix} b-a & b-a \\ b-a & b-a \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{b-a}\cdot \mathrm{II}}{\overset{\frac{1}{b-a}\cdot \mathrm{I}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ist $v_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ ein Eigenvektor von $A_{a,b}$ zum Eigenwert $\lambda_1=2a$, und wegen
$$A_{a,b}-\lambda_2\cdot E_2=\begin{pmatrix} a-b & b-a \\ b-a & a-b \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{b-a}\cdot \mathrm{II}}{\overset{\frac{1}{a-b}\cdot \mathrm{I}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ist $v_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ ein Eigenvektor von $A_{a,b}$ zum Eigenwert $\lambda_2=2b$. Mit der orthogonalen Matrix
$$P=\left(\frac{v_1}{\|v_1\|},\frac{v_2}{\|v_2\|}\right)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$
und der Diagonalmatrix
$$D_{a,b}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2)=\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$$
gilt dann $P^\top A_{a,b}P=D_{a,b}$. Mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ergibt sich die Gleichung
$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} P^\top A_{a,b}P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}+t_{a,b}^\top P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}+c_{a,b}=0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4b-2a & 4b+2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + a + 4b = 2,$$

und damit

$$2a\,u^2 + 2b\,v^2 + \frac{4a}{\sqrt{2}}\,u + \frac{8b}{\sqrt{2}}\,v + a + 4b = 2,$$

also

$$2a\left(u^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}\,u + \frac{1}{2}\right) + 2b\left(v^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}\,v + 2\right) = 2$$

und damit

$$a\left(u + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + b\left(v + \frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1;$$

mit der erneuten mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ v + \frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$a\,w^2 + b\,z^2 = 1,$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Im Falle $a > 0$ ergibt sich für $b > 0$ in

  $$\frac{w^2}{(\frac{1}{\sqrt{a}})^2} + \frac{z^2}{(\frac{1}{\sqrt{b}})^2} = 1$$

  die euklidische Normalform einer Ellipse, für $b = 0$ in

  $$\frac{w^2}{(\frac{1}{\sqrt{a}})^2} = 1$$

  die euklidische Normalform eines parallelen Geradenpaars und für $b < 0$ in

  $$\frac{w^2}{(\frac{1}{\sqrt{a}})^2} - \frac{z^2}{(\frac{1}{\sqrt{-b}})^2} = 1$$

  die euklidische Normalform einer Hyperbel.
- Im Falle $a = 0$ ergibt sich für $b > 0$ in

  $$\frac{z^2}{(\frac{1}{\sqrt{b}})^2} = 1$$

  die euklidische Normalform eines parallelen Geradenpaars und für $b < 0$ in

  $$\frac{z^2}{(\frac{1}{\sqrt{-b}})^2} = -1$$

  die euklidische Normalform der leeren Menge.

- Im Falle $a < 0$ ergibt sich für $b > 0$ in
$$-\frac{w^2}{(\frac{1}{\sqrt{-a}})^2} + \frac{z^2}{(\frac{1}{\sqrt{b}})^2} = 1$$
die euklidische Normalform einer Hyperbel, für $b = 0$ in
$$\frac{w^2}{(\frac{1}{\sqrt{-a}})^2} = -1$$
die euklidische Normalform der leeren Menge und für $b < 0$ in
$$\frac{w^2}{(\frac{1}{\sqrt{-a}})^2} + \frac{z^2}{(\frac{1}{\sqrt{-b}})^2} = -1$$
die euklidische Normalform ebenfalls der leeren Menge.

Damit sind die in a) und b) gestellten Fragen beantwortet.

8.16 Der in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ gegebene Kegelschnitt Q_a im $\mathbb{R}^2$ mit Variablen x, $y \in \mathbb{R}$ besitzt die Gleichung
$$(a+1)x^2 + (a+1)y^2 + 2(a-1)xy + 2\sqrt{2}a\,x + 2\sqrt{2}a\,y + 2a - 2 = 0$$
und damit
$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b_a^\top \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c_a = 0$$
mit der symmetrischen Matrix
$$A_a = \begin{pmatrix} a+1 & a-1 \\ a-1 & a+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$
sowie
$$b_a = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}a \\ 2\sqrt{2}a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \qquad \text{und} \qquad c_a = 2a - 2 \in \mathbb{R}.$$
Für $a = 1$ ist A_a bereits eine Diagonalmatrix, und Q_a besitzt die Gleichung
$$2\,x^2 + 2\,y^2 + 2\sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2}\,y = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad x^2 + y^2 + \sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,y = 0,$$
also
$$\left(x^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}\,x + \frac{1}{2}\right) + \left(y^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}\,y + \frac{1}{2}\right) = 1$$
und damit
$$\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1;$$
mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ergibt sich in
$$w^2 + z^2 = 1$$

die euklidische Normalform eines Kreises.

Für $a \neq 1$ besitzt nun die Matrix A_a wegen

$$\begin{aligned}\chi_{A_a}(\lambda) &= \det(A_a - \lambda \cdot E_2) = \begin{vmatrix}(a+1)-\lambda & a-1 \\ a-1 & (a+1)-\lambda\end{vmatrix} \\ &= ((a+1)-\lambda)^2 - (a-1)^2 = (2-\lambda)(2a-\lambda)\end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 2a$; wegen

$$A_a - \lambda_1 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} a-1 & a-1 \\ a-1 & a-1 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{a-1}\cdot \mathrm{II}}{\overset{\frac{1}{a-1}\cdot \mathrm{I}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ein Eigenvektor von A_a zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$, und wegen

$$A_a - \lambda_2 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} -a+1 & a-1 \\ a-1 & -a+1 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{a-1}\cdot \mathrm{II}}{\overset{\frac{1}{a-1}\cdot \mathrm{I}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ein Eigenvektor von A_a zum Eigenwert $\lambda_2 = 2a$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D_a = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top A_a P = D_a$. Mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ergibt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} P^\top A_a P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b_a^\top P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c_a = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}\,a & 2\sqrt{2}\,a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 2a - 2 = 0,$$

und damit

$$2\,u^2 + 2a\,v^2 + 4a\,v + 2a - 2 = 0,$$

also

$$2\,u^2 + 2a\left(v^2 + 2\,v + 1\right) = 2 \qquad \text{bzw.} \qquad u^2 + a\,(v+1)^2 = 1;$$

mit der erneuten mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v+1 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$w^2 + a\,z^2 = 1,$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- für $a > 0$ ergibt sich in
$$\frac{w^2}{1^2} + \frac{z^2}{(\frac{1}{\sqrt{a}})^2} = 1$$
die euklidische Normalform einer Ellipse,
- für $a = 0$ ergibt sich in
$$\frac{w^2}{1^2} = 1$$
die euklidische Normalform eines parallelen Geradenpaars,
- für $a < 0$ ergibt sich in
$$\frac{w^2}{1^2} - \frac{z^2}{(\frac{1}{\sqrt{-a}})^2} = 1$$
die euklidische Normalform einer Hyperbel.

8.17 a) Der in Abhängigkeit vom reellen Parameter $t \in \mathbb{R}$ gegebene Kegelschnitt
$$K_t = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 2t\,x\,y = 1 \right\}$$
besitzt die Gleichung
$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{mit} \qquad A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2};$$
für $t = 0$ besitzt $A_0 = E_2$ bereits Diagonalgestalt, und bei dem Kegelschnitt
$$K_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$$
handelt es sich um den Einheitskreis. Für $t \neq 0$ besitzt die Matrix A_t wegen
$$\begin{aligned} \chi_{A_t}(\lambda) = \det(A_t - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & t \\ t & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)^2 - t^2 = \\ &= (\lambda-1)^2 - t^2 = (\lambda - 1 - t)(\lambda - 1 + t) \end{aligned}$$
für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die beiden verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = 1+t$ und $\lambda_2 = 1-t$; wegen
$$A_t - \lambda_1 E_2 = \begin{pmatrix} -t & t \\ t & -t \end{pmatrix} \underset{\text{II+I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -t & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$
ein Eigenvektor von A_t zum Eigenwert $\lambda_1 = 1 + t$, und wegen
$$A_t - \lambda_2 E_2 = \begin{pmatrix} t & t \\ t & t \end{pmatrix} \underset{\text{II−I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} t & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$
ein Eigenvektor von A_t zum Eigenwert $\lambda_2 = 1 - t$. Mit der orthogonalen Matrix
$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D_t = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 1+t & 0 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt $P^\top A_t P = D_t$; die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$ liefert

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \iff \begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \underbrace{P^\top A_t P}_{=D_t} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1 \iff$$

$$\begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+t & 0 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1 \iff (1+t)w^2 + (1-t)z^2 = 1,$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

$-1 > t$	$1+t<0$	$1-t>0$	Hyperbel
$-1 = t$	$1+t=0$	$1-t>0$	paralleles Geradenpaar
$-1 < t < 0$	$1+t>0$	$1-t>0$	Ellipse
$0 < t < 1$	$1+t>0$	$1-t>0$	Ellipse
$t = 1$	$1+t>0$	$1-t=0$	paralleles Geradenpaar
$t > 1$	$1+t>0$	$1-t<0$	Hyperbel

b) Gemäß a) ist K_t genau dann eine Ellipse, aber kein Kreis, wenn $-1 < t < 0$ oder $0 < t < 1$ gilt; in diesem Fall ergibt sich die euklidische Normalform

$$\frac{w^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)^2} = 1,$$

so daß wir die Hauptachsenabschnitte

$$a = \frac{1}{\sqrt{1+t}} \qquad \text{auf der } w\text{–Achse} \quad \mathbb{R}\cdot\frac{v_1}{\|v_1\|} = \mathbb{R}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$b = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \qquad \text{auf der } z\text{–Achse} \quad \mathbb{R}\cdot\frac{v_2}{\|v_2\|} = \mathbb{R}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erhalten.

- Für $-1 < t < 0$ ist $1+t < 1 < 1-t$ und damit

$$a = \frac{1}{\sqrt{1+t}} > 1 > \frac{1}{\sqrt{1-t}} = b,$$

so daß die w–Achse die große Halbachse von K_t ist; da es sich hierbei um die 1. Winkelhalbierende im x–y–Koordinatensystem handelt, muß die x–Achse um dem Winkel $\alpha = \frac{\pi}{4}$ in mathematisch positiver Richtung um den Ursprung gedreht werden, um diese zu überdecken.

- Für $0 < t < 1$ ist $1 + t > 1 > 1 - t$ und damit

$$a = \frac{1}{\sqrt{1+t}} < 1 < \frac{1}{\sqrt{1-t}} = b,$$

so daß die z–Achse die große Halbachse von K_t ist; da es sich hierbei um die 2. Winkelhalbierende im x–y–Koordinatensystem handelt, muß die x–Achse um dem Winkel $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ in mathematisch positiver Richtung um den Ursprung gedreht werden, um diese zu überdecken.

8.18 Wir bestimmen die affine Normalform für die in der Ebene mit den Koordinaten x und y durch die Gleichung

$$(*) \qquad x^2 + x\,y + 3\,x + y = 1$$

gegebenen Quadrik Q mit Hilfe quadratischer Ergänzung. Wegen

$$\begin{aligned}
(*) \iff & \left(x^2 + x\,y + 3\,x\right) + y = 1 \\
\iff & \left(x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\cdot x\cdot\frac{y}{2} + 2\cdot x\cdot\frac{3}{2} + 2\cdot\frac{y}{2}\cdot\frac{3}{2}\right) - \\
& - \left(\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{y}{2}\cdot\frac{3}{2}\right) + y = 1 \\
\iff & \left(x + \frac{y}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{y}{2} = \frac{13}{4} \\
\iff & \left(x + \frac{y}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(y^2 + 2\cdot 1\cdot y + 1^2\right) = \frac{13}{4} - \frac{1}{4}\cdot 1^2 \\
\iff & \left(x + \frac{y}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\,(y+1)^2 = 3 \\
\iff & \frac{1}{3}\left(x + \frac{y}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{12}\,(y+1)^2 = 1
\end{aligned}$$

erhält man mit $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{y}{2} + \frac{3}{2}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{12}}\,(y+1) \end{pmatrix}$ die affine Normalform $u^2 - v^2 = 1$ einer Hyperbel.

8.19 Wir bestimmen die affine Normalform der durch die Gleichung

$$(*) \qquad x^2 + 2\,x\,y + 2\,x + 2\,y = 0$$

gegebenen Quadrik Q mit Hilfe quadratischer Ergänzung. Wegen

$$\begin{aligned}
(*) \iff & \left(x^2 + 2\,x\,y + 2\,x\right) + 2\,y = 0 \\
\iff & \left(x^2 + y^2 + 1^2 + 2\cdot x\cdot y + 2\cdot x\cdot 1 + 2\cdot y\cdot 1\right) - \\
& - \left(y^2 + 1^2 + 2\cdot y\cdot 1\right) + 2\,y = 0 \\
\iff & (x + y + 1)^2 - y^2 = 1
\end{aligned}$$

erhält man mit $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+1 \\ y \end{pmatrix}$ die affine Normalform $u^2 - v^2 = 1$. Damit ist Q eine Hyperbel mit den Asymptoten $u = \pm v$, also

$$x + y + 1 = u = v = y \qquad \text{bzw.} \qquad x = -1$$

und

$$x + y + 1 = u = -v = -y \qquad \text{bzw.} \qquad x + 2\,y = -1.$$

8.20 Wir untersuchen in Abhängigkeit vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ die affine Normalform der durch die Gleichung

$$(*) \qquad (s\,x_1)^2 + 2\,x_1\,x_2 + x_2^2 - 2\,x_1 - 2\,x_2 + s + 1 = 0$$

gegebenen Quadrik; dabei sind die Glieder in x_2 parameterfrei. Wegen

$$\begin{aligned}
(*) \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(x_2^2 + 2\,x_1\,x_2 - 2\,x_2\right) + s^2\,x_1^2 - 2\,x_1 + s + 1 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(x_2^2 + x_1^2 + (-1)^2 + 2 \cdot x_2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \cdot (-1) + 2 \cdot x_1 \cdot (-1)\right) - \\
&\qquad\quad - \left(x_1^2 + (-1)^2 + 2 \cdot x_1 \cdot (-1)\right) + s^2\,x_1^2 - 2\,x_1 + s + 1 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (x_2 + x_1 - 1)^2 - x_1^2 - 1 + 2\,x_1 + s^2\,x_1^2 - 2\,x_1 + s + 1 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (x_1 + x_2 - 1)^2 - (1 - s^2)\,x_1^2 = -s
\end{aligned}$$

erhält man mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 1 \\ x_1 \end{pmatrix}$ zunächst

$$u^2 - (1 - s^2)\,v^2 = -s.$$

Für $s = 0$ ergibt sich $u^2 - v^2 = 0$, weswegen die gegebene Quadrik in diesem Fall ein sich schneidendes Geradenpaar ist. Für $s \neq 0$ läßt sich diese Gleichung in

$$\frac{1}{-s} \cdot u^2 - \frac{1 - s^2}{-s} \cdot v^2 = 1,$$

umformen, weswegen die gegebene Quadrik in diesem Fall genau dann eine Hyperbel ist, wenn die Koeffizienten $\frac{1}{-s}$ und $\frac{1-s^2}{-s}$ von u^2 und v^2 entweder beide positiv oder beide negativ sind; dies ist jedoch zu

$$\frac{1}{-s} \cdot \frac{1 - s^2}{-s} > 0 \iff \frac{1 - s^2}{s^2} > 0 \iff 1 > s^2$$

gleichwertig. Demnach beschreibt die gegebene Gleichung genau dann eine Hyperbel, wenn $s \in \,]-1; 0[\, \cup \,]0; 1[$ ist.

8.21 Wir untersuchen in Abhängigkeit vom Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ die affine Normalform der durch die Gleichung

$$(*) \qquad \lambda\,x^2 + 2\,x\,y + 2\,y^2 + \lambda^2 - 4 = 0$$

gegebenen Quadrik; dabei sind die Glieder in y parameterfrei. Wegen

$$\begin{aligned}
(*) \quad &\Longleftrightarrow \quad 2\,y^2 + 2\,x\,y + \lambda\,x^2 = 4 - \lambda^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(4\,y^2 + 4\,x\,y\right) + 2\,\lambda\,x^2 = 2\left(4 - \lambda^2\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(4\,y^2 + 4\,x\,y + x^2\right) - x^2 + 2\,\lambda\,x^2 = 2\left(4 - \lambda^2\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad (2\,y + x)^2 + (2\,\lambda - 1)\,x^2 = 2\left(4 - \lambda^2\right)
\end{aligned}$$

erhält man mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,y + x \\ x \end{pmatrix}$ zunächst

$$u^2 + (2\,\lambda - 1)\,v^2 = 2\left(4 - \lambda^2\right).$$

Da nun der Koeffizient 1 von u^2 positiv ist, stellt damit Q_λ genau dann eine Ellipse dar, wenn sowohl der Koeffizient $2\,\lambda - 1$ von v^2 als auch die rechte Seite $2\,(4 - \lambda^2)$ positiv ist; wegen

$$2\,\lambda - 1 > 0 \iff 2\,\lambda > 1 \iff \lambda > \tfrac{1}{2}$$

und

$$2\left(4 - \lambda^2\right) > 0 \iff 4 - \lambda^2 > 0 \iff \lambda^2 < 4 \iff -2 < \lambda < 2$$

ist dies genau für $\lambda \in \left]\tfrac{1}{2}, 2\right[$ der Fall.

8.22 Wir ermitteln für den in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ gegebenen Kegelschnitt $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ mit der Gleichung

$$(*) \qquad (1 + 4t)y^2 + x^2 + 2xy + 2tx - (8t^2 - 2t)y = -4t^3 + 1 - t^2$$

die affine Normalform (und damit den Typ) mit quadratischer Ergänzung. Es ist

$$\begin{aligned}
(*) \quad &\iff \quad x^2 + 2xy + 2tx + (1 + 4t)y^2 - (8t^2 - 2t)y = -4t^3 + 1 - t^2 \\
&\iff \quad \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot x \cdot t + y^2 + t^2 + 2 \cdot y \cdot t\right) - \left(y^2 + t^2 + 2 \cdot y \cdot t\right) + \\
&\qquad\qquad + (1 + 4t)y^2 - (8t^2 - 2t)y = -4t^3 + 1 - t^2 \\
&\iff \quad (x + y + t)^2 + 4ty^2 - 8t^2 y = -4t^3 + 1 \\
&\iff \quad (x + y + t)^2 + 4t\left(y^2 - 2 \cdot y \cdot t + t^2\right) - 4t \cdot t^2 = -4t^3 + 1 \\
&\iff \quad (x + y + t)^2 + 4t\,(y - t)^2 = 1,
\end{aligned}$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $t > 0$ ist

  $$(*) \iff (x + y + t)^2 + \left(2\sqrt{t}\,(y - t)\right)^2 = 1,$$

  und mit der affinen Variablentransformation $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + t \\ 2\sqrt{t}\,(y - t) \end{pmatrix}$ ergibt sich in $u^2 + v^2 = 1$ die affine Normalform einer Ellipse.

- Für $t = 0$ ist

  $$(*) \iff (x + y + t)^2 = 1,$$

  und mit der affinen Variablentransformation $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + t \\ y \end{pmatrix}$ ergibt sich in $u^2 = 1$ die affine Normalform eines parallelen Geradenpaares.

- Für $t < 0$ ist

  $$(*) \iff (x + y + t)^2 - \left(2\sqrt{-t}\,(y - t)\right)^2 = 1,$$

  und mit der affinen Variablentransformation $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + t \\ 2\sqrt{-t}\,(y - t) \end{pmatrix}$ ergibt sich in $u^2 - v^2 = 1$ die affine Normalform einer Hyperbel.

8.23 Wir ermitteln für den in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$ gegebenen Kegelschnitt

$$K_s = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (*) \quad x^2 + 2\,s\,x\,y + s\,(s+1)\,y^2 + 2\,x = 0 \right\}$$

die affine Normalform und den affinen Typ über quadratischer Ergänzung; es ist

$$\begin{aligned}
(*) \quad &\iff \quad \left(x^2 + 2\,s\,x\,y + 2\,x\right) + s\,(s+1)\,y^2 = 0 \\
&\iff \quad \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot (s\,y) + 2 \cdot x \cdot 1 + (s\,y)^2 + 1^2 + 2 \cdot (s\,y) \cdot 1\right) + \\
&\qquad\qquad + s\,(s+1)\,y^2 - \left((s\,y)^2 + 1^2 + 2 \cdot (s\,y) \cdot 1\right) = 0 \\
&\iff \quad (x + s\,y + 1)^2 + \left(s\,y^2 - 2\,s\,y - 1\right) = 0 \\
&\iff \quad (x + s\,y + 1)^2 + s\left(y^2 - 2\,y\right) = 1 \\
&\iff \quad (x + s\,y + 1)^2 + s\,(y-1)^2 = 1 + s,
\end{aligned}$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $0 < s$ ist

  $$(*) \iff \left(\frac{x + s\,y + 1}{\sqrt{1+s}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{s}\,(y-1)}{\sqrt{1+s}}\right)^2 = 1;$$

  damit besitzt K_s die affine Normalform $u^2 + v^2 = 1$ einer Ellipse.
- Für $s = 0$ ist

  $$(*) \iff (x+1)^2 = 1;$$

  damit besitzt K_s die affine Normalform $u^2 = 1$ eines parallelen Geradenpaars.
- Für $-1 < s < 0$ ist

  $$(*) \iff \left(\frac{x + s\,y + 1}{\sqrt{1+s}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{-s}\,(y-1)}{\sqrt{1+s}}\right)^2 = 1;$$

  damit besitzt K_s die affine Normalform $u^2 - v^2 = 1$ einer Hyperbel.
- Für $s = -1$ ist

  $$(*) \iff (x - y + 1)^2 - (y-1)^2 = 0;$$

  damit besitzt K_s die affine Normalform $u^2 - v^2 = 0$ eines sich schneidenden Geradenpaars.
- Für $s < -1$ ist

  $$(*) \iff -\left(\frac{x + s\,y + 1}{\sqrt{-(1+s)}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-s}\,(y-1)}{\sqrt{-(1+s)}}\right)^2 = 1;$$

  damit besitzt K_s die affine Normalform $-u^2 + v^2 = 1$ einer Hyperbel.

8.24 In Abhängigkeit vom Parameter $r \in \mathbb{R}$ ist der Kegelschnitt

$$K_r \quad : \quad (1+r)\,x^2 + r\,y^2 - 2\,r\,x\,y + y - x = 0 \qquad (*)$$

zu betrachten und seine affine Normalform zu bestimmen; dabei ist der Koeffizient von x^2 wie von y^2 nicht parameterfrei. Im Sonderfall $r = 0$ ergibt sich zunächst

$$K_0 \quad : \quad x^2 + y - x = 0 \qquad (*)$$

mit

$$(*) \iff \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4} - y\right) = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} - y\right) = 0,$$

so daß sich mit der affinen Variablentransformation $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} - y \end{pmatrix}$ die affine Normalform $u^2 - v = 0$ einer Parabel ergibt. Für $r \neq 0$ ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
(*) \quad \iff \quad & r\left(y^2 - 2\,x\,y + \frac{1}{r}\,y\right) + \big((1+r)x^2 - x\big) = 0 \\
\iff \quad & r\Bigg(y^2 + 2 \cdot y \cdot (-x) + 2 \cdot y \cdot \frac{1}{2\,r} + \\
& \quad + (-x)^2 + \left(\frac{1}{2\,r}\right)^2 + 2 \cdot (-x) \cdot \frac{1}{2\,r}\Bigg) + \big((1+r)\,x^2 - x\big) - \\
& \quad - r\left((-x)^2 + \left(\frac{1}{2\,r}\right)^2 + 2 \cdot (-x) \cdot \frac{1}{2\,r}\right) = 0 \\
\iff \quad & r\left(y + (-x) + \frac{1}{2\,r}\right)^2 + \big((1+r)\,x^2 - x\big) - \left(r\,x^2 + \frac{1}{4\,r} - x\right) = 0 \\
\iff \quad & r\left(y - x + \frac{1}{2\,r}\right)^2 + x^2 = \frac{1}{4\,r} \\
\iff \quad & 4\,r^2\left(y - x + \frac{1}{2\,r}\right)^2 + 4\,r\,x^2 = 1,
\end{aligned}$$

so daß sich zum einen für $r > 0$ mit der affinen Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,r\left(y - x + \frac{1}{2\,r}\right) \\ 2\,\sqrt{r}\,x \end{pmatrix}$$

die affine Normalform $u^2 + v^2 = 1$ einer Ellipse und zum anderen für $r < 0$ mit der affinen Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,r\left(y - x + \frac{1}{2\,r}\right) \\ 2\,\sqrt{-r}\,x \end{pmatrix}$$

die affine Normalform $u^2 - v^2 = 1$ einer Hyperbel ergibt.

8.25 a) In Abhängigkeit vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ ist die ebene Quadrik

$$Q_s \quad : \quad s\,x^2 + 2(s+1)\,x\,y + y = 0 \qquad (*)$$

zu betrachten und ihr affiner Typ zu bestimmen. Wir behandeln zunächst zwei Sonderfälle:

- Für $s = 0$ verschwindet das reinquadratische Glied in x^2, und es ist
$$Q_0 \quad : \quad 2\,x\,y + y = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad (2\,x + 1) \cdot y = 0;$$
damit ist Q_0 das sich schneidende Geradenpaar $x = -\frac{1}{2}$ und $y = 0$.
- Für $s = -1$ verschwindet das gemischtquadratische Glied in $x\,y$, und es ist
$$Q_{-1} \quad : \quad -x^2 + y = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad y = x^2;$$
damit ist Q_{-1} die Normalparabel.

Für $s \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}(*) \quad &\underset{s \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad s^2\,x^2 + 2\,s\,(s+1)\,x\,y + s\,y = 0\\ &\Longleftrightarrow \quad (s\,x)^2 + 2 \cdot s\,x \cdot (s+1)\,y + 2 \cdot \frac{s}{2(s+1)} \cdot (s+1)\,y = 0;\end{aligned}$$

zur besseren Übersicht setzen wir abkürzend $t = \frac{s}{2(s+1)}$ mit $t \neq 0$ und erhalten über die (wegen $s \neq 0$ und $s + 1 \neq 0$ zulässige) affine Variablentransformation
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\,x \\ (s+1)\,y \end{pmatrix}$$
zunächst
$$(*) \quad \Longleftrightarrow \quad u^2 + 2\,u\,v + 2\,t\,v = 0.$$
Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich nun

$$\begin{aligned}(*) \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(u^2 + 2\,u\,v + v^2\right) - v^2 + 2\,t\,v = 0\\ &\Longleftrightarrow \quad (u+v)^2 - \left(v^2 - 2\,t\,v + t^2\right) + t^2 = 0\\ &\Longleftrightarrow \quad (u+v)^2 - (v-t)^2 = -t^2\\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{(u+v)^2}{-t^2} - \frac{(v-t)^2}{-t^2} = 1\\ &\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{v-t}{t}\right)^2 - \left(\frac{u+v}{t}\right)^2 = 1,\end{aligned}$$

wodurch wir über die erneute affine Variablentransformation
$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{t} \cdot \begin{pmatrix} v - t \\ u + v \end{pmatrix}$$
die affine Normalform $w^2 - z^2 = 1$ einer Hyperbel ergibt.

b) Gemäß a) ist Q_1 eine Hyperbel, und mit den Bezeichnungen von a) ergibt sich für $s = 1$ dann $t = \frac{1}{4}$. Für den Mittelpunkt der Hyperbel Q_1 erhält man über die affine Normalform $w^2 - z^2 = 1$ zunächst
$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad \begin{pmatrix} v - t \\ u + v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
und damit
$$v = t = \frac{1}{4} \qquad \text{und} \qquad u = -v = -\frac{1}{4},$$

woraus sich dann

$$x = \frac{1}{s} \cdot u = -\frac{1}{4} \qquad \text{und} \qquad y = \frac{1}{s+1} \cdot v = \frac{1}{8}$$

ergibt. Da nun die Hyperbel Q_1 punktsymmetrisch bezüglich ihres Mittelpunkts $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$ ist, bleibt sie unter der Drehung φ mit dem Drehzentrum $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$ und dem Drehwinkel π invariant, es ist also $\varphi(Q_1) = Q_1$.

8.26 a) Wir ermitteln für die in Abhängigkeit von $s, t \in \mathbb{R}$ gegebene Quadrik

$$Q_{s,t} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (*) \quad s\,x^2 + 2\,t\,x\,y + y^2 - y = 0\right\}$$

die affine Normalform und den Typ über quadratische Ergänzung; es ist

$$\begin{aligned}
(*) \quad \Longleftrightarrow \quad & \left(y^2 + 2\,t\,x\,y - y\right) + s\,x^2 = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \Bigg(y^2 + 2 \cdot y \cdot (t\,x) + 2 \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \\
& \quad +(t\,x)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot (t\,x) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\Bigg) + \\
& \quad +s\,x^2 - \left((t\,x)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot (t\,x) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \left(y + t\,x - \frac{1}{2}\right)^2 + (s - t^2)\,x^2 + t\,x - \frac{1}{4} = 0,
\end{aligned}$$

und im Falle $d = s - t^2 \neq 0$ gilt ferner

$$\begin{aligned}
(*) \quad \Longleftrightarrow \quad & \left(y + t\,x - \frac{1}{2}\right)^2 + d\left(x^2 + \frac{t}{d}\,x + \left(\frac{t}{2d}\right)^2\right) = \frac{1}{4} + d\left(\frac{t}{2d}\right)^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \left(y + t\,x - \frac{1}{2}\right)^2 + d\left(x + \frac{t}{2d}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{t^2}{4d} = \frac{d + t^2}{4d} = \frac{s}{4d},
\end{aligned}$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $d > 0$, also $s > t^2$ und damit $s > 0$, ist

$$(*) \iff \left(\frac{2\sqrt{d}\left(y + t\,x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{s}}\right)^2 + \left(\frac{2d\left(x + \frac{t}{2d}\right)}{\sqrt{s}}\right)^2 = 1;$$

  damit besitzt $Q_{s,t}$ die affine Normalform $u^2 + v^2 = 1$ einer Ellipse.
- Für $d = 0$, also $s = t^2$, ist

$$(*) \iff \left(y + t\,x - \frac{1}{2}\right)^2 + t\,x - \frac{1}{4} = 0,$$

  und folglich ergibt sich ferner:
  - für $t \neq 0$ ist

$$(*) \iff \left(y + t\,x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} - t\,x\right) = 0;$$

    damit besitzt $Q_{s,t}$ die affine Normalform $u^2 - v = 0$ einer Parabel.

- für $t = 0$ ist

$$(*) \iff \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \iff (2\,y-1)^2 = 1;$$

damit besitzt $Q_{s,t}$ die affine Normalform $u^2 = 1$ eines parallelen Geradenpaars.

- Für $d < 0$, also $s < t^2$, ergibt sich hinsichtlich des Vorzeichens von s:
  - für $s < 0$ ist

$$(*) \iff \left(\frac{2\sqrt{-d}\,\left(y + t\,x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{-s}}\right)^2 - \left(\frac{2d\,\left(x + \frac{t}{2d}\right)}{\sqrt{-s}}\right)^2 = 1;$$

damit besitzt $Q_{s,t}$ die affine Normalform $u^2 - v^2 = 1$ einer Hyperbel.

  - für $s = 0$ ist

$$(*) \iff \left(y + t\,x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{-d}\left(x + \frac{t}{2d}\right)\right)^2 = 0;$$

damit besitzt $Q_{s,t}$ die affine Normalform $u^2 - v^2 = 0$ eines sich schneidenden Geradenpaars.

  - für $s > 0$ ist

$$(*) \iff -\left(\frac{2\sqrt{-d}\,\left(y + t\,x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{s}}\right)^2 + \left(\frac{2d\,\left(x + \frac{t}{2d}\right)}{\sqrt{s}}\right)^2 = 1;$$

damit besitzt $Q_{s,t}$ die affine Normalform $-u^2 + v^2 = 1$ einer Hyperbel.

b) Die Quadrik $Q_{s,t}$ besitzt gemäß der Fallunterscheidung von a)

- im Falle $d \neq 0$ (Ellipse sowie Hyperbel oder sich schneidendes Geradenpaar) einen eindeutigen Mittelpunkt,
- im Falle $d = 0$ entweder keinen Mittelpunkt (Parabel) oder unendlich viele Mittelpunkte (paralleles Geradenpaar);

damit gilt:

$$\begin{aligned} M &= \left\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid Q_{s,t} \text{ hat keinen eindeutigen Mittelpunkt}\right\} \\ &= \left\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid d = 0\right\} \underset{d=s-t^2}{=} \left\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s = t^2\right\}. \end{aligned}$$

Folglich ist M eine Parabel.

c) Für alle $(s,t) = \mathbb{R}^2 \setminus M$ gilt $d \neq 0$ gemäß b), und die Quadrik $Q_{s,t}$ besitzt einen eindeutigen Mittelpunkt $m_{s,t}$; gemäß der Rechnung von a) gilt für diesen $u = 0$ und $v = 0$, wegen

$$u = 0 \iff y + t\,x - \frac{1}{2} = 0 \iff y = -t\,x + \frac{1}{2}$$

und

$$v = 0 \iff x + \frac{t}{2d} = 0 \iff x = -\frac{t}{2d} = \frac{-t}{2\,(s-t^2)},$$

also

$$y = -t\,x + \frac{1}{2} = -t \cdot \frac{-t}{2\,(s-t^2)} + \frac{1}{2} = \frac{t^2 + (s-t^2)}{2\,(s-t^2)} = \frac{s}{2\,(s-t^2)}.$$

Es ergibt sich also der Mittelpunkt

$$m_{s,t} = \left(\frac{-t}{2\,(s-t^2)},\ \frac{s}{2\,(s-t^2)} \right).$$

8.27 Die ebene Quadrik

$$Q_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2\,x\,y + 3\,y^2 = 1 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{mit} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Wegen

$$\det(A_1 - \lambda\,E_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 4\,\lambda + 2$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A_1 die beiden Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 2}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2} > 0;$$

damit gibt es eine orthogonale Matrix $P_1 \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ mit

$$P_1^\top A_1 P_1 = D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

wobei in den Spalten von P_1 normierte Eigenvektoren der Matrix A_1 zu den beiden Eigenwerten λ_1 und λ_2 stehen. Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_1 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$ führt nun die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot P_1^\top A_1 P_1 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot D_1 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1,$$

also

$$\lambda_1\,w^2 + \lambda_2\,z^2 = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2} = 1$$

über; letztere stellt die euklidische (metrische) Normalform dar. Damit ist Q_1 eine Ellipse mit den Hauptachsenabschnitten

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Die ebene Quadrik

$$Q_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4\,x\,y + 6\,y^2 = 1 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{mit} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Wegen

$$\det(A_2 - \mu\,E_2) = \begin{vmatrix} 1-\mu & 2 \\ 2 & 6-\mu \end{vmatrix} = (1-\mu)(6-\mu) - 4 = \mu^2 - 7\,\mu + 2$$

für alle $\mu \in \mathbb{R}$ besitzt A_2 die beiden Eigenwerte

$$\mu_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4\cdot 2}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{2} > 0;$$

damit gibt es eine orthogonale Matrix $P_2 \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ mit

$$P_2^\top A_2 P_2 = D_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix},$$

wobei in den Spalten von P_2 normierte Eigenvektoren der Matrix A_2 zu den beiden Eigenwerten μ_1 und μ_2 stehen. Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_2 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$ führt nun die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot P_2^\top A_2 P_2 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot D_2 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1,$$

also

$$\mu_1\,w^2 + \mu_2\,z^2 = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_1}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_2}}\right)^2} = 1$$

über; letztere stellt die euklidische (metrische) Normalform dar. Damit ist Q_2 eine Ellipse mit den Hauptachsenabschnitten

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7-\sqrt{41}}} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7+\sqrt{41}}}.$$

Insgesamt erhält man also das folgende Ergebnis:

- Die ebenen Quadriken Q_1 und Q_2 sind zwei Ellipsen und damit jeweils zum Einheitskreis und folglich auch zueinander affin äquivalent.
- Die beiden Ellipsen Q_1 und Q_2 sind aber nur dann auch euklidisch (metrisch) äquivalent, wenn sie dieselben Hauptachsenlängen besitzen; dies ist hier genau dann der Fall, wenn die beiden kleineren Eigenwerte λ_1 und μ_1 und die beiden größeren Eigenwerte λ_2 und μ_2 der beiden Matrizen A_1 und A_2 übereinstimmen. Wegen $\lambda_1 \neq \mu_1$ und $\lambda_2 \neq \mu_2$ sind nun Q_1 und Q_2 nicht metrisch äquivalent.

8.28 a) Die ebene Quadrik

$$Q_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4\,x\,y + 6\,y^2 = 1 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{mit} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Wegen

$$\det(A_1 - \lambda\, E_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\,\lambda + 2$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A_1 die beiden Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4\cdot 2}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{2} > 0;$$

damit gibt es eine orthogonale Matrix $P_1 \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ mit

$$P_1^\top A_1 P_1 = D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

wobei in den Spalten von P_1 normierte Eigenvektoren der Matrix A_1 zu den beiden Eigenwerten λ_1 und λ_2 stehen. Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_1 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$ führt nun die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot P_1^\top A_1 P_1 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot D_1 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1,$$

also

$$\lambda_1\, w^2 + \lambda_2\, z^2 = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2} = 1$$

über; letztere stellt die euklidische (metrische) Normalform dar. Damit ist Q_1 eine Ellipse mit den Hauptachsenabschnitten

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7-\sqrt{41}}} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7+\sqrt{41}}}.$$

Die ebene Quadrik

$$Q_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 6\,x\,y + 12\,y^2 = 1 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{mit} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Wegen

$$\det(A_2 - \mu\,E_2) = \begin{vmatrix} 1-\mu & 3 \\ 3 & 12-\mu \end{vmatrix} = (1-\mu)(12-\mu) - 9 = \mu^2 - 13\,\mu + 3$$

für alle $\mu \in \mathbb{R}$ besitzt A_2 die beiden Eigenwerte

$$\mu_{1,2} = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4\cdot 3}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{157}}{2} > 0;$$

damit gibt es eine orthogonale Matrix $P_2 \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ mit

$$P_2^\top A_2 P_2 = D_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix},$$

wobei in den Spalten von P_2 normierte Eigenvektoren der Matrix A_2 zu den beiden Eigenwerten μ_1 und μ_2 stehen. Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_2 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$ führt nun die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot P_2^\top A_2 P_2 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot D_2 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1,$$

also

$$\mu_1\,w^2 + \mu_2\,z^2 = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_1}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_2}}\right)^2} = 1$$

über; letztere stellt die euklidische (metrische) Normalform dar. Damit ist Q_2 eine Ellipse mit den Hauptachsenabschnitten

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13-\sqrt{157}}} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13+\sqrt{157}}}.$$

Insgesamt erhält man also das folgende Ergebnis:

- Die ebenen Quadriken Q_1 und Q_2 sind zwei Ellipsen und damit jeweils zum Einheitskreis und folglich auch zueinander affin äquivalent.
- Die beiden Ellipsen Q_1 und Q_2 sind aber nur dann auch euklidisch (metrisch) äquivalent, wenn sie dieselben Hauptachsenlängen besitzen; dies ist hier genau dann der Fall, wenn die beiden kleineren Eigenwerte λ_1 und μ_1 und die beiden größeren Eigenwerte λ_2 und μ_2 der beiden Matrizen A_1 und A_2 übereinstimmen. Wegen $\lambda_1 \neq \mu_1$ und $\lambda_2 \neq \mu_2$ sind nun Q_1 und Q_2 nicht metrisch äquivalent.

b) Wir bestimmen die affinen Normalformen der beiden Quadriken Q_1 und Q_2 mit Hilfe geeigneter quadratischer Ergänzungen: Wegen

$$x^2+4xy+6y^2 = 1 \iff (x+2y)^2+2y^2 = 1 \iff (x+2y)^2+(\sqrt{2}y)^2 = 1$$

erhält man mit der Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2\,y \\ \sqrt{2}\,y \end{pmatrix} = T_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

die affine Normalform $w^2 + z^2 = 1$ der Ellipse Q_1; damit bildet aber die Affinität

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

die Ellipse Q_1 auf den Einheitskreis K ab. Wegen

$$x^2+6xy+12y^2 = 1 \iff (x+3y)^2+3y^2 = 1 \iff (x+3y)^2+(\sqrt{3}y)^2 = 1$$

erhält man mit der Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3\,y \\ \sqrt{3}\,y \end{pmatrix} = T_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

die affine Normalform $w^2 + z^2 = 1$ der Ellipse Q_2; damit bildet aber die Affinität

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

die Ellipse Q_2 auf den Einheitskreis K ab. Insgesamt ist dann die Hintereinanderausführung

$$f = f_2^{-1} \circ f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_2^{-1} \cdot T_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

eine Affinität die die Ellipse Q_1 auf die Ellipse Q_2 abbildet; dabei ist

$$T_2^{-1} \cdot T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 - \sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}.$$

8.29 Die ebene Quadrik

$$Q_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 5x^2 + 4xy + 2y^2 - 1 = 0 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{mit} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Wegen

$$\det(A_1 - \lambda\, E_2) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 =$$
$$= \left(\lambda^2 - 7\lambda + 10\right) - 4 = \lambda^2 - 7\,\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A_1 die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 6$; wegen

$$A_1 - \lambda_1 E_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A_1 zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, und wegen

$$A_1 - \lambda_2 E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A_1 zum Eigenwert $\lambda_2 = 6$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P_1 = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_1}{\|v_1\|} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D_1 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

ergibt sich $P_1^\top A_1 P_1 = D_1$, so daß die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_1 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$ die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot P_1^\top A_1 P_1 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot D_1 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1,$$

also

$$1 \cdot w^2 + 6 \cdot z^2 = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{1^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = 1$$

überführt; letztere stellt die euklidische (metrische) Normalform einer Ellipse mit den Hauptachsenabschnitten 1 und $\frac{1}{\sqrt{6}}$ dar. Die ebene Quadrik

$$Q_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + 6xy + 11y^2 - 2 = 0 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \qquad \text{mit} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \det(A_2 - \mu\, E_2) &= \begin{vmatrix} 3-\mu & 3 \\ 3 & 11-\mu \end{vmatrix} = (3-\mu)(11-\mu) - 9 = \\ &= \left(\mu^2 - 14\mu + 33\right) - 9 = \mu^2 - 14\,\mu + 24 = (\mu - 2)\,(\mu - 12) \end{aligned}$$

für alle $\mu \in \mathbb{R}$ besitzt A_2 die beiden Eigenwerte $\mu_1 = 2$ und $\mu_2 = 12$; wegen

$$A_2 - \mu_1 E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad w_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A_2 zum Eigenwert $\mu_1 = 2$, und wegen

$$A_2 - \mu_2 E_2 = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A_2 zum Eigenwert $\mu_2 = 12$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P_2 = \left(\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_1}{\|w_1\|} \right) = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D_2 = \operatorname{diag}\left(\mu_1, \mu_2\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

ergibt sich $P_2^\top A_2 P_2 = D_2$, so daß die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_2 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$ die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot P_2^\top A_2 P_2 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 2 \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot D_2 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 2,$$

also

$$2 \cdot w^2 + 12 \cdot z^2 = 2 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{1^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = 1$$

überführt; letztere stellt die euklidische (metrische) Normalform einer Ellipse mit den Hauptachsenabschnitten 1 und $\frac{1}{\sqrt{6}}$ dar.

Da nun die beiden Quadriken Q_1 und Q_2 dieselbe euklidische (metrische) Normalform

$$E \quad : \quad \frac{w^2}{1^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = 1$$

besitzen, sind sie euklidisch (metrisch) äquivalent; dabei wird die Ellipse E in euklidischer (metrischer) Normalform nach obiger Rechnung durch die orthogonale Abbildung

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_1 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$$

auf die Ellipse Q_1 sowie durch die orthogonale Abbildung

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_2 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$$

auf die Ellipse Q_2 abgebildet; folglich bildet aber die orthogonale Abbildung

$$f = f_2 \circ f_1^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_2 \cdot P_1^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} P_2 \cdot P_1^{-1} = P_2 \cdot P_1^{\top} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} &= \\ = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die Ellipse Q_1 auf die Ellipse Q_2 ab.

8.30 a) Wir bestimmen die affinen Normalformen der beiden Kegelschnitte

$$\begin{aligned} Q_1 \ &: \ (*) \quad 2\,x^2 + 4\,x\,y + 3\,y^2 + 2\,y = 1 \\ Q_2 \ &: \ (\star) \quad 3\,x^2 - 2\,\alpha\,x\,y + \alpha\,y^2 = 1 \end{aligned}$$

mit Hilfe geeigneter quadratischer Ergänzungen:

- Für den Kegelschnitt Q_1 erhält man wegen

$$\begin{aligned} (*) \quad &\iff \quad 2\left(x^2 + 2\,x\,y + y^2\right) + \left(y^2 + 2\,y\right) = 1 \\ &\iff \quad 2\,(x+y)^2 + \left(y^2 + 2\,y + 1\right) = 1 + 1 \\ &\iff \quad 2\,(x+y)^2 + (y+1)^2 = 2 \\ &\iff \quad (x+y)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,(y+1)\right)^2 = 1 \end{aligned}$$

  mit der Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,(y+1) \end{pmatrix}$$

  die affine Normalform $w^2 + z^2 = 1$ einer Ellipse.

- Für den Kegelschnitt Q_2 erhält man wegen

$$\begin{aligned} (\star) \quad &\iff \quad 3\left(x^2 - 2\,x\left(\frac{\alpha}{3}\,y\right) + \left(\frac{\alpha}{3}\,y\right)^2\right) + \alpha\,y^2 - 3\left(\frac{\alpha}{3}\,y\right)^2 = 1 \\ &\iff \quad 3\left(x - \frac{\alpha}{3}\,y\right)^2 + \frac{3\,\alpha - \alpha^2}{3}\,y^2 = 1 \end{aligned}$$

– im Falle $3\,\alpha - \alpha^2 > 0$ mit der Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\left(x - \frac{\alpha}{3}\,y\right) \\ \sqrt{\frac{3\,\alpha - \alpha^2}{3}}\;y \end{pmatrix}$$

die affine Normalform $w^2 + z^2 = 1$ einer Ellipse,

– im Falle $3\,\alpha - \alpha^2 = 0$ mit der Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\left(x - \frac{\alpha}{3}\,y\right) \\ y \end{pmatrix}$$

die affine Normalform $w^2 = 1$ eines parallelen Geradenpaares und

– im Falle $3\,\alpha - \alpha^2 < 0$ mit der Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\left(x - \frac{\alpha}{3}\,y\right) \\ \sqrt{\frac{\alpha^2 - 3\,\alpha}{3}}\;y \end{pmatrix}$$

die affine Normalform $w^2 - z^2 = 1$ einer Hyperbel.

Damit sind die beiden Kegelschnitte Q_1 und Q_2 genau dann affin äquivalent, wenn mit Q_1 auch Q_2 eine Ellipse ist; dies ist genau dann der Fall, wenn $3\,\alpha - \alpha^2 > 0$ gilt, also für $\alpha \in\,]0;3[$.

b) Für den Fall $\alpha = 1$ sind die beiden Kegelschnitte Q_1 und Q_2 Ellipsen und damit zum Einheitskreis $K : w^2 + z^2 = 1$ affin äquivalent; gemäß den in a) ermittelten Variablentransformationen bildet die Affinität $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,(y+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

bzw. $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\left(x - \frac{1}{3}\,y\right) \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

die Ellipse Q_1 bzw. Q_2 auf den Einheitskreis K ab. Insgesamt ist damit aber $f_2^{-1} \circ f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned} \left(f_2^{-1} \circ f_1\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine Affinität, die die Ellipse Q_1 (über den Einheitskreis K) auf die Ellipse Q_2 abbildet.

8.31 a) Die gegebene Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 5\,x^2 + 2\,x\,y + 5\,y^2 - 2\sqrt{2}\,x + 14\sqrt{2}\,y + 10 = 0 \right\}.$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 14\sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = 10 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\det(A - \lambda\,E_2) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 1^2 = (4-\lambda)(6-\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 6$; wegen

$$A - \lambda_1\,E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 4$, und wegen

$$A - \lambda_2\,E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 6$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top A P = D$. Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ führt nun die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot P^\top A P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^\top P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 14\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 10 = 0,$$

und damit
$$4\,u^2 + 6\,v^2 + 16\,u + 12\,v = -10$$
über. Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich ferner
$$4\left(u^2 + 4\,u + 4\right) + 6\left(v^2 + 2\,v + 1\right) = -10 + 4\cdot 4 + 6\cdot 1$$
und damit
$$4\,(u+2)^2 + 6\,(v+1)^2 = 12,$$
so daß sich mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+2 \\ v+1 \end{pmatrix}$ die Gleichung
$$\frac{w^2}{3} + \frac{z^2}{2} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{\sqrt{3}^{\,2}} + \frac{z^2}{\sqrt{2}^{\,2}} = 1$$
ergibt; wir erhalten damit in
$$Q' = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \mid \frac{w^2}{\sqrt{3}^{\,2}} + \frac{z^2}{\sqrt{2}^{\,2}} = 1 \right\}$$
die euklidische (metrische) Normalform einer Ellipse.

b) Gemäß a) ergibt sich
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\cdot\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P\cdot\begin{pmatrix} w-2 \\ z-1 \end{pmatrix} =$$
$$= P\cdot\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = P\cdot\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix};$$
damit ist
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\cdot\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + t,$$
mit
$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \qquad \text{und} \qquad t = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$
eine Bewegung, die die Ellipse Q' auf die Ellipse Q abbildet.

8.32 Der gegebene Kegelschnitt
$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3\,x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 + 3\,x_2^2 + 6\,x_1 - 2\,x_2 + 1 = 0 \right\}$$
besitzt die Gleichung
$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\cdot A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b^\top\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + c = 0$$
mit
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{und} \qquad c = 1 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - (-1)^2 = (2-\lambda)(4-\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 4$; wegen

$$A - \lambda_1\, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$, und wegen

$$A - \lambda_2\, E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top A P = D$. Mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ergibt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} P^\top A P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + b^\top P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + 1 = 0,$$

und damit

$$2\, y_1^2 + 4\, y_2^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}\, y_1 - \frac{8}{\sqrt{2}}\, y_2 + 1 = 0.$$

Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich

$$2 \left(y_1^2 + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot y_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) + 4 \left(y_2^2 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot y_2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) = \\ = -1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2,$$

also

$$2 \left(y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 4 \left(y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 2,$$

so daß sich mit der erneuten Variablentransformation $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ dann

$$2\,z_1^2 + 4\,z_2^2 = 2, \qquad \text{also} \qquad \frac{z_1^2}{1^2} + \frac{z_2^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1,$$

die euklidische (metrische) Normalform einer Ellipse mit den Hauptachsenabschnitten 1 und $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ergibt. Damit sind Q und der in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ gegebene Kegelschnitt

$$Q_t = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (*) \quad x_1^2 + t\,x_2^2 - 2\,t\,x_2 + t - 1 = 0 \right\}$$

genau dann kongruent, wenn auch Q_t eine Ellipse mit den Hauptachsenabschnitten 1 und $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist; wegen

$$(*) \iff x_1^2 + t\left(x_2^2 - 2\,x_2 + 1\right) = 1 \iff x_1^2 + t\,(x_2 - 1)^2 = 1,$$

mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}$ also

$$(*) \iff z_1^2 + t\,z_2^2 = 1,$$

ist dies genau für $t = 2$ der Fall.

8.33 a) Die Schnittpunkte von Q_1 und Q_2 sind genau diejenigen Punkte $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, deren Koordinaten sowohl der Ellipsengleichung

$$Q_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 1} = 1$$

als auch der Hyperbelgleichung

$$Q_2 : \frac{x^2}{1 - b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

genügen; wir haben also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{(I)} & \dfrac{1}{a^2} & \cdot & x^2 & + & \dfrac{1}{a^2 - 1} & \cdot & y^2 & = & 1 \\ \text{(II)} & \dfrac{1}{1 - b^2} & \cdot & x^2 & - & \dfrac{1}{b^2} & \cdot & y^2 & = & 1 \end{array}$$

in den Unbestimmten x^2 und y^2 zu lösen. Mit Hilfe des Additionsverfahrens ergibt sich über „$(a^2 - 1) \cdot \text{(I)} + b^2 \cdot \text{(II)}$“

$$\left(\frac{a^2 - 1}{a^2} + \frac{b^2}{1 - b^2} \right) \cdot x^2 = \left(a^2 - 1\right) + b^2,$$

wegen

$$\frac{a^2 - 1}{a^2} + \frac{b^2}{1 - b^2} = \frac{(a^2 - 1) \cdot (1 - b^2) + a^2 \cdot b^2}{a^2 \cdot (1 - b^2)} = \frac{a^2 - 1 + b^2}{a^2 \cdot (1 - b^2)}$$

also

$$x^2 = \frac{a^2 \cdot (1-b^2)}{a^2-1+b^2} \cdot \left(a^2-1+b^2\right) = a^2 \cdot \left(1-b^2\right),$$

und damit über Gleichung (I)

$$\frac{1}{a^2} \cdot a^2 \cdot \left(1-b^2\right) + \frac{1}{a^2-1} \cdot y^2 = 1,$$

also

$$\frac{1}{a^2-1} \cdot y^2 = b^2 \qquad \text{bzw.} \qquad y^2 = b^2 \cdot \left(a^2-1\right).$$

Damit ist

$$x = \pm a\sqrt{1-b^2} \qquad \text{und} \qquad y = \pm b\sqrt{a^2-1},$$

weswegen die Ellipse Q_1 und die Hyperbel Q_2 die vier Schnittpunkte

$$\left(a\sqrt{1-b^2},\, b\sqrt{a^2-1}\right) \qquad \left(a\sqrt{1-b^2},\, -b\sqrt{a^2-1}\right)$$

$$\left(-a\sqrt{1-b^2},\, b\sqrt{a^2-1}\right) \qquad \left(-a\sqrt{1-b^2},\, -b\sqrt{a^2-1}\right)$$

besitzen.

b) Wir betrachten nun den im 1. Quadranten liegenden Schnittpunkt

$$S = \left(a\sqrt{1-b^2},\, b\sqrt{a^2-1}\right) \in Q_1 \cap Q_2.$$

Die Tangente $T_S Q_1$ an die Ellipse Q_1 im Punkt S besitzt die Gleichung

$$\frac{a\sqrt{1-b^2} \cdot x}{a^2} + \frac{b\sqrt{a^2-1} \cdot y}{a^2-1} = 1,$$

es ist also

$$T_S Q_1 \quad : \quad \frac{\sqrt{1-b^2}}{a} \cdot x + \frac{b}{\sqrt{a^2-1}} \cdot y = 1,$$

und die Tangente $T_S Q_2$ an die Hyperbel Q_2 im Punkt S besitzt die Gleichung

$$\frac{a\sqrt{1-b^2} \cdot x}{1-b^2} - \frac{b\sqrt{a^2-1} \cdot y}{b^2} = 1,$$

es ist also

$$T_S Q_2 \quad : \quad \frac{a}{\sqrt{1-b^2}} \cdot x - \frac{\sqrt{a^2-1}}{b} \cdot y = 1.$$

Damit sind aber

$$\widetilde{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1-b^2}}{a} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2-1}} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \widetilde{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{1-b^2}} \\ -\frac{\sqrt{a^2-1}}{b} \end{pmatrix}$$

Normalenvektoren der Tangenten $T_S Q_1$ und $T_S Q_2$; wegen

$$\widetilde{u}_1 \circ \widetilde{u}_2 = \frac{\sqrt{1-b^2}}{a} \cdot \frac{a}{\sqrt{1-b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2-1}} \cdot \left(-\frac{\sqrt{a^2-1}}{b}\right) = 0$$

schneiden sich die Tangenten $T_S Q_1$ und $T_S Q_2$ unter einem rechten Winkel.

8.34 a) Die beiden Asymptoten

$$g_1 \; : \; y = \frac{b}{a} \cdot x \qquad \text{und} \qquad g_2 \; : \; y = -\frac{b}{a} \cdot x$$

besitzen die Gleichungen

$$g_1 \; : \; b\,x - a\,y = 0 \qquad \text{und} \qquad g_2 \; : \; b\,x + a\,y = 0,$$

also die Normalenvektoren

$$\widetilde{u}_{1,2} = \begin{pmatrix} b \\ \pm a \end{pmatrix} \qquad \text{der Länge} \qquad \|\widetilde{u}_{1,2}\| = \sqrt{b^2 + (\pm a)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

und damit die Hessesche Normalformen

$$g_1 \; : \; \frac{b\,x - a\,y}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0 \qquad \text{und} \qquad g_2 \; : \; \frac{b\,x + a\,y}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0.$$

Folglich besitzt der Punkt $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ zu den beiden Asymptoten g_1 und g_2 die Abstände

$$d(P, g_1) = \left| \frac{b\,x_0 - a\,y_0}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| \qquad \text{und} \qquad d(P, g_2) = \left| \frac{b\,x_0 + a\,y_0}{\sqrt{a^2+b^2}} \right|.$$

b) Für einen Punkt $P = (x_0, y_0)$ auf der Hyperbel gilt

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

und damit

$$\begin{aligned}
d(P, g_1) \cdot d(P, g_2) &= \left| \frac{b\,x_0 - a\,y_0}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| \cdot \left| \frac{b\,x_0 + a\,y_0}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| = \\
&= \left| \frac{b\,x_0 - a\,y_0}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{b\,x_0 + a\,y_0}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| = \\
&= \left| \frac{(b\,x_0 - a\,y_0) \cdot (b\,x_0 + a\,y_0)}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2} \right| = \\
&= \left| \frac{b^2\,x_0^2 - a^2\,y_0^2}{a^2+b^2} \right| = \left| \frac{a^2\,b^2\,\left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}\right)}{a^2+b^2} \right| = \\
&= \frac{a^2\,b^2}{a^2+b^2} \cdot \left| \underbrace{\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}}_{=1} \right| = \frac{a^2\,b^2}{a^2+b^2}.
\end{aligned}$$

8.35 Für den Abstand $d(P, R)$ des Punktes $P = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vom Punkt $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt

$$d(P, R) = \|P - R\| = \left\| \begin{pmatrix} p-1 \\ q-1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(p-1)^2 + (q-1)^2}.$$

Ferner besitzt die Gerade ℓ mit der Gleichung $x + y = 0$ den Normalenvektor

$$\widetilde{u}_\ell = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{der Länge} \qquad \|\widetilde{u}_\ell\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

und damit die Hessesche Normalform

$$\ell \quad : \quad \frac{x+y}{\sqrt{2}} = 0;$$

für den Abstand $d(P, \ell)$ des Punktes P von der Geraden ℓ gilt demnach

$$d(P, \ell) = \left| \frac{p+q}{\sqrt{2}} \right|.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} d(P, R) = 2 \cdot d(P, \ell) \quad &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{(p-1)^2 + (q-1)^2} = 2 \cdot \left| \frac{p+q}{\sqrt{2}} \right| \\ &\Longleftrightarrow \quad (p-1)^2 + (q-1)^2 = 4 \cdot \left(\frac{p+q}{\sqrt{2}} \right)^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad p^2 - 2p + 1 + q^2 - 2q + 1 = 2p^2 + 4pq + 2q^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad p^2 + 4pq + q^2 + 2p + 2q = 2. \end{aligned}$$

Folglich ist die Menge $H \subseteq \mathbb{R}^2$ aller Punkte P, die vom Punkt R doppelt so weit entfernt sind wie von der Geraden ℓ, die Quadrik

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (*) \;\; p^2 + 4pq + q^2 + 2p + 2q = 2 \right\}.$$

Wir bestimmen den affinen Typ von H mittels quadratischer Ergänzung:

$$\begin{aligned} (*) \quad &\Longleftrightarrow \quad p^2 + 4pq + q^2 + 2p + 2q = 2 \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(p^2 + 4pq + 2p\right) + q^2 + 2q = 2 \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(p^2 + (2q)^2 + 1^2 + 2 \cdot p \cdot (2q) + 2 \cdot p \cdot 1 + 2 \cdot (2q) \cdot 1\right) \\ &\qquad\qquad - \left((2q)^2 + 1^2 + 2 \cdot (2q) \cdot 1\right) + q^2 + 2q = 2 \\ &\Longleftrightarrow \quad (p + 2q + 1)^2 - \left(4q^2 + 1 + 4q\right) + q^2 + 2q = 2 \\ &\Longleftrightarrow \quad (p + 2q + 1)^2 - 3q^2 - 2q = 3 \\ &\Longleftrightarrow \quad (p + 2q + 1)^2 - 3\left(q^2 + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot q + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) = 3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad (p + 2q + 1)^2 - 3\left(q + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{3} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{3}{8}(p + 2q + 1)^2 - \frac{9}{8}\left(q + \frac{1}{3}\right)^2 = 1. \end{aligned}$$

Mit der affinen Transformation

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{8}}\,(p + 2q + 1) \\ \frac{3}{\sqrt{8}}\left(q + \frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

ergibt sich die affine Normalform $s^2 - t^2 = 1$; damit ist $H \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Hyperbel.

8.36 Für den Abstand $d(P,R)$ des Punktes $P = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vom Punkt $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt

$$d(P,R) = \|P - R\| = \left\| \begin{pmatrix} p-1 \\ q-1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(p-1)^2 + (q-1)^2}.$$

Ferner besitzt die Gerade g mit der Gleichung $x + y = 0$ den Normalenvektor

$$\widetilde{u}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{der Länge} \qquad \|\widetilde{u}_g\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

und damit die Hessesche Normalform

$$g \quad : \quad \frac{x+y}{\sqrt{2}} = 0;$$

für den Abstand $d(P,g)$ des Punktes P von der Geraden g gilt demnach

$$d(P,g) = \left| \frac{p+q}{\sqrt{2}} \right|.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
d(P,R) = d(P,g) \quad &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{(p-1)^2 + (q-1)^2} = \left| \frac{p+q}{\sqrt{2}} \right| \\
&\Longleftrightarrow \quad (p-1)^2 + (q-1)^2 = \left(\frac{p+q}{\sqrt{2}} \right)^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad p^2 - 2p + 1 + q^2 - 2q + 1 = \frac{p^2 + 2pq + q^2}{2} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{p^2}{2} - pq + \frac{q^2}{2} - 2p - 2q + 2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad p^2 - 2pq + q^2 - 4p - 4q + 4 = 0
\end{aligned}$$

Folglich ist die Menge $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ aller Punkte P, die vom Punkt R und der Geraden g denselben Abstand haben, die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (*) \;\; p^2 - 2pq + q^2 - 4p - 4q + 4 = 0 \right\}.$$

Wir bestimmen den affinen Typ von Q mittels quadratischer Ergänzung:

$$\begin{aligned}
(*) \quad &\Longleftrightarrow \quad p^2 - 2pq + q^2 - 4p - 4q + 4 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(p^2 - 2pq - 4p\right) + q^2 - 4q + 4 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(p^2 + (-q)^2 + (-2)^2 + 2 \cdot p \cdot (-q) + 2 \cdot p \cdot (-2) + 2 \cdot (-q) \cdot (-2)\right) \\
&\qquad\qquad - \left((-q)^2 + (-2)^2 + 2 \cdot (-q) \cdot (-2)\right) + q^2 - 4q + 4 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (p - q - 2)^2 - \left(q^2 + 4 + 4q\right) + q^2 - 4q + 4 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (p - q - 2)^2 - 8q = 0
\end{aligned}$$

Mit der affinen Transformation

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - q - 2 \\ 8q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich die affine Normalform $s^2 - t = 0$ einer Parabel.

8.37 Für den Abstand $d(X,P)$ des Punktes $X = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vom Punkt $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ gilt

$$d(X,P) = \|X - P\| = \left\| \begin{pmatrix} p-3 \\ q-4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(p-3)^2 + (q-4)^2}.$$

Ferner besitzt die Gerade $L = \mathbb{R} \cdot u_L$ mit dem Richtungsvektor $u_L = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ den Normalenvektor

$$\widetilde{u}_L = u_L^\perp = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{der Länge} \qquad \|\widetilde{u}_L\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

und damit die Hessesche Normalform

$$L \quad : \quad \frac{3\,x + 4\,y}{5} = 0;$$

für den Abstand $d(X,L)$ des Punktes X von der Geraden L gilt demnach

$$d(X,L) = \left| \frac{3\,p + 4\,q}{5} \right|.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} d(X,P) = d(X,L) \quad &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{(p-3)^2 + (q-4)^2} = \left| \frac{3\,p + 4\,q}{5} \right| \\ &\Longleftrightarrow \quad (p-3)^2 + (q-4)^2 = \left(\frac{3\,p + 4\,q}{5} \right)^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad p^2 - 6p + 9 + q^2 - 8q + 16 = \frac{9p^2 + 24pq + 16q^2}{25} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{16}{25}p^2 - \frac{24}{25}pq + \frac{9}{25}q^2 - 6p - 8q + 25 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 16p^2 - 24pq + 9q^2 - 150p - 200q + 625 = 0 \end{aligned}$$

Folglich ist die Menge $K \subseteq \mathbb{R}^2$ aller Punkte X, die vom Punkt P und der Geraden L denselben Abstand haben, die Quadrik

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 16p^2 - 24pq + 9q^2 - 150p - 200q + 625 = 0 \right\};$$

sie besitzt also die Gleichung

$$\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} -150 \\ -200 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = 625 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 16-\lambda & -12 \\ -12 & 9-\lambda \end{vmatrix} &= (16-\lambda)\cdot(9-\lambda) - (-12)^2 = \\ &= \left(144 - 25\,\lambda + \lambda^2\right) - 144 = \lambda^2 - 25\,\lambda = (\lambda - 25)\cdot\lambda \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 25$ und $\lambda_2 = 0$; wegen

$$A - \lambda_1 E_2 = \begin{pmatrix} -9 & -12 \\ -12 & -16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 25$, und wegen

$$A - \lambda_2 E_2 = \begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 0$. Mit der orthogonalen Matrix

$$S = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $S^\top A S = D$. Mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ergibt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} S^\top A S \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^\top S \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -150 & -200 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 625 = 0,$$

und damit

$$25\, u^2 - 250\, v + 625 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad u^2 - 10\, v + 25 = 0.$$

Es ergibt sich damit

$$u^2 - 10 \left(v - \frac{5}{2} \right) = 0,$$

mit der erneuten Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v - \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ also in

$$w^2 - 10\, z = 0, \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{10} - z = 0,$$

die euklidische (metrische) Normalform einer Parabel.

8.38 a) Die Verbindungsgerade L_t der Punkte $(1, 0)$ und (t, t) besitzt den Trägerpunkt

$$t_L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie den Richtungsvektor

$$u_L = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - 1 \\ t \end{pmatrix}$$

und damit die Parameterdarstellung

$$L_t = t_L + \mathbb{R} \cdot u_L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} t-1 \\ t \end{pmatrix};$$

die Verbindungsgerade M_t der Punkte $(0, 1)$ und $(-t, -t)$ besitzt den Trägerpunkt

$$t_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie den Richtungsvektor

$$u_M = \begin{pmatrix} -t \\ -t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -t-1 \end{pmatrix}$$

und damit die Parameterdarstellung

$$M_t = t_M + \mathbb{R} \cdot u_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -t \\ -t-1 \end{pmatrix}.$$

Für den Schnittpunkt P_t der beiden Geraden L_t und M_t gibt es nun Parameter λ, $\mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} t-1 \\ t \end{pmatrix}}_{P_t \in L_t} = P_t = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -t \\ -t-1 \end{pmatrix}}_{P_t \in M_t},$$

wodurch sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} t-1 & t \\ t & t+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ergibt; wegen

$$\left(\begin{array}{cc|c} t-1 & t & -1 \\ t & t+1 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{\leadsto} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -2 \\ t & t+1 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}+t\cdot\mathrm{I}}{\leadsto} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1-2\,t \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}+\mathrm{II}}{\leadsto}$$
$$\leadsto \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -1-2\,t \\ 0 & 1 & -2\,t+1 \end{array}\right) \underset{(-1)\cdot\mathrm{I}}{\leadsto} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2\,t+1 \\ 0 & 1 & -2\,t+1 \end{array}\right)$$

ist $\lambda = 2\,t + 1$ und $\mu = -2\,t + 1$, wodurch man schließlich

$$P_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (2\,t+1) \cdot \begin{pmatrix} t-1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,t^2 - t \\ 2\,t^2 + t \end{pmatrix}$$

erhält.

b) Gemäß a) besitzt der Schnittpunkt P_t die beiden Koordinaten

$$x_t = 2\,t^2 - t \qquad \text{und} \qquad y_t = 2\,t^2 + t;$$

wegen

$$(x_t - y_t)^2 = \left(\left(2\,t^2 - t\right) - \left(2\,t^2 + t\right)\right)^2 = (-2\,t)^2 = 4\,t^2$$

und

$$x_t + y_t = \left(2\,t^2 - t\right) + \left(2\,t^2 + t\right) = 4\,t^2$$

gilt also

$$(x_t - y_t)^2 = x_t + y_t,$$

weswegen P_t auf der ebenen Quadrik

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-y)^2 = x + y\right\}$$

liegt. Mit der affinen Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ergibt sich hierfür die affine Normalform

$$u^2 = v \qquad \text{bzw.} \qquad u^2 - v = 0$$

einer Parabel.

8.39 a) Die Gerade b durch die Punkte $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ besitzt den Trägerpunkt A und den Richtungsvektor $u_b = C - A = \begin{pmatrix} t+1 \\ t \end{pmatrix}$, folglich den Normalenvektor $\widetilde{u}_b = u_b^\perp = \begin{pmatrix} -t \\ t+1 \end{pmatrix}$, und damit die Gleichung

$$\widetilde{u}_b \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \widetilde{u}_b \circ A \qquad \text{bzw.} \qquad -\,t\,x + (t+1)\,y = t.$$

b) Die Höhe h_B des Dreiecks ABC durch die Ecke $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ steht auf der Seite b durch die Ecken A und C senkrecht; folglich besitzt h_B den Trägerpunkt B und den Normalenvektor u_b und folglich die Gleichung

$$u_b \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u_b \circ B \qquad \text{bzw.} \qquad (t+1)\,x + t\,y = t + 1.$$

c) Die Seite durch die Ecken A und B stimmt mit der x–Achse überein; daher ist die Höhe h_C durch den Punkt C eine Parallele zur y–Achse und besitzt die Gleichung $x = t$. Die Koordinaten des Höhenschnittpunkts $H = \begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix}$ des Dreiecks ABC müssen nun den Gleichungen der beiden Höhen h_B und h_C genügen; aus

$$(t+1)\,x_H + t\,y_H = t + 1 \qquad \text{und} \qquad x_H = t$$

folgt zunächst $(t+1)\,t + t\,y_H = t + 1$, also

$$t\,y_H = (t+1) - (t+1)\,t = (t+1)\,(1-t) = 1 - t^2,$$

und wegen $t \neq 0$ ergibt sich

$$y_H = \frac{1 - t^2}{t} = \frac{1}{t} - t.$$

d) Die Koordinaten $x_t = t$ und $y_t = \frac{1}{t} - t$ des Höhenschnittpunkts H genügen der Gleichung

$$y = \frac{1}{t} - t = \frac{1}{x} - x \qquad \text{bzw.} \qquad x\,y = 1 - x^2;$$

damit liegt H auf der Quadrik Q des $\mathbb{R}^2$ mit der Gleichung

$$x^2 + x\,y - 1 = 0;$$

wegen

$$x^2 + x\,y - 1 = 0 \iff \left(x^2 + 2\cdot x\cdot \frac{y}{2} + \left(\frac{y}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1 \iff$$
$$\iff \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1 \iff w^2 - z^2 = 1$$

mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{y}{2} \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix}$ ist Q eine Hyperbel.

8.40 In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ betrachten wir die Quadrik

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + x\,y + y^2 - 2\,x - y - 1 = 0 \right\},$$

und mit dem quadratischen Term

$$Q(x,y) = x^2 + x\,y + y^2 - 2\,x - y - 1$$

gilt also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E \iff Q(x,y) = 0 \qquad \text{für alle} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2;$$

die Aufgabenstellung gibt vor, daß es sich bei $E \subseteq \mathbb{R}^2$ um eine Ellipse handelt.

a) Wir betrachten die beiden affinen Abbildungen

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+1 \\ -x+1 \end{pmatrix},$$

und

$$\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \tau\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+1 \\ x-1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ ist φ eine Bewegung, und das Bild von E unter φ ist wieder eine Ellipse; für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E$ ist $\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y \\ 1-x \end{pmatrix}$ mit

$$\begin{aligned}
Q(1-y, 1-x) &= (1-y)^2 + (1-y)\cdot(1-x) + (1-x)^2 \\
&\qquad -2\cdot(1-y) - (1-x) - 1 \\
&= \left(1 - 2\,y + y^2\right) + (1 - x - y + y\cdot x) + \left(1 - 2\,x + x^2\right) \\
&\qquad + (-2 + 2\,y) + (-1 + x) - 1 \\
&= x^2 + x\cdot y + y^2 - 2\,x - y - 1 \;=\; Q(x,y) \;=\; 0,
\end{aligned}$$

also $\varphi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in E$, so daß E unter φ invariant bleibt. Ferner ist τ wegen $A_\tau = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ eine Bewegung, und das Bild von E unter τ ist wieder eine Ellipse; für alle $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in E$ ist $\tau\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y+1\\x-1\end{pmatrix}$ mit

$$\begin{aligned}
Q(y+1,\ x-1) \;&=\; (y+1)^2 + (y+1)\cdot(x-1) + (x-1)^2 \\
&\qquad\qquad -2\cdot(y+1) - (x-1) - 1 \\
&=\; \big(y^2 + 2\,y + 1\big) + (y\cdot x - y + x - 1) + \big(x^2 - 2\,x + 1\big) \\
&\qquad\qquad + (-2\,y - 2) + (-x + 1) - 1 \\
&=\; x^2 + x\cdot y + y^2 - 2\,x - y - 1 \;=\; Q(x,y) \;=\; 0,
\end{aligned}$$

also $\tau\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in E$, so daß E unter τ invariant bleibt.

b) Wir bestätigen zunächst, daß die beiden Bewegungen φ und τ tatsächlich Achsenspiegelungen der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ sind, indem wir nachweisen, daß ihre Fixpunktmengen

$$g_\varphi = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \right\}$$

und

$$g_\tau = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \tau\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \right\}$$

affine Geraden sind; diese stellen die beiden Spiegelgeraden dar. Wegen

$$\begin{aligned}
\varphi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}1-y\\1-x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \iff \\
\iff \begin{pmatrix}x+y\\x+y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ist

$$g_\varphi = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},$$

und wegen

$$\begin{aligned}
\tau\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}y+1\\x-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \iff \\
\iff \begin{pmatrix}x-y\\-x+y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ist

$$g_\tau = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Da gemäß a) die beiden Spiegelungen φ und τ die Ellipse E invariant lassen, müssen die zugehörigen Spiegelgeraden g_φ und g_τ die Hauptachsen der Ellipse sein; diese schneiden sich im Mittelpunkt m der Ellipse E, und wegen

$$g_\varphi \cap g_\tau = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right\} \qquad \text{ergibt sich} \qquad m = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

c) Man betrachte die Transformation

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix};$$

für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ist damit

$$\begin{aligned} Q(x,\, y) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad Q(u+1,\, v) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (u+1)^2 + (u+1)\cdot v + v^2 - 2\cdot(u+1) - v - 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \big(u^2 + 2\,u + 1\big) + (u\cdot v + v) + v^2 \\ &\qquad\qquad + (-2\,u - 2) - v - 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (*) \quad u^2 + u\cdot v + v^2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Es ist $(*)$ die gesuchte Gleichung von E im u–v–Koordinatensystem nach der Verschiebung in den Mittelpunkt; sie enthält keine linearen Terme mehr.

d) Es ist

$$(*) \iff \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - 2 = 0.$$

Die Eigenvektoren der symmetrischen Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ stimmen mit den Richtungsvektoren der Hauptachsen der Ellipse E, gemäß b) also mit den Richtungsvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Spiegelgeraden von φ und τ überein; wegen

$$A\cdot v_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot v_1$$

und

$$A\cdot v_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\cdot v_2$$

sind $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ die zugehörigen Eigenwerte, so daß sich mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|},\, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1\ \lambda_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

die Beziehung $P^\top A\, P = D$ ergibt. Mit der Hauptachsentransformation

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$$

erhält man schließlich

$$
\begin{aligned}
(*) \quad &\iff \quad \left(P\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}\right)^{\top} \cdot A \cdot P\left(\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}\right) - 2 = 0 \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot \left(P^{\top} A\, P\right) \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} - 2 = 0 \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} - 2 = 0 \\
&\iff \quad \frac{1}{2}\, w^2 + \frac{3}{2}\, z^2 = 2 \\
&\iff \quad \frac{1}{4}\, w^2 + \frac{3}{4}\, z^2 = 1 \\
&\iff \quad \frac{w^2}{2^2} + \frac{z^2}{(\frac{2}{\sqrt{3}})^2} = 1.
\end{aligned}
$$

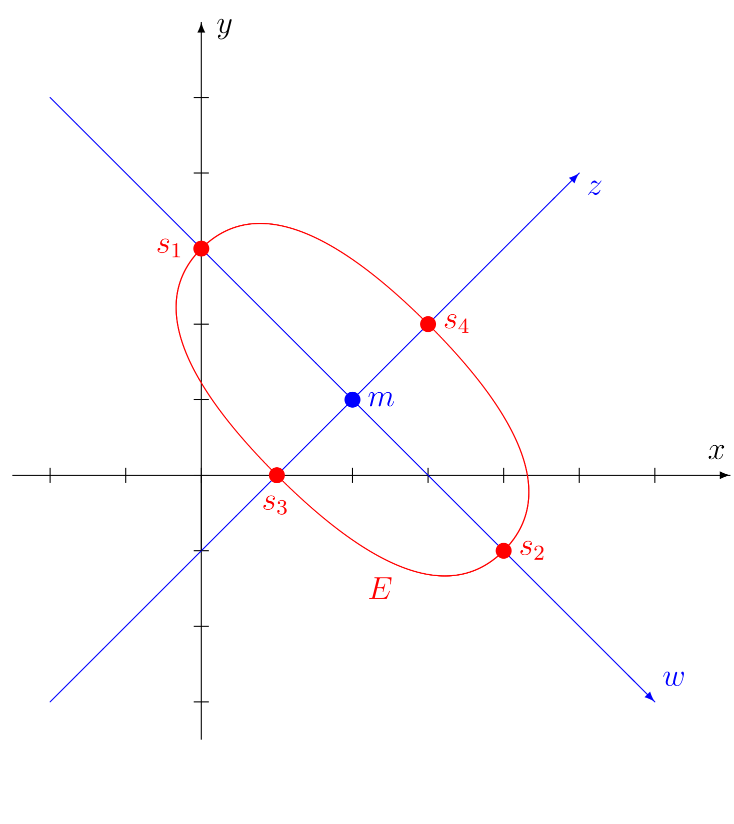
Die die euklidische (metrische) Normalform von E lautet demnach

$$\frac{w^2}{2^2} + \frac{z^2}{(\frac{2}{\sqrt{3}})^2} = 1.$$

8.41 a) Für die im (x,y)–Koordinatensystem gegebene Ellipse E mit den Scheitelpunkten

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad s_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad s_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad s_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ergibt sich:



Damit besitzt die Ellipse E den Mittelpunkt

$$m = \frac{s_1 + s_2}{2} = \frac{s_3 + s_4}{2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie die beiden Hauptachsen

$$w = m + \mathbb{R} \cdot (s_2 - m) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und

$$z = m + \mathbb{R} \cdot (s_4 - m) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

als Länge ihrer Hauptachsenabschnitte ergibt sich

$$\alpha = \|s_2 - m\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

und

$$\beta = \|s_4 - m\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

b) Die Ellipse E besitzt im (w, z)–Koordinatensystem die euklidische Normalform

$$\frac{w^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\beta^2} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{\sqrt{8}^2} + \frac{z^2}{\sqrt{2}^2} = 1,$$

also

$$\frac{w^2}{8} + \frac{z^2}{2} - 1 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad w^2 + 4\,z^2 - 8 = 0,$$

und damit die Gleichung

$$\begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot D \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + c' = 0$$

mit

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \text{und} \qquad c' = -8 \in \mathbb{R};$$

ferner bezeichne

$$P = \left(\frac{s_2 - m}{\|s_2 - m\|}\, , \, \frac{s_4 - m}{\|s_4 - m\|} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2\,(\mathbb{R})$$

die orthogonale Matrix aus den normierten Richtungsvektoren der beiden Hauptachsen der Ellipse E. Für die gesuchte Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

von E in den Koordinaten x und y sind die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, der Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ sowie $c \in \mathbb{R}$ zu bestimmen: wegen $P^\top A P = D$ ist zunächst

$$A = PDP^\top = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

wegen $2\,A\,m + b = 0$ dann

$$b = -2\,A\,m = -2 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -11 \end{pmatrix}$$

und wegen $c' = c + \frac{1}{2} b^\top m$ schließlich

$$c = c' - \frac{1}{2} b^\top m = -8 - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -13 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -8 - \frac{-37}{2} = \frac{21}{2}.$$

Wir erhalten also die Gleichung

$$\frac{5}{2}\,x^2 + 3\,x\,y + \frac{5}{2}\,y^2 - 13\,x - 11\,y + \frac{21}{2} = 0$$

beziehungsweise

$$5\,x^2 + 6\,x\,y + 5\,y^2 - 26\,x - 22\,y + 21 = 0.$$

8.42 Zu betrachten sind der zur z–Achse rotationssymmetrische Kreiskegel

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 2\,z^2 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

sowie die in Abhängigkeit von einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ gegebene Ebene E_λ mit dem Trägerpunkt $t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und dem Normalenvektor $\widetilde{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$, also

$$E_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \widetilde{u} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \widetilde{u} \circ t \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + \lambda \cdot z = 1 \right\};$$

für die Betrachtung der sich ergebenden Schnittfigur $E_\lambda \cap K$ und die Bestimmung ihres Typs bieten sich mehrere Möglichkeiten an:

- Wir versehen die Ebene E_λ mit einem affinen Koordinatensystem und bestimmen diesbezüglich eine Gleichung von $E_\lambda \cap K$: die Ebene E_λ besitzt den Trägerpunkt t und mit dem Normalenvektor $\widetilde{u}$ die linear unabhängigen Richtungsvektoren $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $u_2 = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, somit die Parameterdarstellung $E_\lambda = t + \mathbb{R} \cdot u_1 + \mathbb{R} \cdot u_2$. Jeder Punkt $p \in E_\lambda$ ist von der Gestalt

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -\lambda \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - u - \lambda v \\ u \\ v \end{pmatrix},$$

wobei $u,\ v \in \mathbb{R}$ die Koordinaten von p bezüglich des Koordinatensystems mit dem Ursprung t und den Koordinatenachsen in Richtung u_1 und u_2 sind. Wegen

$$\begin{aligned} p \in K \quad &\iff \quad (1 - u - \lambda v)^2 + u^2 - 2\,v^2 = 0 \\ &\iff \quad 1 + u^2 + \lambda^2 v^2 - 2\,u - 2\,\lambda\,v + 2\,\lambda\,u\,v + u^2 - 2\,v^2 = 0 \\ &\iff \quad 2\,u^2 + 2\,\lambda\,u\,v + \left(\lambda^2 - 2\right) v^2 - 2\,u - 2\,\lambda\,v + 1 = 0 \end{aligned}$$

besitzt $E_\lambda \cap K$ die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 - 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -2\,\lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = 1 \in \mathbb{R};$$

damit ist die Schnittfigur $E_\lambda \cap K$ eine ebene Quadrik und genau dann eine Parabel, wenn sie ohne Mittelpunkt ist, also das lineare Gleichungssystem $A \cdot m = -\frac{1}{2}\,b$ keine Lösung besitzt. Wegen

$$\left(A \middle| -\tfrac{1}{2}\,b\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & \lambda^2 - 2 & \lambda \end{array}\right) \underset{\mathrm{II} - \frac{1}{2}\lambda\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & \lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{2}\lambda^2 - 2 & \frac{1}{2}\,\lambda \end{array}\right)$$

ist dies genau für $\frac{1}{2}\lambda^2 - 2 = 0$ und $\frac{1}{2}\lambda \neq 0$ der Fall, wegen

$$\frac{1}{2}\lambda^2 - 2 = 0 \iff \frac{1}{2}\lambda^2 = 2 \iff \lambda^2 = 4 \iff \lambda = \pm 2$$

und $\frac{1}{2}\lambda \neq 0 \iff \lambda \neq 0$ also genau für $\lambda \in \{-2, 2\}$.

- Der gegebene Kreiskegel K entsteht durch Rotation der Ursprungsgeraden

$$g = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3$$

um die z–Achse und besitzt daher die Mantellinien $g_k = \mathbb{R} \cdot u_k$ mit

$$u_k = \begin{pmatrix} \cos k & -\sin k & 0 \\ \sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos k \\ \sin k \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad k \in [0, 2\,\pi]\,.$$

Der Nullpunkt erfüllt nicht die Gleichung der Ebene E_λ, es ist also $0 \notin E_\lambda$; damit enthält E_λ nicht die Spitze des gegebenen Kreiskegels K, so daß der Schnitt $E_\lambda \cap K$ auch keine Gerade ist. Damit besteht aber die Eigenschaft $(*)$: „$E_\lambda \cap K$ ist eine Parabel.“ genau dann, wenn die Ebene E_λ zu genau einer Mantellinie g_k des Kreiskegels K parallel ist, und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
(*) \quad &\iff \quad E_\lambda \parallel g_k \qquad \text{für genau ein} \quad k \in [0, 2\,\pi] \\
&\iff \quad \widetilde{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \cos k \\ \sin k \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = u_k \qquad \text{für genau ein} \quad k \in [0, 2\,\pi] \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \cos k \\ \sin k \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{für genau ein} \quad k \in [0, 2\,\pi] \\
&\iff \quad \cos k + \sin k + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lambda = 0 \qquad \text{für genau ein} \quad k \in [0, 2\,\pi]\,.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\cos k + \sin k + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lambda = 0 \iff \cos k + \sin k = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lambda \iff$$
$$\iff \cos k \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos\frac{\pi}{4}} + \sin k \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\sin\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2} \cdot \lambda \iff \cos\left(k - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \lambda$$

besitzt diese von $\lambda \in \mathbb{R}$ abhängige Gleichung genau dann eine eindeutig bestimmte Lösung $k \in [0, 2\pi]$, wenn $-\frac{1}{2} \cdot \lambda$ ein Extremwert des Cosinus ist, also für

$$-\frac{1}{2} \cdot \lambda = \pm 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda = \pm 2.$$

Insgesamt ist der Schnitt $E_\lambda \cap K$ genau dann eine Parabel, wenn $\lambda \in \{-2, 2\}$ gilt.

- Der gegebene gerade Kreiskegel K besitzt die z–Achse mit dem Richtungsvektor e_3 der Länge $\|e_3\| = 1$ als Symmetrieachse; diese schließt einerseits mit der Mantellinie g_k von K mit dem Richtungsvektor u_k der Länge

$$\|u_k\| = \sqrt{\cos^2 k + \sin^2 k + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

den Winkel $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ mit

$$\cos\alpha = \left|\frac{e_3 \circ u_k}{\|e_3\| \cdot \|u_k\|}\right| = \left|\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

und andererseits mit der Ebene E_λ mit dem Normalenvektor $\widetilde{u}$ der Länge

$$\|\widetilde{u}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + \lambda^2} = \sqrt{2 + \lambda^2}$$

den Winkel $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ mit

$$\sin\varphi = \left|\frac{e_3 \circ \widetilde{u}}{\|e_3\| \cdot \|\widetilde{u}\|}\right| = \left|\frac{\lambda}{1 \cdot \sqrt{2 + \lambda^2}}\right| = \frac{|\lambda|}{\sqrt{2 + \lambda^2}}$$

und damit

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2\varphi} = \sqrt{1 - \left(\frac{|\lambda|}{\sqrt{2 + \lambda^2}}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{2 + \lambda^2}} = \sqrt{\frac{(2 + \lambda^2) - \lambda^2}{2 + \lambda^2}} = \sqrt{\frac{2}{2 + \lambda^2}}$$

ein. Wegen $0 \notin E_\lambda$ enthält E_λ nicht die Spitze des Kreiskegels K, so daß der Schnitt $E_\lambda \cap K$ genau dann eine Parabel ist, wenn die beiden betrachteten Winkel α und φ übereinstimmen; wegen

$$\alpha = \varphi \iff \cos\alpha = \cos\varphi \iff \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{2 + \lambda^2}} \iff$$
$$\iff \frac{1}{3} = \frac{2}{2 + \lambda^2} \iff 2 + \lambda^2 = 6 \iff \lambda^2 = 4 \iff \lambda = \pm 2$$

ist der Schnitt $E_\lambda \cap K$ genau dann eine Parabel, wenn $\lambda \in \{-2, 2\}$ gilt.