Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Lineare Algebra und analytische Geometrie 7 — Lösungsvorschlag —

7.1 a) Sei $(V, +, \cdot)$ ein reeller Vektorraum (mit der Vektoraddition $+$ und der Skalarmultiplikation $\cdot$). Dann heißt eine Teilmenge $U \subseteq V$ ein *Untervektorraum* von V, wenn $(U, +, \cdot)$ mit den vererbten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ selbst ein reeller Vektorraum ist.

b) Sei $A \subseteq V$ ein *(nichtleerer) affiner Unterraum* von V; es existiert also ein Untervektorraum U von V sowie ein $p \in V$ mit

$$A = p + U = \{p + u \mid u \in U\}.$$

Für jedes $x \in A$ gibt es also ein $u_0 \in U$ mit $x = p + u_0$, und wir zeigen $A = x + U$ durch den Nachweis von zwei Inklusionen:

- Für „$\subseteq$" sei $v \in A$, es gibt also ein $u \in U$ mit $v = p + u$; damit ist

$$v = p + u_0 - u_0 + u = \underbrace{(p + u_0)}_{=x} + \underbrace{(u - u_0)}_{\in U} \in x + U.$$

- Für „$\supseteq$" sei $v \in x + U$, es gibt also ein $u \in U$ mit $v = x + u$; damit ist

$$v = \underbrace{(p + u_0)}_{=x} + u = p + \underbrace{(u + u_0)}_{\in U} \in p + U = A.$$

Dabei geht ein, daß für einen Untervektorraum U von V mit $u \in U$ und $u_0 \in U$ auch $u \pm u_0 \in U$ gilt.

c) Für affine Unterräume A und B von V mit $A \cap B \neq \emptyset$ gilt insbesondere $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$; es existieren also Untervektorräume U_1 und U_2 von V sowie $p_1 \in V$ und $p_2 \in V$ mit

$$A = p_1 + U_1 \qquad \text{und} \qquad B = p_2 + U_2.$$

Wegen $A \cap B \neq \emptyset$ existiert ferner ein $p \in A \cap B$, also mit $p \in A$ und $p \in B$, und gemäß b) ergibt sich damit

$$A = p + U_1 \qquad \text{und} \qquad B = p + U_2,$$

und für alle $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned} v \in A \cap B \quad &\Longleftrightarrow \quad \big(v \in A \;\text{ und }\; v \in B\big) \\ &\Longleftrightarrow \quad \big(v \in p + U_1 \;\text{ und }\; v \in p + U_2\big) \\ &\Longleftrightarrow \quad \big(v - p \in U_1 \;\text{ und }\; v - p \in U_2\big) \\ &\Longleftrightarrow \quad v - p \in (U_1 \cap U_2) \\ &\Longleftrightarrow \quad v \in p + (U_1 \cap U_2); \end{aligned}$$

damit ist

$$A \cap B = p + (U_1 \cap U_2).$$

Da mit U_1 und U_2 auch $U_1 \cap U_2$ ein Untervektorraum von V ist, ist $A \cap B$ wieder ein affiner Unterraum von V.

7.2 a) Die Ebene $E_2 = t + \mathbb{R} \cdot u_1 + \mathbb{R} \cdot u_2$ mit

$$t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

besitzt wegen

$$u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = -5 \cdot \widetilde{u} \quad \text{mit} \quad \widetilde{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

den Normalenvektor $\widetilde{u}$ und damit die Gleichung

$$E_2 \quad : \quad \widetilde{u} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \widetilde{u} \circ t \qquad \text{bzw.} \qquad x - z = 2.$$

Die Schnittgerade s der beiden Ebenen E_1 und E_2 ist damit die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{lcrcrcrcr} E_2 & : & x & & & - & z & = & 2 \\ E_1 & : & -6\,x & + & 4\,y & - & 10\,z & = & -20 \end{array}$$

und besitzt wegen

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -6 & 4 & -10 & -20 \end{array}\right) \overset{\text{II}+6\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -16 & -8 \end{array}\right)$$

die Parameterdarstellung

$$h = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Die Koordinaten $x_P = 0$, $y_P = 0$ und $z_P = -2$ des Punktes P genügen gemäß

$$x_P - z_P = 0 - (-2) = 2$$

der Gleichung der Ebene E_2; damit liegt P in der Ebene E_2.

Die Gerade g, welche im Punkt P senkrecht auf der Ebene E_2 steht, besitzt nun den Trägerpunkt P und den Richtungsvektor $\widetilde{u}$, also die Parameterdarstellung

$$g = P + \mathbb{R} \cdot \widetilde{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

c) Der Schnittpunkt S der Geraden g mit der Ebene E_1 besitzt (als Punkt von g) die Gestalt

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ -2 - \lambda \end{pmatrix}$$

für einen geeigneten Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei wegen $S \in E_1$ dann

$$-6 \cdot \lambda + 4 \cdot 0 - 10 \cdot (-2 - \lambda) = -20,$$

also

$$4 \cdot \lambda = -40 \qquad \text{und damit} \qquad \lambda = -10$$

gilt; folglich ist

$$S = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

7.3 Die gegebene Ebene E durch die drei Punkte

$$P = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

besitzt den Trägerpunkt P sowie die beiden (linear unabhängigen) Richtungsvektoren

$$u_1 = Q - P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_2 = R - P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und damit die Parameterdarstellung

$$E = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$\widetilde{u} = u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Normalenvektor der Ebene E, und wir erhalten die Gleichung

$$E \quad : \quad \widetilde{u} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \widetilde{u} \circ P \qquad \text{bzw.} \qquad x + y + z = -1.$$

Die gegebene Gerade g, die den Ursprung 0 enthält und auf E senkrecht steht, besitzt den Trägerpunkt 0 und den Richtungsvektor $\widetilde{u}$ und damit die Parameterdarstellung

$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Schnittpunkt S von g und E besitzt (als Punkt von g) die Gestalt

$$S = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$, und wegen $S \in E$ gilt

$$\lambda + \lambda + \lambda = -1, \qquad \text{also} \qquad 3\,\lambda = -1 \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda = -\frac{1}{3};$$

damit ergibt sich

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Als Spiegelpunkt T von 0 an der Ebene E erhält man schließlich

$$T = \underbrace{0 + (S - 0)}_{=\text{Lotfußpunkt } S} + (S - 0) = 2 \cdot S = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

7.4 Im Raum $\mathbb{R}^4$ sind in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die beiden Ebenen

$$E_\alpha = t_1 + \mathbb{R} \cdot u_1 + \mathbb{R} \cdot u_2 \qquad \text{und} \qquad F_\alpha = t_2 + \mathbb{R} \cdot u_3 + \mathbb{R} \cdot u_4$$

mit

$$t_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \ \text{ und } \ t_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben; wegen $\alpha \neq 0$ könnten für E_α auch die Richtungsvektoren

$$u_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gewählt werden, so daß E_α eigentlich nicht von α abhängig ist. Die beiden Ebenen E_α und F_α schneiden sich nun genau dann, wenn $E_\alpha \cap F_\alpha \neq \emptyset$ gilt, es also ein $v \in \mathbb{R}^4$ mit $v \in E_\alpha$ und $v \in F_\alpha$ gibt. Über die Parameterdarstellungen

$$\underbrace{t_1 + \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2}_{\in E_\alpha} = v = \underbrace{t_2 + \lambda_3 \cdot u_3 + \lambda_4 \cdot u_4}_{\in F_\alpha}$$

führt dies zu der Beziehung

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot (-u_3) + \lambda_4 \cdot (-u_4) = t_2 - t_1,$$

also zu dem linearen Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A = (u_1, u_2, -u_3, -u_4) \in \mathbb{R}^{4\times 4} \qquad \text{und} \qquad b = t_2 - t_1 \in \mathbb{R}^4;$$

damit gilt $E_\alpha \cap F_a \neq \emptyset$ genau dann, wenn $A \cdot x = b$ (mindestens) eine Lösung

$$x = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

besitzt. Wegen

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & \alpha & -2 & 0 & \alpha-2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & \alpha-2 \\ 2 & \alpha & 0 & -2 & -1 \\ 0 & \alpha & 1 & -1 & \alpha-1 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & \alpha & -2 & 0 & \alpha-2 \\ 0 & -\alpha & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -\alpha+1 \\ 0 & \alpha & 1 & -1 & \alpha-1 \end{array}\right) \underset{\text{IV}+\text{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & \alpha & -2 & 0 & \alpha-2 \\ 0 & -\alpha & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -\alpha+1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & \alpha-1 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-\text{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & \alpha & -2 & 0 & \alpha-2 \\ 0 & -\alpha & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -\alpha+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha-2 \end{array}\right)$$

ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{Rang}(A|b) = \operatorname{Rang}(A) = 3,$$

also $2\,\alpha - 2 = 0$ bzw. $\alpha = 1$ gilt.

7.5 Im $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die Ebene

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2\,y = -1 \right\}$$

und zu gegebenem $\lambda \in \mathbb{R}$ die Teilmenge

$$G_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - \lambda\,z = -1 \text{ und } -2\,x - 3\,y + \lambda\,z = 1 + \lambda \right\}.$$

a) Die Teilmenge G_λ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ besteht genau aus den Punkten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, welche den beiden Bedingungen

$$x + y - \lambda\,z = -1 \qquad \text{und} \qquad -2\,x - 3\,y + \lambda\,z = 1 + \lambda$$

genügen, ist also die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\lambda & -1 \\ -2 & -3 & \lambda & 1+\lambda \end{array}\right) \overset{\text{II}+2\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda & -1+\lambda \end{array}\right) \overset{\text{I}+\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2\,\lambda & -2+\lambda \\ 0 & -1 & -\lambda & -1+\lambda \end{array}\right).$$

Wegen Rang $(A\,|\,b) = 2$ ist die Teilmenge G_λ unabhängig von $\lambda \in \mathbb{R}$ eindimsional, also eine Gerade mit der Gestalt

$$G_\lambda = x_p + L_0 = t_{G_\lambda} + \mathbb{R}\cdot u_{G_\lambda} = \begin{pmatrix} -2+\lambda \\ 1-\lambda \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\cdot \begin{pmatrix} 2\,\lambda \\ -\lambda \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Wir betrachten die beiden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2\,y = -1 \right\} \text{ und } G_\lambda = \begin{pmatrix} -2+\lambda \\ 1-\lambda \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\cdot \begin{pmatrix} 2\,\lambda \\ -\lambda \\ 1 \end{pmatrix};$$

ein gemeinsamer Punkt S von G_λ und E besitzt als Punkt von G_λ die Parameterdarstellung

$$S = \begin{pmatrix} -2+\lambda \\ 1-\lambda \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\cdot \begin{pmatrix} 2\,\lambda \\ -\lambda \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+\lambda+\mu\cdot 2\,\lambda \\ 1-\lambda+\mu\cdot(-\lambda) \\ \mu \end{pmatrix}$$

für ein $\mu \in \mathbb{R}$ und genügt als Punkt von E der Ebenengleichung, also

$$(-2+\lambda+\mu\cdot 2\,\lambda) + 2\cdot(1-\lambda+\mu\cdot(-\lambda)) = -1 \iff \lambda = 1,$$

und wir erhalten:

- Für $\lambda \neq 1$ sind G_λ und E ohne gemeinsamen Punkt.
- Für $\lambda = 1$ erfüllt jeder Punkt auf G_1 (unabhängig von $\mu \in \mathbb{R}$) die Gleichung von E, es ist also $G_1 \subseteq E$ und damit $G_1 \cap E = G_1$.

7.6 a) Die Ebene E durch die drei Punkte A, B und C besitzt den Trägerpunkt

$$t = A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und den beiden (offensichtlich linear unabhängigen) Richtungsvektoren

$$u_1 = B - A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_2 = C - A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und folglich die Parameterdarstellung

$$E = t + \mathbb{R}\cdot u_1 + \mathbb{R}\cdot u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Normalenvektor

$$\widetilde{u}_E = u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich für die Ebene E die Gleichung

$$\widetilde{u}_E \circ x = \widetilde{u}_E \circ t, \qquad \text{also} \qquad -x_1 + 2\,x_2 + x_3 = -2,$$

wegen $\|\widetilde{u}_E\| = \sqrt{6}$ und $\widetilde{u}_E \circ t < 0$ also die Hessesche Normalform

$$\frac{-x_1 + 2\,x_2 + x_3 + 2}{-\sqrt{6}} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{x_1 - 2\,x_2 - x_3 - 2}{\sqrt{6}} = 0.$$

Damit ist

$$d(D,E) = \left| \frac{0 - 2 \cdot 1 - (-\frac{5}{2}) - 2}{\sqrt{6}} \right| = \left| \frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{6}} \right| = \frac{3}{2\sqrt{6}}.$$

b) Die Lotgerade durch den Punkt D zur Ebene E besitzt den Trägerpunkt $t_\ell = D$ und den Richtungsvektor $u_\ell = \widetilde{u}_E$, also die Parameterdarstellung

$$\ell = t_\ell + \mathbb{R} \cdot u_\ell = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den Schnittpunkt $L = \ell \cap E$ gilt

$$L = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 1 + 2\lambda \\ -\frac{5}{2} + \lambda \end{pmatrix} \in \ell$$

für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$, und wegen $L \in E$ ergibt sich

$$-1 \cdot (-\lambda) + 2 \cdot (1 + 2\lambda) + 1 \cdot (-\frac{5}{2} + \lambda) = -2, \quad \text{also} \quad \lambda = -\frac{1}{4},$$

und damit

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{11}{4} \end{pmatrix}.$$

7.7 Im euklidischen $\mathbb{R}^3$ sind die folgenden drei Geraden zu betrachten:

- Die Gerade L_1 ist als Schnittmenge der beiden Ebenen

$$E_1 \quad : \quad x + y - z = 1 \qquad \text{und} \qquad E_2 \quad : \quad 2\,x - y - 2\,z = -1$$

gegeben und stellt daher die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2\,x & - & y & - & 2\,z & = & -1 \end{array}$$

dar.

- Die Gerade L_2 ist über ihre Parameterdarstellung

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2-t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben.

- Die Gerade L_3 ist als Verbindungsgerade der beiden Punkte

$$q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad q_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben, besitzt demnach mit dem Trägerpunkt q_1 und dem Richtungsvektor $u = q_2 - q_1$ die Parameterdarstellung

$$q_1 + \mathbb{R} \cdot u = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} -2\,s \\ 3-4\,s \\ -2+2\,s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Im folgenden stützen wir uns auf diese Darstellungen für die drei Geraden.

a) Wir zeigen, daß sich sich die Geraden paarweise schneiden und bestimmen die drei Schnittpunkte:

- Für einen gemeinsamen Punkt p_1 von L_2 und L_3 gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2-t \\ t \end{pmatrix} = p_1 = \begin{pmatrix} -2\,s \\ 3-4\,s \\ -2+2\,s \end{pmatrix},$$

was genau für $s = -\frac{1}{2}$ und $t = -3$ erfüllt ist; damit schneiden sich die beiden Geraden L_2 und L_3 im Punkt $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

- Der Punkt $p_2 = \begin{pmatrix} -2\,s \\ 3-4\,s \\ -2+2\,s \end{pmatrix}$ von L_3 mit $s \in \mathbb{R}$ liegt genau dann auch auf L_1, wenn

$$\begin{array}{rcrcrcr} (-2\,s) & + & (3-4\,s) & - & (-2+2\,s) & = & 1 \\ 2\,(-2\,s) & - & (3-4\,s) & - & 2\,(-2+2\,s) & = & -1 \end{array}$$

gilt, was genau für $s = \frac{1}{2}$ erfüllt ist; damit schneiden sich die beiden Geraden L_1 und L_3 im Punkt $p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Der Punkt $p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-t \\ t \end{pmatrix}$ von L_2 mit $t \in \mathbb{R}$ liegt genau dann auch auf L_1, wenn

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1 & + & (2-t) & - & t & = & 1 \\ 2 \cdot 1 & - & (2-t) & - & 2\,t & = & -1 \end{array}$$

gilt, was genau für $t = 1$ erfüllt ist; damit schneiden sich die beiden Geraden L_1 und L_2 im Punkt $p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Wir betrachten das Dreieck $\Delta \subseteq \mathbb{R}^3$ mit den Eckpunkten p_1, p_2, p_3. Die beiden Richtungsvektoren

$$u = p_1 - p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und

$$v = p_3 - p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

von p_2 zu p_1 bzw. p_3 sind gemäß

$$u \circ v = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + (-2) \cdot 2 = 0$$

orthogonal, so daß im Eckpunkt p_2 ein rechter Innenwinkel $\delta_2 = \frac{\pi}{2} = 90°$ vorliegt. Für den Flächeninhalt F_Δ des rechtwinkligen Dreiecks Δ ergibt sich damit

$$F_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \|u\| \cdot \|v\| = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left\| 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|}_{=2\sqrt{6}} \cdot \underbrace{\left\| 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}_{=2\sqrt{2}} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}.$$

Für den Innenwinkel δ_1 im Eckpunkt p_1 gilt

$$\tan \delta_1 = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\|v\|}{\|u\|} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

und damit $\delta_1 = \frac{\pi}{6} = 30°$, so daß sich über die Innenwinkelsumme im Dreieck für den Innenwinkel δ_3 im Eckpunkt p_3 dann

$$\delta_3 = \pi - (\delta_1 + \delta_2) = \pi - \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{3} = 60°$$

ergibt.

7.8 a) Für die im euklidischen Raum $(\mathbb{R}^3, \circ)$ gegebenen Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$u_1 = A - B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_2 = C - B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix};$$

damit ist das Dreieck ΔABC wegen

$$\begin{aligned} d(A,B) = \|u_1\| &= \sqrt{(-1)^2+1^2+4^2} = 3\sqrt{2} \\ d(B,C) = \|u_2\| &= \sqrt{3^2+3^2+0^2} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

gleichschenklig und wegen

$$u_1 \circ u_2 = -3+3+0 = 0$$

auch rechtwinklig (mit dem rechten Winkel bei der Ecke B). Mit dem Punkt

$$D = A + u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ist dann $\square ABCD$ ein Quadrat.

b) Die Ebene E, in der das Quadrat $\square ABCD$ liegt, besitzt den Trägerpunkt B sowie gemäß Teilaufgabe a) die beiden linear unabhängigen Richtungsvektoren u_1 und u_2, wegen

$$u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix} = -6 \cdot \widetilde{u} \quad \text{mit} \quad \widetilde{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

also den Normalenvektor $\widetilde{u}$, und damit die Gleichung

$$\widetilde{u} \circ x = \widetilde{u} \circ B \qquad \text{bzw.} \qquad 2\,x_1 - 2\,x_2 + x_3 = 1.$$

Das Quadrat $\square ABCD$ besitzt den Mittelpunkt

$$M = \tfrac{1}{2}\,(A+C) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

so dass sich für die Lotgerade ℓ zu E durch M, also mit dem Trägerpunkt M und dem Richtungsvektor $\widetilde{u}$, die Parameterdarstellung

$$\ell = M + \mathbb{R} \cdot \widetilde{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ergibt.

c) Alle Punkte S auf der Geraden ℓ sind von der Gestalt

$$S = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2\,\lambda \\ 4-2\,\lambda \\ 3+\lambda \end{pmatrix}$$

für einen Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Pyramide mit der quadratischen Grundfläche $\square ABCD$ und der Spitze S besitzt das Volumen

$$V = \frac{1}{3} \cdot F_{\square ABCD} \cdot h \qquad \text{mit} \qquad h = d(S,E);$$

das Quadrat $\square ABCD$ hat nun gemäß a) die Seitenlänge $\|u_1\| = 3\sqrt{2}$ und damit dem Inhalt $F_{\square ABCD} = (3\sqrt{2})^2 = 18$, und für die Höhe $h = d(S, E)$ ergibt sich mit der Hesseschen Normalform

$$E \quad : \quad \frac{2\,x_1 - 2\,x_2 + x_3 - 1}{3} = 0$$

der Ebene E (wobei $\|\widetilde{u}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$ eingeht)

$$\begin{aligned} h = d(S, E) &= \left| \frac{2\,(3 + 2\,\lambda) - 2\,(4 - 2\,\lambda) + (3 + \lambda) - 1}{3} \right| \\ &= \left| \frac{(6 + 4\,\lambda) - (8 - 4\,\lambda) + (3 + \lambda) - 1}{3} \right| \\ &= \left| \frac{9\,\lambda}{3} \right| = |3\,\lambda| = 3\,|\lambda|\,. \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man

$$V = \frac{1}{3} \cdot F_{\square ABCD} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 3\,|\lambda| = 18\,|\lambda|$$

und damit

$$V = 36 \iff 18\,|\lambda| = 36 \iff |\lambda| = 2 \iff \lambda = \pm 2,$$

also die beiden Punkte

$$S_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7.9 a) Zur gegebenen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

betrachten wir die zugehörige lineare Abbildung $\ell_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\ell_A(x) = A \cdot x$; das Bild U von ℓ_A stimmt mit dem Spaltenraum von A überein. Wegen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-2\text{I}}{\overset{\text{II}+\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{III}+\text{II}}{\overset{\text{I}-\text{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\dim(U) = \operatorname{Rang}(A) = 2$, also U eine (Ursprungs–)Ebene in $\mathbb{R}^3$; mit den beiden gebundenen Variablen x_1 und x_3 kann

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad s_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Basis von $U = \operatorname{Bild}(\ell_A)$ gewählt werden.

b) Die Ebene U durch den Ursprung 0 besitzt gemäß a) die beiden linear unabhängigen Richtungsvektoren s_1 und s_3, folglich also den Normalenvektor

$$\widetilde{u} = s_1 \times s_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit die Gleichung

$$\widetilde{u} \circ x = \widetilde{u} \circ 0 \qquad \text{bzw.} \qquad -x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Der gesuchte Punkt $u \in U$, der dem gegebenen Punkt $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ am nächsten liegt, ist der Lotfußpunkt von v auf U. Die Lotgerade ℓ von v auf U besitzt den Trägerpunkt v und den Richtungsvektor $\widetilde{u}$, also die Parameterdarstellung

$$\ell = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=v} + \mathbb{R} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\widetilde{u}};$$

der Lotfußpunkt u hat also die Gestalt

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ \lambda \\ 2+\lambda \end{pmatrix} \in \ell \quad \text{für ein} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

und wegen $u \in U$ ergibt sich

$$-(1-\lambda) + \lambda + (2+\lambda) = 0 \quad \text{bzw.} \quad 1 + 3\lambda = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lambda = -\frac{1}{3}.$$

Damit ist $u = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$.

c) Es gilt

$$d(v, U) = d(v, u) = \|u - v\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

7.10 Für die gegebene lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = A \cdot x, \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

stimmt der Bildraum $\text{Bild}(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^3\}$ mit dem Spaltenraum der Abbildungsmatrix überein. Wegen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underset{\text{III+I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$\dim \mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Rang}(A) = 2;$$

damit ist $E = \mathrm{Bild}(f)$ eine Ursprungsebene in $\mathbb{R}^3$, die die beiden ersten Spalten

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

von A als linear unabhängige Richtungsvektoren besitzt. Wegen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad \widetilde{u}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

ein Normalenvektor von E der Länge $\|\widetilde{u}_E\| = \sqrt{2}$, so daß die Ebene E die Hessesche Normalform

$$\frac{\widetilde{u}_E \circ x}{\|\widetilde{u}_E\|} = 0, \qquad \text{also} \qquad \frac{x_1 + x_3}{\sqrt{2}} = 0$$

besitzt; als Abstand des Punktes $p \in \mathbb{R}^3$ von der Ebene E ergibt sich damit

$$d(p, E) = \left| \frac{5 + (-1)}{\sqrt{2}} \right| = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Ferner ist die Gerade $G \subseteq \mathbb{R}^3$ als Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

gegeben; wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{\text{I}+\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

ist

$$G = t + \mathbb{R} \cdot u \qquad \text{mit} \qquad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Fußpunkt p_0 des Lotes ℓ vom Punkt $p = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ auf die Gerade G besitzt (als Punkt von G) die Gestalt

$$p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$; damit ist

$$p_0 - p = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 5 \\ -2 \\ \lambda + 1 \end{pmatrix}$$

ein Richtungsvektor der Lotgeraden ℓ, der allerdings auf dem Richtungsvektor u der Geraden G senkrecht stehen muß. Aus

$$0 = u \circ (p_0 - p) = 1 \cdot (\lambda - 5) + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot (\lambda + 1) = 2\,\lambda - 4$$

ergibt sich $\lambda = 2$ und damit $p_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Als Abstand des Punktes p von der Geraden G ergibt sich damit

$$d(p, G) = d(p, p_0) = \|p_0 - p\| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{22}.$$

7.11 a) Die in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ für

$$A_t = \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & 1 \\ t^2 & t & 1 \\ t^2 + t & t^2 + t & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

zu betrachtende Menge

$$F_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid A_t \cdot x = b \right\}$$

ist die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems $A_t \cdot x = b$ mit der Koeffizientenmatrix A_t und der rechten Seite b und damit eine affine Teilmenge von $\mathbb{R}^3$. Wegen

$$A_t \cdot e_3 = \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & 1 \\ t^2 & t & 1 \\ t^2 + t & t^2 + t & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = b$$

ist $e_3 \in F_t$, also $F_t \subseteq \mathbb{R}^3$ nichtleer, und es gilt

$$\dim(F_t) = 3 - \operatorname{Rang}(A_t), \quad \text{also} \quad \dim(F_t) = 2 \iff \operatorname{Rang}(A_t) = 1.$$

Im Falle $\operatorname{Rang}(A_t) = 1$ ist der Spaltenraum der Matrix A_t eindimensional, so daß die ihre Spalten paarweise linear abhängig sein müssen; insbesondere gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ t^2 + t \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad t^2 = \lambda = t,$$

woraus $0 = t^2 - t = t(t-1)$ und damit $t = 0$ oder $t = 1$ folgt. Die Probe

$$(A_0 \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \underset{\text{III}-2\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

und

$$(A_1 \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right) \underset{\text{III}-2\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

bestätigt $\operatorname{Rang}(A_0) = 1$ und $\operatorname{Rang}(A_1) = 1$.

b) Gemäß a) ist $F_t \subseteq \mathbb{R}^3$ genau dann eine Ebene, also eine affine Teilmenge der Dimension 2, wenn $t = 0$ oder $t = 1$ ist, und es gilt

$$F_0 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid A_0 \cdot x = b\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 1\right\}$$

und

$$F_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid A_1 \cdot x = b\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\right\}.$$

Damit besitzen F_0 und F_1 sowie die ferner gegebene Ebene

$$E = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 2\right\}$$

die Normalenvektoren

$$\widetilde{u}_{F_0} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \widetilde{u}_{F_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad \widetilde{u}_E = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};$$

wegen der linearen Unabhängigkeit von $\widetilde{u}_{F_0}$ und $\widetilde{u}_E$ ist F_0 zu E nicht parallel, aber wegen der linearen Abhängigkeit von $\widetilde{u}_{F_1}$ und $\widetilde{u}_E$ ist F_1 zu E parallel.

c) Wegen $\|\widetilde{u}_E\| = \sqrt{3}$ besitzt die Ebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$ die Hessesche Normalform

$$E \quad : \quad \frac{x_1 + x_2 + x_3 - 2}{\sqrt{3}} = 0;$$

ferner gilt $e_3 \in F_1$ gemäß a). Da nun die beiden Ebenen E und F_1 gemäß b) parallel sind, ergibt sich für ihren Abstand

$$\operatorname{dist}(E, F_1) = \operatorname{dist}(e_3, E) = \left|\frac{0+0+1-2}{\sqrt{3}}\right| = \left|\frac{-1}{\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

7.12 a) Der Durchschnitt $E_1 \cap E_2$ der beiden im $\mathbb{R}^3$ gegebenen Ebenen

$$E_1 \,:\, x + y + z = 1 \qquad \text{und} \qquad E_2 \,:\, x - y + z = -1$$

besteht genau aus denjenigen Punkten des $\mathbb{R}^3$, deren Koordinaten x, y und z den beiden Ebenengleichungen genügen, und stimmt daher mit der Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} E_1 & : & x & + & y & + & z & = & 1 \\ E_2 & : & x & - & y & + & z & = & -1 \end{array}$$

überein; wir betrachten die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \underset{-\frac{1}{2}\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{I}-\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

und erhalten

$$E_1 \cap E_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix}-\lambda\\1\\\lambda\end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Die beiden Ebenen E_1 und E_2 besitzen die Normalenvektoren

$$\widetilde{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \widetilde{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

jeweils der Länge $\|\widetilde{u_1}\| = \sqrt{3} = \|\widetilde{u_2}\| = \sqrt{3}$ und damit die Hesseschen Normalformen

$$E_1 \; : \; \frac{x+y+z-1}{\sqrt{3}} = 0 \qquad \text{und} \qquad E_2 \; : \; \frac{x-y+z+1}{-\sqrt{3}} = 0.$$

Der Punkt $p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ besitzt damit von E_1 bzw. E_2 den Abstand

$$d(p, E_1) = \left| \frac{x+y+z-1}{\sqrt{3}} \right| \qquad \text{bzw.} \qquad d(p, E_2) = \left| \frac{x-y+z+1}{-\sqrt{3}} \right|,$$

und es gilt

$$\begin{aligned} p \in P \quad & \Longleftrightarrow \quad d(p, E_1) = d(p, E_2) \\ & \Longleftrightarrow \quad \left| \frac{x+y+z-1}{\sqrt{3}} \right| = \left| \frac{x-y+z+1}{-\sqrt{3}} \right| \\ & \Longleftrightarrow \quad \frac{|x+y+z-1|}{\sqrt{3}} = \frac{|x-y+z+1|}{\sqrt{3}} \\ & \Longleftrightarrow \quad |x+y+z-1| = |x-y+z+1| \\ & \Longleftrightarrow \quad x+y+z-1 = \pm\,(x-y+z+1) \\ & \Longleftrightarrow \quad x+y+z-1 = x-y+z+1 \\ & \qquad\qquad \text{oder} \quad x+y+z-1 = -x+y-z-1 \\ & \Longleftrightarrow \quad 2\,y = 2 \quad \text{oder} \quad 2\,x + 2\,z = 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad y = 1 \quad \text{oder} \quad x + z = 0; \end{aligned}$$

somit ist P die Vereinigung der beiden Ebenen $E_3 : y = 1$ und $E_4 : x+z = 0$ mit den Parameterformen

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7.13 a) Die gegebene Ebene

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + 2\,y + 3\,z = 1 \right\},$$

besitzt den Normalenvektor

$$\widetilde{u}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{der Länge} \qquad \|\widetilde{u}_E\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

und damit die Hessesche Normalform

$$E \quad : \quad \frac{x + 2\,y + 3\,z - 1}{\sqrt{14}} = 0;$$

die gegebene Gerade

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}.$$

besitzt den Trägerpunkt t_G und den Richtungsvektor u_G mit

$$t_G = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_G = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\widetilde{u}_E \circ u_G = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = 0$$

steht der Richtungsvektor u_G der Geraden G senkrecht auf dem Normalenvektor $\widetilde{u}_E$ der Ebene E und ist demnach auch ein Richtungsvektor der Ebene E; folglich sind aber E und G parallel.

b) Da gemäß a) die E und G parallel sind, stimmt der euklidische Abstand der Geraden G von der Ebene E mit dem euklidischen Abstand eines beliebigen Punktes auf G von E überein; mit der bereits in a) bestimmten Hesseschen Normalform von E ergibt sich also

$$d(G, E) = d\,(t_G, E) = \left| \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 1}{\sqrt{14}} \right| = \frac{5}{\sqrt{14}}.$$

7.14 a) Die Gerade g_1 besitzt den Trägerpunkt $t_1 = A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sowie den Richtungsvektor $u_1 = B - A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$. Die Gerade g_2 besitzt den Trägerpunkt $t_2 = C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ sowie den Richtungsvektor $u_2 = v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Zunächst ergibt sich für die Ebene, die die Gerade g_1 enthält und parallel zur Geraden g_2 ist, die Parameterdarstellung

$$E = t_1 + \mathbb{R} \cdot u_1 + \mathbb{R} \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Normalenvektor

$$\widetilde{u}_E = u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich für E die Gleichung

$$\widetilde{u}_E \circ x = \widetilde{u}_E \circ t_1, \quad \text{also} \quad -8\,x_1 - 4\,x_2 + x_3 = 2$$

b) Wegen $\|\widetilde{u}_E\| = \sqrt{(-8)^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{81} = 9$ und $\widetilde{u}_E \circ t_1 > 0$ besitzt E die Hessesche Normalform

$$\frac{-8\,x_1 - 4\,x_2 + x_3 - 2}{9} = 0.$$

Da die Gerade g_2 parallel zur Ebene E ist, ergibt sich für den Abstand zwischen g_2 und E

$$d(g_2, E) = d(t_2, E) = \left| \frac{-8 \cdot 3 - 4 \cdot 2 + 1 \cdot 7 - 2}{9} \right| = \left| \frac{-27}{9} \right| = 3.$$

Die Ebene E zerlegt den $\mathbb{R}^3$ in zwei offene Halbräume, nämlich

$$E_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \widetilde{u}_0 \circ (x - t_1) < 0 \right\}$$

und

$$E_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \widetilde{u}_0 \circ (x - t_1) > 0 \right\}.$$

Wegen

$$\widetilde{u}_0 \circ (t_2 - t_1) = -3 < 0 \quad \text{ist} \quad t_2 \in E_0$$

und

$$\widetilde{u}_0 \circ (0 - t_1) = -\frac{2}{9} < 0 \quad \text{ist} \quad 0 \in E_0$$

liegt die Gerade g_2 auf derselben Seite von E wie der Ursprung.

7.15 a) Eine Ebene $F \subseteq \mathbb{R}^3$ enthält genau dann die drei Punkte

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

wenn sie den Trägerpunkt a sowie die Richtungsvektoren

$$u_1 = b - a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_2 = c - a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

besitzt; da u_1, u_2 linear unabhängig sind, bilden sie die Basis eines zweidimensionalen Richtungsraums, und folglich ist F eindeutig bestimmt. Es ist offensichtlich $\widetilde{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ein Normalenvektor von F, und wir erhalten für die Ebene F die Gleichung

$$\widetilde{u} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \widetilde{u} \circ a \qquad \text{bzw.} \qquad x = 2.$$

b) Der Durchschnitt $g = E \cap F$ der beiden Ebenen E und F besteht genau aus denjenigen Punkten von $\mathbb{R}^3$, die sowohl der Gleichung $x + 2\,y + 3\,z = 2$ von E als auch der Gleichung $x = 2$ von F genügen, und stimmt daher mit der Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{cccccccccc} E & : & x & + & 2\,y & + & 3\,z & = & 2 \\ F & : & x & & & & & = & 2 \end{array}$$

überein; wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \underset{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right) \underset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

ergibt sich die Gerade $g = t_g + \mathbb{R} \cdot u_g$ mit

$$t_g = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_g = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Der kürzeste Abstand zwischen der Geraden g und der y–Achse $h = \mathbb{R} \cdot u_h$ mit $u_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ wird von den beiden Lotfußpunkten x_g und x_h der gemeinsamen Lotgeraden ℓ realisiert, die offensichtlich den Richtungsvektor $u_\ell = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ besitzt. Damit ergibt sich

$$x_h = \lambda \cdot u_h \qquad \text{mit} \qquad \underbrace{\lambda \cdot u_h + \tau \cdot u_\ell}_{\in \ell} = x_g = \underbrace{t_g + \mu \cdot u_g}_{\in g},$$

also

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \tau \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3\mu \\ 2\mu \end{pmatrix};$$

damit ist $\tau = 2$ sowie $\mu = 0$ und $\lambda = 0$, und wir erhalten

$$x_g = t_g + 0 \cdot u_g = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad x_h = 0 \cdot u_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und folglich den minimalen Abstand

$$\operatorname{dist}(g,h) = \operatorname{dist}(x_g, x_h) = \|x_g - x_h\| = 2.$$

7.16 Im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sind die beiden Geraden $g = t_g + \mathbb{R} \cdot u_g$ und $h = \mathbb{R} \cdot u_h$ mit

$$t_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad u_g = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_h = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Damit besitzt jeder Punkt $p \in g$ die Gestalt

$$p = t_g + \lambda \cdot u_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,\lambda \\ 1 + 3\,\lambda \\ 5 + \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{für ein} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

und jeder Punkt $q \in h$ besitzt die Gestalt

$$q = \mu \cdot u_h = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix} \qquad \text{für ein} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Die Annahme $p = q$ führt zu den drei Bedingungen

$$2\,\lambda = \mu \qquad \text{und} \qquad 1 + 3\,\lambda = \mu \qquad \text{und} \qquad 5 + \lambda = \mu,$$

damit einerseits zu

$$1 + 3\,\lambda = \mu = 2\,\lambda \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda = -1$$

und andererseits zu

$$5 + \lambda = \mu = 2\,\lambda \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda = 5,$$

insgesamt also zu einem Widerspruch; folglich sind p und q verschiedene Punkte, und für den Richtungsvektor ihrer Verbindungsgeraden k gilt

$$u_k = p - q = \begin{pmatrix} 2\,\lambda \\ 1 + 3\,\lambda \\ 5 + \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,\lambda - \mu \\ 1 + 3\,\lambda - \mu \\ 5 + \lambda - \mu \end{pmatrix}.$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned} g \perp k \quad &\Longleftrightarrow \quad u_g \circ u_k = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2 \cdot (2\,\lambda - \mu) + 3 \cdot (1 + 3\,\lambda - \mu) + 1 \cdot (5 + \lambda - \mu) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 4\,\lambda - 2\,\mu + 3 + 9\,\lambda - 3\,\mu + 5 + \lambda - \mu = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 14\,\lambda - 6\,\mu + 8 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 7\,\lambda - 3\,\mu + 4 = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} h \perp k \quad &\Longleftrightarrow \quad u_h \circ u_k = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 1 \cdot (2\,\lambda - \mu) + 1 \cdot (1 + 3\,\lambda - \mu) + 1 \cdot (5 + \lambda - \mu) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2\,\lambda - \mu + 1 + 3\,\lambda - \mu + 5 + \lambda - \mu = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 6\,\lambda - 3\,\mu + 6 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \mu = 2\,\lambda + 2, \end{aligned}$$

was zu

$$7\,\lambda - 3\cdot(2\,\lambda+2)+4=0, \quad \text{also} \quad \lambda=2, \quad \text{und damit} \quad \mu=6$$

führt. Die gesuchten Punkte sind folglich

$$p=\begin{pmatrix}4\\7\\7\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad q=\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix}.$$

7.17 Es ist $g_1 = t_1 + \mathbb{R}\,u_1$ und $g_2 = t_2 + \mathbb{R}\,u_2$ mit

$$t_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \text{ und } u_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad t_2=\begin{pmatrix}5\\2\\2\end{pmatrix} \text{ und } u_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

Da die Richtungsvektoren u_1, u_2 linear unabhängig sind, können die Geraden g_1 und g_2 nicht parallel sein, und die gemeinsame Lotgerade ℓ der Geraden g_1 und g_2 besitzt den Richtungsvektor

$$u_1\times u_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix};$$

seien x_1 und x_2 die Lotfußpunkte auf g_1 und g_2. Dabei besitzt x_1 (als Punkt von g_1) die Gestalt

$$x_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\tau\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

mit einem geeigneten $\tau\in\mathbb{R}$, wodurch sich für die gemeinsame Lotgerade

$$\ell = x_1+\mathbb{R}\cdot\widetilde{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\tau\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

ergibt; folglich erhält man für den Lotfußpunkt x_2 die Darstellungen

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\tau\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}}_{\in\ell}=\underbrace{\begin{pmatrix}5\\2\\2\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}}_{\in g_2}$$

mit geeigneten Parametern λ, $\mu\in\mathbb{R}$ und somit

$$\begin{pmatrix}1&3&-1\\1&-1&1\\1&-2&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\tau\\\lambda\\\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&4\\1&-1&1&0\\1&-2&-2&-1\end{array}\right)\underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\leadsto}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-2&-1\\1&-1&1&0\\1&3&-1&4\end{array}\right)\underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\leadsto}}$$

$$\leadsto\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-2&-1\\0&1&3&1\\0&5&1&5\end{array}\right)\underset{\mathrm{III}-5\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{I}+2\mathrm{II}}{\leadsto}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&4&1\\0&1&3&1\\0&0&-14&0\end{array}\right)$$

erhält man $\mu = 0$ sowie $\lambda = 1$ und $\tau = 1$, so daß sich die Lotfußpunkte

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ergeben. Für den Abstand der beiden Geraden gilt damit

$$d(g_1, g_2) = d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{14}.$$

7.18 a) Es ist $g_1 = t_1 + \mathbb{R}\, u_1$ und $g_2 = t_2 + \mathbb{R}\, u_2$ mit

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ und } u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad t_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ und } u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Da die Richtungsvektoren u_1, u_2 linear unabhängig sind, können die Geraden g_1 und g_2 nicht parallel sein. Zudem gibt es unter der Annahme, daß sich g_1 und g_2 schneiden, Parameter α und $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

was zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

führt, das jedoch wegen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 8 \\ -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}+\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 10 \\ 0 & -4 & -2 \end{array}\right) \underset{\text{III}-4\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -42 \end{array}\right)$$

keine Lösung besitzt. Folglich sind g_1 und g_2 windschief.

b) Die gemeinsame Lotgerade ℓ der Geraden g_1 und g_2 besitzt den Richtungsvektor

$$u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix};$$

seien x_1 und x_2 die Lotfußpunkte auf g_1 und g_2. Dabei besitzt x_1 (als Punkt von g_1) die Gestalt

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit einem geeigneten $\tau \in \mathbb{R}$, wodurch sich für die gemeinsame Lotgerade

$$\ell = x_1 + \mathbb{R} \cdot \widetilde{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ergibt; folglich erhält man für den Lotfußpunkt x_2 die Darstellungen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in \ell} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in g_2}$$

mit geeigneten Parametern λ, $\mu \in \mathbb{R}$ und somit

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & -2 \\ 1 & -4 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{II}-\text{I}}{\underset{\text{III}+\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & -9 & -1 & 10 \\ 0 & 6 & -4 & -2 \end{array}\right) \overset{\text{III}\cdot\frac{1}{2}}{\underset{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -9 & -1 & 10 \end{array}\right) \overset{\text{III}+3\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right)$$

erhält man $\mu = -1$, $\lambda = -1$ und $\tau = 2$, so daß sich

$$x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ergibt. Für die Lotgerade erhält man damit

$$\ell = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Es ist

$$d(g_1, g_2) = d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{42}.$$

7.19 Für die Gerade L im euklidischen $\mathbb{R}^3$ durch die Punkte P_1 und P_2 ergibt sich die Parameterdarstellung $L = t_L + \mathbb{R} \cdot u_L$ mit

$$t_L = P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_L = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

die Schnittgerade $M = E_1 \cap E_2$ ist genau die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & z & = & 0 \\ 2\,x & + & y & & & = & 0 \end{array}$$

und besitzt damit wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}-2\mathrm{I}}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

die Parameterdarstellung $M = t_M + \mathbb{R} \cdot u_M$ mit

$$t_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_M = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die gemeinsame Lotgerade G der Geraden L und M besitzt den Richtungsvektor

$$u_L \times u_M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \widetilde{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};$$

seien L_0 und M_0 die Lotfußpunkte auf L und M. Dabei besitzt M_0 (als Punkt von M) die Gestalt

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit einem geeigneten $\mu \in \mathbb{R}$, wodurch sich für die gemeinsame Lotgerade

$$G = M_0 + \mathbb{R} \cdot \widetilde{u} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ergibt; folglich erhält man für den Lotfußpunkt L_0 die Darstellungen

$$\underbrace{\mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\in G} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in L}$$

mit geeigneten Parametern τ, $\lambda \in \mathbb{R}$ und somit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu \\ \tau \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+2\mathrm{I}}{\leadsto}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}+\mathrm{II}}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

erhält man $\lambda = 0$, $\tau = 1$ und $\mu = 0$, so daß sich

$$L_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad M_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt. Für den Abstand der Geraden L und M gilt damit

$$d(L, M) = d(L_0, M_0) = \|L_0 - M_0\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}.$$

7.20 a) Ein lineares Gleichungssystem $A \cdot x = b$, dessen Lösungsmenge eine Gerade $g = t + \mathbb{R} \cdot u \subseteq \mathbb{R}^3$ ist, besteht aus mindestens zwei Gleichungen mit genau drei Unbestimmten. Wir ermitteln daher eine geeignete Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und eine geeignete rechte Seite $b \in \mathbb{R}^2$; dabei ist

- der Richtungsraum $\mathbb{R} \cdot u$ von g der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ und
- der Trägerpunkt t von g eine beliebige partikuläre Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $A \cdot x = b$.

Die lineare Gleichung $a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot z = 0$ besitzt genau dann die Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

wenn $a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 2 = 0$ gilt; dies führt auf das homogene lineare Gleichungssystem $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right)$ mit den Basislösungen

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wählen daher

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

und

$$b = A \cdot t = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Das gesuchte lineare Gleichungssystem ist also

$$\begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & & & + & z & = & 1 \\ & & y & & & = & 2 \end{array}.$$

b) Es ist $g_1 = t_1 + \mathbb{R}\,u_1$ und $g_2 = t_2 + \mathbb{R}\,u_2$ mit

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad t_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die gemeinsame Lotgerade ℓ der Geraden g_1 und g_2 besitzt wegen

$$u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$$

etwa den Richtungsvektor

$$\widetilde{u} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Seien x_1 und x_2 die Lotfußpunkte auf g_1 und g_2. Dabei besitzt x_1 (als Punkt von g_1) die Gestalt

$$x_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

mit einem geeigneten $\lambda \in \mathbb{R}$, wodurch sich für die gemeinsame Lotgerade

$$\ell = x_1 + \mathbb{R} \cdot \widetilde{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

ergibt; folglich erhält man für den Lotfußpunkt x_2 die Darstellungen

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\in \ell} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}}_{\in g_2}$$

mit geeigneten Parametern τ, $\mu \in \mathbb{R}$ und somit

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 1 & 0\\2 & 0 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\lambda\\\tau\\\mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -2 & 0\\0 & 1 & 0 & -1\\2 & 0 & -1 & -2\end{array}\right) \underset{\text{III}-2\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -2 & 0\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 3 & -2\end{array}\right)$$

erhält man $\lambda = -\frac{4}{3}$ sowie $\tau = -1$ und $\mu = -\frac{2}{3}$, so daß sich die Lotfußpunkte

$$x_1 = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\2\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad x_2 = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

ergeben.

7.21 a) Wir konstruieren zwei nicht parallele Geraden g durch $x_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und h durch $y_0 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, die auf der Verbindungsgeraden ℓ der Punkte x_0 und y_0

senkrecht stehen; diese besitzt die Parameterdarstellung

$$\ell = x_0 + \mathbb{R} \cdot \widetilde{u} \qquad \text{mit} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \widetilde{u} = y_0 - x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren

$$u_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sind offensichtlich linear unabhängig sowie wegen $u_g \circ \widetilde{u} = 0$ und $u_h \circ \widetilde{u} = 0$ zu $\widetilde{u}$ orthogonal, so daß die beiden Geraden

$$g = x_0 + \mathbb{R} \cdot u_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$h = y_0 + \mathbb{R} \cdot u_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nicht parallel sind und die gemeinsame Lotgerade ℓ mit den Lotfußpunkten x_0 und y_0 besitzen; damit gilt

$$d(g, h) = d(x_0, y_0) > 0,$$

so daß g und h keinen gemeinsamen Punkt besitzen können.

b) Für den Abstand zwischen g und h ergibt sich

$$d(g, h) = d(x_0, y_0) = \|y_0 - x_0\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}.$$

7.22 Im $\mathbb{R}^3$ sind die drei Geraden

$$g_1 = t_1 + \mathbb{R} \cdot u_1, \qquad g_2 = t_2 + \mathbb{R} \cdot u_2, \qquad g_3 = t_3 + \mathbb{R} \cdot u_3$$

mit

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; t_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; t_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_3 = u_1$$

zu betrachten.

a) Die gemeinsame Lotgerade ℓ von g_1 und g_2 besitzt den Richtungsvektor

$$\widetilde{u} = u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

seien x_1 und x_2 die Lotfußpunkte auf g_1 und g_2. Dabei besitzt x_2 (als Punkt von g_2) die Gestalt

$$x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit einem geeigneten $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, wodurch sich für die gemeinsame Lotgerade

$$\ell = x_2 + \mathbb{R} \cdot \widetilde{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ergibt; folglich erhält man für den Lotfußpunkt x_1 die Darstellungen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\in \ell} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in g_1}$$

mit geeigneten Parametern τ_1, $\mu_1 \in \mathbb{R}$ und somit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \underset{\text{III}-2\text{I}}{\overset{\text{II}+\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{2}\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \overset{\text{III}-\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

erhält man $\mu_1 = 2$, $\lambda_1 = 2$ und $\tau_1 = 1$, so daß sich

$$x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ergibt. Die eindeutig bestimmte Lotgerade von g_1 und g_2 ist damit

$$\ell = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die gemeinsame Lotgerade ℓ' von g_2 und g_3 besitzt (wegen $u_3 = u_1$) ebenfalls den Richtungsvektor $\widetilde{u}$; seien x_2' und x_3 die Lotfußpunkte auf g_2 und g_3. Dabei besitzt x_2' (als Punkt von g_2) die Gestalt

$$x_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit einem geeigneten $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, wodurch sich für die gemeinsame Lotgerade

$$\ell' = x_2' + \mathbb{R} \cdot \widetilde{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ergibt; folglich erhält man für den Lotfußpunkt x_3 die Darstellungen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\in \ell'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in g_3}$$

mit geeigneten Parametern τ_2, $\mu_2 \in \mathbb{R}$ und somit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau_2 \\ \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \underset{\text{III}-2\text{I}}{\overset{\text{II}+\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{2}\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{\text{III}-\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

erhält man $\mu_2 = 0$, $\lambda_2 = 2$ und $\tau_2 = -2$, so daß sich

$$x_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = x_2 \qquad \text{und} \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ergibt. Die eindeutig bestimmte Lotgerade von g_2 und g_3 ist damit

$$\ell' = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \ell.$$

b) Gemäß a) schneidet die Gerade ℓ die Gerade g_1 im Punkt x_1 und die Gerade g_3 im Punkt x_3; ferner steht der Richtungsvektor $\widetilde{u}$ von ℓ auf dem gemeinsamen Richtungsvektor $u_1 = u_3$ von g_1 und g_3 senkrecht; folglich ist ℓ ein gemeinsames Lot von g_1 und g_3. Da g_1 und g_3 parallel sind, ist ℓ nicht eindeutig bestimmt; für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ist nämlich

$$\ell_\alpha = (x_2 + \alpha \cdot u_1) + \mathbb{R} \cdot \widetilde{u}$$

ebenfalls eine gemeinsame Lotgerade von g_1 und g_3 (mit den Lotfußpunkten $x_1 + \alpha \cdot u_1$ und $x_3 + \alpha \cdot u_3$); wegen $u_1 \notin \mathbb{R} \cdot \widetilde{u}$ gilt $\ell_\alpha \neq \ell_{\alpha'}$ für $\alpha \neq \alpha'$.

7.23 Im euklidischen $\mathbb{R}^3$ sind die beiden (als windschief vorausgesetzten) Geraden

$$g_1 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu betrachten; für Punkte $a \in g_1$ und $b \in g_2$ gilt also

$$a = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\mu \\ 1-\mu \\ \mu \end{pmatrix}$$

mit geeigneten Parametern λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Die Verbindungsstrecke zwischen a und b liegt demnach auf einer Geraden mit den Richtungsvektor

$$u = b - a = \begin{pmatrix} 3\mu \\ 1-\mu \\ \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\mu - \lambda \\ 1-\mu \\ \mu - \lambda \end{pmatrix}$$

und ist demnach genau dann parallel zur x–y–Ebene $z = 0$ mit dem Normalenvektor $\widetilde{u} = e_3$, wenn $u \circ \widetilde{u} = 0$ ist; wegen

$$u \circ \widetilde{u} = 0 \iff \begin{pmatrix} 3\mu - \lambda \\ 1-\mu \\ \mu - \lambda \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \mu - \lambda = 0 \iff \mu = \lambda$$

trifft dies genau für $\mu = \lambda$ zu. In diesem Fall ist

$$u = \begin{pmatrix} 3\mu - \lambda \\ 1-\mu \\ \mu - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda - \lambda \\ 1-\lambda \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 1-\lambda \\ 0 \end{pmatrix},$$

so daß die Verbindungsstrecke von a und b die Länge

$$d(a,b) = \|u\| = \left\| \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 1-\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(2\lambda)^2 + (1-\lambda)^2 + 0^2} =$$
$$= \sqrt{4\lambda^2 + (1 - 2\lambda + \lambda^2)} = \sqrt{5\lambda^2 - 2\lambda + 1}$$

besitzt.

a) Wegen

$$\begin{aligned} d(a,b) = 2 \quad &\iff \quad \sqrt{5\lambda^2 - 2\lambda + 1} = 2 \\ &\iff \quad 5\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 4 \\ &\iff \quad 5\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \\ &\iff \quad \lambda_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-3)}}{2 \cdot 5} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{10} \\ &\iff \quad \lambda_1 = \frac{2+8}{10} = 1 \quad \text{oder} \quad \lambda_2 = \frac{2-8}{10} = -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

besitzen genau die beiden Punktepaare

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in g_1 \qquad \text{und} \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in g_2$$

sowie

$$a_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \in g_1 \qquad \text{und} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{5} \\ \frac{8}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \in g_2$$

die gewünschten Eigenschaften.

b) Die Länge $d(a,b) = \sqrt{5\lambda^2 - 2\lambda + 1}$ der Verbindungsstrecke von a und b wird genau dann minimal, wenn $d(a,b)^2 = 5\lambda^2 - 2\lambda + 1$ minimal wird; wegen

$$\begin{aligned} &5\lambda^2 - 2\lambda + 1 = \\ &\qquad = 5 \cdot \left(\lambda^2 - 2 \cdot \lambda \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2\right) - 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 1 = \\ &\qquad\qquad = 5 \cdot \left(\lambda - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{5} \end{aligned}$$

ist dies genau für $\lambda = \frac{1}{5}$ der Fall, und die minimale Länge beträgt demnach

$$\ell = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

7.24 a) Zu betrachten sind die beiden Geraden $g = t_g + \mathbb{R} \cdot u_g$ und $h = t_h + \mathbb{R} \cdot u_h$ mit

$$t_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_g = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad t_h = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad u_h = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie die als gemeinsame Lotgerade nachzuweisende Gerade $\ell = t_\ell + \mathbb{R} \cdot u_\ell$ mit

$$t_\ell = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_\ell = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zunächst ist u_ℓ wegen

$$u_g \circ u_\ell = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 = 0$$

und

$$u_h \circ u_\ell = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 = 0$$

sowohl zu u_g als auch zu u_h orthogonal; ferner schneiden sich g und ℓ in ihrem gemeinsamen Trägerpunkt $s_g = t_g = t_\ell$. Für den Schnittpunkt s_h von h und ℓ gilt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{s_h \in h} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{s_h \in \ell}$$

mit geeigneten Parametern $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, woraus sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

ergibt; wegen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -6 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -6 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 \\ 1 & -2 & -6 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}-2\mathrm{I}}{\underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}}$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -6 \end{array}\right) \underset{-\frac{1}{3}\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{\underset{\mathrm{III}+3\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ist $\lambda = -2$ und $\mu = 2$ und somit

$$s_h = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist ℓ die gemeinsame Lotgerade von g und h mit den Lotfußpunkten s_g und s_h, so daß sich für den Abstand d der beiden Geraden g und h dann

$$d = \|s_h - s_g\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$$

ergibt.

b) Wir betrachten zunächst eine beliebige Kugel K mit dem Mittelpunkt m und dem Radius r, die die beiden Geraden g und h berührt. Bezeichnen k_g und k_h die Berührpunkte von g und h mit der Kugel K, so gilt

$$d = \|s_h - s_g\| \leq \|k_h - k_g\| = \|(k_h - m) - (k_g - m)\| \leq$$
$$\leq \|k_h - m\| + \|k_g - m\| = r + r = 2r;$$

dabei geht ein, daß s_g und s_h die beiden Punkte auf g und h mit dem kleinsten Abstand sind. Folglich ist

$$r \geq \frac{d}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Wir weisen nun nach, daß dieser kleinstmögliche Radius $r_{\min} = 3$ von der Kugel mit dem Mittelpunkt

$$m_0 = \frac{s_g + s_h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

realisiert wird: da m_0 der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der beiden Lotfußpunkte s_g und s_h von ℓ auf g und h ist, berührt die Kugel um m_0 mit dem Radius

$$\|s_g - m\| = \|s_h - m\| = \frac{d}{2} = 3 = r_{\min}$$

die beiden Geraden g und h in den Punkten s_g und s_h.

7.25 Der Lotfußpunkt G des Punktes

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

auf die Gerade

$$g = t_g + \mathbb{R} \cdot u_g \qquad \text{mit} \qquad t_g = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_g = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

besitzt (als Punkt der Geraden g) die Gestalt

$$G = \begin{pmatrix} 5 - 2\,\lambda \\ 7 + 3\,\lambda \\ 8 + 2\,\lambda \end{pmatrix}$$

für einen Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$; damit ist

$$G - P = \begin{pmatrix} 5 - 2\,\lambda \\ 7 + 3\,\lambda \\ 8 + 2\,\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 2\,\lambda \\ 5 + 3\,\lambda \\ 5 + 2\,\lambda \end{pmatrix}$$

ein Richtungsvektor der Lotgeraden von P auf g, der allerdings auf dem Richtungsvektor u_g der Geraden g senkrecht stehen muß. Aus

$$0 = u_g \circ (G - P) = -2\,(4 - 2\,\lambda) + 3\,(5 + 3\,\lambda) + 2\,(5 + 2\,\lambda) = 17 + 17\,\lambda$$

ergibt sich $\lambda = -1$ und damit

$$G = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist der Abstand $d(P, g)$ des Punktes P von der Geraden g

$$d(P, g) = d(P, G) = \|G - P\| = \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7.$$

Des weiteren besitzt die Ebene
$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 3\,x + 2\,y - 6\,z = 38 \right\}$$
den Normalenvektor
$$\widetilde{u}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix},$$
so daß man für die Lotgerade ℓ des Punktes P auf die Ebene E die Parameterdarstellung
$$\ell = P + \mathbb{R} \cdot \widetilde{u}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$
und damit für den Lotfußpunkt $H \in \ell$ die Gestalt
$$H = \begin{pmatrix} 1 + 3\,\mu \\ 2 + 2\,\mu \\ 3 - 6\,\mu \end{pmatrix}$$
für einen Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ erhält; wegen $H \in E$ ist
$$3 \cdot (1 + 3\,\mu) + 2 \cdot (2 + 2\,\mu) - 6 \cdot (3 - 6\,\mu) = 38,$$
also $-11 + 49\,\mu = 38$, woraus $\mu = 1$ und damit
$$H = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$
Folglich ist der Abstand $d(P,E)$ des Punktes P von der Ebene E
$$d(P,E) = d(P,H) = \|H - P\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2} = \sqrt{49} = 7.$$
Insgesamt besitzt also der Punkt P sowohl von der Geraden g als auch von der Ebene E den Abstand 7; folglich berührt die Kugel K um dem Mittelpunkt P und dem Radius $r = 7$ die Gerade g im Punkt G und die Ebene E im Punkt H.

7.26 Im euklidischen $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die Ursprungsebene $E = \langle e_1 + e_2,\ e_3 + e_4 \rangle$ sowie den Punkt $P = \sqrt{2}\,e_1 \notin E$. Der Lotfußpunkt x_0 von P in der Ebene E besitzt die Gestalt
$$x_0 = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix}$$
mit geeigneten Parametern λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Damit ist
$$u_\ell = x_0 - P = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \sqrt{2} \\ \lambda \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix}$$

ein Richtungsvektor der Lotgeraden ℓ, der allerdings auf den beiden Richtungsvektoren $e_1 + e_2$ und $e_3 + e_4$ der Ebene senkrecht stehen muß. Es ist also

$$u_\ell \perp e_1 + e_2 \iff \begin{pmatrix} \lambda - \sqrt{2} \\ \lambda \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda - \sqrt{2} + \lambda = 0 \iff \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

sowie

$$u_\ell \perp e_3 + e_4 \iff \begin{pmatrix} \lambda - \sqrt{2} \\ \lambda \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \mu + \mu = 0 \iff \mu = 0.$$

Damit ist $x_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, und für den Abstand $d(P, E)$ des Punktes P von der Ebene E ergibt sich

$$d(P,E) = d(P, x_0) = \|x_0 - P\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| =$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 + 0^2} = 1.$$

7.27 In $\mathbb{R}^4$ sind die beiden Geraden $g = t_g + \mathbb{R} \cdot u_g$ und $h = t_h + \mathbb{R} \cdot u_h$ mit

$$t_g = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad u_g = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t_h = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_h = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Damit besitzt jeder Punkt P_g auf g die Gestalt

$$P_g = t_g + \alpha \cdot u_g = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + \alpha \\ -2 - \alpha \\ 3 + 2\alpha \\ 5 \end{pmatrix}$$

für ein $\alpha \in \mathbb{R}$, und jeder Punkt P_h auf h ist von der Gestalt

$$P_h = t_h + \beta \cdot u_h = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 - \beta \\ 2 - \beta \\ 3 + 3\beta \end{pmatrix}$$

für ein $\beta \in \mathbb{R}$; für den Verbindungsvektor $\widetilde{u} = \overrightarrow{P_g P_h}$ ergibt sich damit

$$\widetilde{u} = P_h - P_g = \begin{pmatrix} -1 \\ 2-\beta \\ 2-\beta \\ 3+3\beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+\alpha \\ -2-\alpha \\ 3+2\alpha \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-\alpha \\ 4+\alpha-\beta \\ -1-2\alpha-\beta \\ -2+3\beta \end{pmatrix},$$

und es gilt zum einen

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{P_g P_h} \perp g \iff \widetilde{u} \perp u_g \iff \widetilde{u} \circ u_g = 0 \iff \\ &\quad (-5-\alpha)\cdot 1 + (4+\alpha-\beta)\cdot(-1) + (-1-2\alpha-\beta)\cdot 2 + (-2+3\beta)\cdot 0 = 0 \\ &\qquad \iff -5-\alpha-4-\alpha+\beta-2-4\alpha-2\beta = 0 \iff -6\alpha-\beta = 11 \end{aligned}$$

und zum anderen

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{P_g P_h} \perp h \iff \widetilde{u} \perp u_h \iff \widetilde{u} \circ u_h = 0 \iff \\ &(-5-\alpha)\cdot 0 + (4+\alpha-\beta)\cdot(-1) + (-1-2\alpha-\beta)\cdot(-1) + (-2+3\beta)\cdot 3 = 0 \\ &\qquad \iff -4-\alpha+\beta+1+2\alpha+\beta-6+9\beta = 0 \iff \alpha+11\beta = 9. \end{aligned}$$

Damit steht der Verbindungsvektor $\overrightarrow{P_g P_h}$ genau dann sowohl auf g als auch auf h senkrecht, wenn die Parameter α und β das lineare Gleichungssystem

$$-6\alpha - \beta = 11 \qquad \text{und} \qquad \alpha + 11\beta = 9$$

lösen, wegen

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cc|c} -6 & -1 & 11 \\ 1 & 11 & 9 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 11 & 9 \\ -6 & -1 & 11 \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}+6\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \\ &\qquad \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 11 & 9 \\ 0 & 65 & 65 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{65}\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 11 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}-11\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{aligned}$$

also genau für $\alpha = -2$ und $\beta = 1$. Die sich ergebenden Punkte

$$P_g = \begin{pmatrix} 4+(-2) \\ -2-(-2) \\ 3+2\cdot(-2) \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad P_h = \begin{pmatrix} -1 \\ 2-1 \\ 2-1 \\ 3+3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

sind die Lotfußpunkte der gemeinsamen Lotgeraden ℓ von g und h, so daß man für deren Abstand

$$\begin{aligned} d(g,h) = d(P_g, P_h) = \|P_h - P_g\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \\ = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9+1+4+1} = \sqrt{15} \end{aligned}$$

erhält.

7.28 Für die im $\mathbb{R}^4$, versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$, gegebenen Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

werden die (affine) Ebene $U = u_1 + \mathbb{R} \cdot u_2 + \mathbb{R} \cdot u_3$ mit dem Trägerpunkt u_1 und dem Richtungsraum $\langle u_2, u_3 \rangle$ und die (affine) Gerade $V = v_1 + \mathbb{R} \cdot v_2$ mit dem Trägerpunkt v_1 und dem Richtungsraum $\langle v_2 \rangle$ betrachtet; ferner ist

$$W = \mathbb{R} \cdot u_2 + \mathbb{R} \cdot u_3 + \mathbb{R} \cdot v_2 = \langle u_2, u_3 \rangle + \langle v_2 \rangle$$

die Summe der beiden Richtungsräume.

a) Das orthogonale Komplement $W^\perp$ von $W = \langle u_2, u_3, v_2 \rangle$ in $\mathbb{R}^4$ stimmt mit dem Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $B^\top \cdot x = 0$ mit der Hilfsmatrix $B = (u_2, u_3, v_2) \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ überein; wegen

$$B^\top = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -4 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+3\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-2\cdot\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}+2\cdot\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

ist

$$\widetilde{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

eine Basis von $W^\perp$.

b) Für den Abstand der beiden affinen Teilmengen U und V von $\mathbb{R}^4$ gilt

$$\operatorname{dist}(U, V) = \operatorname{dist}(u_0, v_0) = \|u_0 - v_0\|,$$

wobei $u_0 \in U$ und $v_0 \in V$ die Lotfußpunkte einer gemeinsamen Lotgeraden ℓ von U und V bezeichnen; diese besitzt gemäß a) den Richtungsvektor $\widetilde{w}$. Als Trägerpunkt kann der Lotfußpunkt $u_0 \in U$ gewählt werden, der (als Punkt auf U) die Gestalt

$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

mit geeigneten Parametern α, $\beta \in \mathbb{R}$ besitzt, wobei sich dann für den Lotfußpunkt v_0 die beiden Darstellungen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in \ell} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in V}$$

mit geeigneten Parametern $\gamma,\ \tau \in \mathbb{R}$ ergeben. Wir erhalten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & -2 \\ 3 & -6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

welches wegen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{III}+2\cdot\text{I},\ \text{IV}+3\cdot\text{I}}{\overset{\text{II}+\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-3\cdot\text{II}}{\overset{\text{III}-2\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -5 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-2\cdot\text{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right)$$

die Lösung $\tau = \frac{1}{2}$, $\gamma = -2$, $\beta = -\frac{3}{2}$, $\alpha = -\frac{7}{2}$ besitzt; folglich ist

$$u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad u_0 - v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und damit $\operatorname{dist}(U, V) = \|u_0 - v_0\| = \frac{1}{2}\sqrt{6}$.

7.29 Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^4$, versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$, ist die affine Ebene X durch die Punkte

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

sowie die affine Teilmenge

$$Y = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 - x_3 = 0 \ \text{ und } \ x_2 + 2x_4 = 5 \right\}$$

zu betrachten.

a) Die affine Ebene X besitzt etwa den Trägerpunkt p_2 sowie die beiden (linear unabhängigen) Richtungsvektoren $u_1 = p_1 - p_2$ und $u_2 = p_3 - p_2$, insgesamt also die Parameterdarstellung

$$X = p_2 + \mathbb{R} \cdot u_1 + \mathbb{R} \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ein Punkt $s \in X \cap Y$ müßte nun zum einen wegen $s \in X$ die Gestalt

$$s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda + \mu \\ 1 + \lambda - \mu \\ \lambda + \mu \end{pmatrix}$$

mit geeigneten λ, $\mu \in \mathbb{R}$ besitzen und zum anderen wegen $s \in Y$ den beiden Gleichungen $2x_1 - x_3 = 0$ und $x_2 + 2x_4 = 5$ genügen; dies führt zu

$$\begin{aligned} 2\lambda - (1 + \lambda - \mu) &= 0 \qquad \text{bzw.} \qquad & \lambda + \mu &= 1 \\ (\lambda + \mu) + 2(\lambda + \mu) &= 5 \qquad \text{bzw.} \qquad & 3(\lambda + \mu) &= 5 \end{aligned}$$

und damit in $3 = 3(\lambda+\mu) = 5$ zu einem Widerspruch. Folglich ist $X \cap Y = \emptyset$. Ferner ist Y die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \end{array} \right),$$

und über die freien Variablen x_3 und x_4 ergibt sich die Parameterdarstellung

$$Y = t + \mathbb{R} \cdot u_3 + \mathbb{R} \cdot u_4$$

mit

$$t = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4;$$

da u_3, u_4 linear unabhängig sind, ist auch Y eine affine Ebene. Damit wären X und Y genau dann parallel, wenn für ihre beiden Richtungsräume $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_3, u_4 \rangle$ gelten würde; dies ist aber wegen

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\beta \\ 2\alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid \alpha,\ \beta \in \mathbb{R} \right\} = \langle u_3, u_4 \rangle$$

nicht der Fall. Folglich sind X und Y nicht parallel, insgesamt also windschief.

b) Zur Ermittlung des Abstands von X und Y betrachten wir die Lotfußpunkte $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$ einer gemeinsamen Lotgeraden ℓ von X und Y. Damit ist zum einen

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda + \mu \\ 1 + \lambda - \mu \\ \lambda + \mu \end{pmatrix} \in X$$

mit geeigneten λ, $\mu \in \mathbb{R}$ und zum anderen

$$y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5-2\beta \\ 2\alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in Y$$

mit geeigneten α, $\beta \in \mathbb{R}$, und für den Differenzvektor

$$\widetilde{u} = x_0 - y_0 = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda+\mu \\ 1+\lambda-\mu \\ \lambda+\mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ 5-2\beta \\ 2\alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-\alpha \\ \lambda+\mu+2\beta-5 \\ \lambda-\mu-2\alpha+1 \\ \lambda+\mu-\beta \end{pmatrix}$$

gilt (als Richtungsvektor von ℓ) sowohl $\widetilde{u} \perp X$ als auch $\widetilde{u} \perp Y$, also

$$\underbrace{\widetilde{u} \circ u_1 = 0 \quad \text{und} \quad \widetilde{u} \circ u_2 = 0}_{\text{wegen } \widetilde{u} \perp X} \quad \text{sowie} \quad \underbrace{\widetilde{u} \circ u_3 = 0 \quad \text{und} \quad \widetilde{u} \circ u_4 = 0}_{\text{wegen } \widetilde{u} \perp Y}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \widetilde{u} \circ u_1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda-\alpha \\ \lambda+\mu+2\beta-5 \\ \lambda-\mu-2\alpha+1 \\ \lambda+\mu-\beta \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (\lambda-\alpha) + (\lambda+\mu+2\beta-5) + \\ &\qquad\qquad +(\lambda-\mu-2\alpha+1) + (\lambda+\mu-\beta) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 4\lambda + \mu - 3\alpha + \beta = 4 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \widetilde{u} \circ u_2 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda-\alpha \\ \lambda+\mu+2\beta-5 \\ \lambda-\mu-2\alpha+1 \\ \lambda+\mu-\beta \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (\lambda+\mu+2\beta-5) - (\lambda-\mu-2\alpha+1) + (\lambda+\mu-\beta) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \lambda + 3\mu + 2\alpha + \beta = 6 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \widetilde{u} \circ u_3 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda-\alpha \\ \lambda+\mu+2\beta-5 \\ \lambda-\mu-2\alpha+1 \\ \lambda+\mu-\beta \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (\lambda-\alpha) + 2(\lambda-\mu-2\alpha+1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 3\lambda - 2\mu - 5\alpha = -2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \widetilde{u} \circ u_4 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda-\alpha \\ \lambda+\mu+2\beta-5 \\ \lambda-\mu-2\alpha+1 \\ \lambda+\mu-\beta \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad -2(\lambda+\mu+2\beta-5) + (\lambda+\mu-\beta) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad -\lambda - \mu - 5\beta = -10 \end{aligned}$$

führen diese Bedingungen auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -5 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix};$$

wegen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & -5 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}\leftrightarrow -\mathrm{IV}}{\leadsto} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 & 10 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & -5 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right) \leadsto$$

$$\underset{\mathrm{III}-3\mathrm{I},\ \mathrm{IV}-4\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\leadsto}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & -5 & -5 & -15 & -32 \\ 0 & -3 & -3 & -19 & -36 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}+\frac{5}{2}\mathrm{II},\ \mathrm{IV}+\frac{3}{2}\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{I}-\frac{1}{2}\mathrm{II}}{\leadsto}}$$

$$\leadsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 7 & 12 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -25 & -42 \\ 0 & 0 & 0 & -25 & -42 \end{array}\right) \underset{\mathrm{IV}-\mathrm{III}}{\overset{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{II}}{\leadsto}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 7 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -25 & -42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \leadsto$$

$$\underset{-\frac{1}{25}\cdot\mathrm{III}}{\leadsto} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 7 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{42}{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}+2\mathrm{III}}{\overset{\mathrm{I}-7\mathrm{III}}{\leadsto}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{6}{25} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{34}{25} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{42}{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{25} + \tau \\ \frac{34}{25} - \tau \\ \tau \\ \frac{42}{25} \end{pmatrix} \qquad \text{für} \qquad \tau \in \mathbb{R}$$

und damit

$$\widetilde{u} = \begin{pmatrix} \lambda - \alpha \\ \lambda + \mu + 2\beta - 5 \\ \lambda - \mu - 2\alpha + 1 \\ \lambda + \mu - \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{6}{25} + \tau) - \tau \\ (\frac{6}{25} + \tau) + (\frac{34}{25} - \tau) + 2 \cdot \frac{42}{25} - 5 \\ (\frac{6}{25} + \tau) - (\frac{34}{25} - \tau) - 2\tau + 1 \\ (\frac{6}{25} + \tau) + (\frac{34}{25} - \tau) - \frac{42}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{25} \\ -\frac{1}{25} \\ -\frac{3}{25} \\ -\frac{2}{25} \end{pmatrix}.$$

Für den Abstand von X und Y erhalten wir demnach

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(X,Y) &= \operatorname{dist}(x_0, y_0) = \|x_0 - y_0\| = \|\widetilde{u}\| = \\ &= \left\| \begin{pmatrix} \frac{6}{25} \\ -\frac{1}{25} \\ -\frac{3}{25} \\ -\frac{2}{25} \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{25} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \\ &= \frac{1}{25}\sqrt{6^2 + (-1)^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \frac{1}{25}\sqrt{50} = \frac{1}{5}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

7.30 a) Für den Abstand $d(P,Q)$ des Punktes $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ zu dem in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ gegebenen Punkt $Q = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ gilt

$$d(P,Q) = \|P - Q\| = \left\| \begin{pmatrix} x-a \\ y-a \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2}.$$

Ferner besitzt die gegebene Ursprungsgerade $G = \mathbb{R} \cdot u_G$ mit dem Richtungsvektor $u_G = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ den Normalenvektor $\widetilde{u_G} = u_G^{\perp} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Länge $\|\widetilde{u}_g\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ und damit die Hessesche Normalform

$$G \quad : \quad \frac{x+y}{\sqrt{2}} = 0;$$

für den Abstand $d(P,G)$ des Punktes P zur Geraden G gilt demnach

$$d(P,G) = \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right|.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
P \in M_a \quad &\iff \quad d(P,Q) = d(P,G) \\
&\iff \quad \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} = \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right| \\
&\iff \quad (x-a)^2 + (y-a)^2 = \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} \right)^2 \\
&\iff \quad x^2 - 2\,a\,x + a^2 + y^2 - 2\,a\,y + a^2 = \frac{x^2 + 2\,x\,y + y^2}{2} \\
&\iff \quad 2\,x^2 - 4\,a\,x + 2\,y^2 - 4\,a\,y + 4\,a^2 = x^2 + 2\,x\,y + y^2 \\
&\iff \quad x^2 - 2\,x\,y + y^2 - 4\,a\,x - 4\,a\,y + 4\,a^2 = 0 \\
&\iff \quad (x-y)^2 - 4\,a\,(x+y) + 4\,a^2 = 0.
\end{aligned}$$

b) Mit Hilfe der in a) ermittelten Gleichung für die Menge M_a ergibt sich

$$\begin{pmatrix} v_a \\ 0 \end{pmatrix} \in M_a \iff (v_a - 0)^2 - 4\,a\,(v_a + 0) + 4\,a^2 = 0 \iff$$
$$\iff v_a^2 - 4\,a\,v_a + 4\,a^2 = 0 \iff (v_a - 2\,a)^2 = 0 \iff v_a = 2\,a$$

sowie

$$\begin{pmatrix} 0 \\ w_a \end{pmatrix} \in M_a \iff (0 - w_a)^2 - 4\,a\,(0 + w_a) + 4\,a^2 = 0 \iff$$
$$\iff w_a^2 - 4\,a\,w_a + 4\,a^2 = 0 \iff (w_a - 2\,a)^2 = 0 \iff w_a = 2\,a.$$

c) Für $a = 0$ besitzt die Menge M_a die Gleichung

$$(x-y)^2 = 0 \qquad \text{und damit} \qquad x - y = 0,$$

und stellt demnach eine (Ursprungs–)Gerade dar. Ist nun umgekehrt M_a eine Gerade, so enthält M_a mit den beiden Punkten $\begin{pmatrix} v_a \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ w_a \end{pmatrix}$ auch deren Mittelpunkt

$$\frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} v_a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ w_a \end{pmatrix} \right] \underset{\text{b)}}{=} \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2\,a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\,a \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix},$$

und über die in a) ermittelte Gleichung ergibt sich

$$(a-a)^2 - 4\,a\,(a+a) + 4\,a^2 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad -\,4\,a^2 = 0$$

und demnach $a = 0$.

7.31 Bei dem in euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ gegebenen Dreieck mit den Eckpunkten

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

handelt es sich wegen

$$(B-A) \circ (C-A) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

um ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel in A, also den Katheten AB und AC sowie der Hypotenuse BC.

a) Der Schwerpunkt S eines Dreiecks ergibt sich aus den Ecken A, B und C über

$$S = \frac{A+B+C}{3} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Der Umkreis eines rechtwinkligen Dreiecks stimmt mit dem Thaleskreis über der Hypotenuse überein; der Umkreismittelpunkt U ist demnach der Mittelpunkt der Hypotenuse, also

$$U = \frac{B+C}{2} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ferner sind die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks auch zwei seiner Höhen; der Höhenschnittpunkt H ist demnach die der Hypotenuse gegenüberliegende Ecke, also

$$H = A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Wir betrachten die Gerade

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2\,y = 0 \right\};$$

wegen $\frac{4}{3} - 2 \cdot \frac{2}{3} = 0$ liegt S auf g, wegen $2 - 2 \cdot 1 = 0$ liegt U auf g, und wegen $0 - 2 \cdot 0 = 0$ liegt auch H auf g. Folglich liegen alle drei Punkte auf einer gemeinsamen Geraden.

7.32 a) Die Gerade BC besitzt den Trägerpunkt $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und den Richtungsvektor

$$u = C - B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und damit den Normalenvektor

$$\widetilde{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{der Länge} \qquad \|\widetilde{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5,$$

so daß man für BC die Gleichung

$$\widetilde{u} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \widetilde{u} \circ B \qquad \text{bzw.} \qquad 3\,x + 4\,y = 12$$

und wegen $\widetilde{u} \circ B = 12 > 0$ die Hessesche Normalform

$$BC \quad : \quad \frac{3\,x + 4\,y - 12}{5} = 0$$

erhält. Als Abstand $d(P, BC)$ des Punktes $P = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $t \in \mathbb{R}$ von der Geraden BC erhält man damit

$$d(P, BC) = \left| \frac{3 \cdot t + 4 \cdot t - 12}{5} \right| = \left| \frac{7\,t - 12}{5} \right|.$$

b) Beim Inkreismittelpunkt I handelt es sich um denjenigen Punkt im Innern des gegebenen Dreiecks ABC, der von den drei Seiten AB, BC und CA denselben Abstand besitzt; damit liegt $I = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ im 1. Quadraten, seine Koordinaten s und t sind also positiv. Bei der Geraden AB bzw. CA durch den Ursprung $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie den Punkt $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ handelt es sich um die x–Achse bzw. die y–Achse mit der Hesseschen Normalform

$$AB \quad : \quad y = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad CA \quad : \quad x = 0,$$

woraus sich für die Abstände des Punktes I von AB und AC

$$d(I, AB) = |t| \underset{t>0}{=} t \qquad \text{und} \qquad d(I, CA) = |s| \underset{s>0}{=} s$$

ergibt. Aus $d(I, AB) = d(I, CA)$ folgt $t = s$ und damit $I = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$, so daß sich unter Verwendung des Ergebnisses von a) dann

$$\begin{aligned} d(I, BC) = d(I, AB) \quad &\Longleftrightarrow \quad \left| \frac{7\,t - 12}{5} \right| = t \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{7\,t - 12}{5} = t \ \text{ oder } \ \frac{7\,t - 12}{5} = -t \\ &\Longleftrightarrow \quad 7\,t - 12 = 5\,t \ \text{ oder } \ 7\,t - 12 = -5\,t \\ &\Longleftrightarrow \quad 2\,t = 12 \ \text{ oder } \ 12\,t = 12 \\ &\Longleftrightarrow \quad t = 6 \ \text{ oder } \ t = 1; \end{aligned}$$

da der Punkt I offensichtlich nur für $t = 1$ im Innern des Dreiecks ABC liegt, ist $I = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Inkreismittelpunkt, und für den Inkreisradius gilt

$$r = d(I, AB) = d(I, BC) = d(I, CA) = 1.$$

c) Für die Punkte

$$B' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in CA \qquad \text{und} \qquad C' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in AB$$

gilt

$$d(I, B') = \|B' - I\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 1 = r$$

und

$$d(I, C') = \|C' - I\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = 1 = r;$$

damit ist B' bzw. C' der Berührpunkt des Inkreises mit der Dreiecksseite CA bzw. AB. Dagegen besitzt der Berührpunkt A' des Inkreises mit der Dreiecksseite $BC = B + \mathbb{R} \cdot u$ die Gestalt

$$A' = B + \lambda \cdot u = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 4\,\lambda \\ 3\,\lambda \end{pmatrix}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$; dabei muß aber der Richtungsvektor

$$A' - I = \begin{pmatrix} 4 - 4\,\lambda \\ 3\,\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 4\,\lambda \\ 3\,\lambda - 1 \end{pmatrix}$$

von I nach A' auf dem Richtungsvektor u der Dreiecksseite BC senkrecht stehen, woraus sich

$$\begin{aligned} 0 = (A' - I) \circ u = \begin{pmatrix} 3 - 4\,\lambda \\ 3\,\lambda - 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} &= \\ &= -4\,(3 - 4\,\lambda) + 3\,(3\,\lambda - 1) = -15 + 25\,\lambda, \end{aligned}$$

also $25\,\lambda = 15$ bzw. $\lambda = \frac{3}{5}$, und damit $A' = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{9}{5} \end{pmatrix}$ ergibt.

d) Die Gerade AA' besitzt den Trägerpunkt $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und den Richtungsvektor

$$u_A = A' - A = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{9}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{9}{5} \end{pmatrix},$$

also den Normalenvektor $\widetilde{u}_A = \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \end{pmatrix}$ und damit die Gleichung

$$\widetilde{u}_A \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \widetilde{u}_A \circ A \qquad \text{bzw.} \qquad 9\,x - 8\,y = 0.$$

Die Gerade BB' besitzt den Trägerpunkt $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und den Richtungsvektor

$$u_B = B' - B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also den Normalenvektor $\widetilde{u}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und damit die Gleichung

$$\widetilde{u}_B \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \widetilde{u}_B \circ B \qquad \text{bzw.} \qquad x + 4\,y = 4.$$

Die Gerade CC' besitzt den Trägerpunkt $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und den Richtungsvektor

$$u_C = C' - C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

also den Normalenvektor $\widetilde{u}_C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit die Gleichung

$$\widetilde{u}_C \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \widetilde{u}_C \circ C \qquad \text{bzw.} \qquad 3\,x + y = 3.$$

Der Punkt $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ liegt nun genau dann auf den drei Geraden AA', BB' und CC' wenn seine Koordinaten x und y den drei Gleichungen

$$9\,x - 8\,y = 0, \qquad x + 4\,y = 4 \qquad \text{und} \qquad 3\,x + y = 3$$

genügt. Wegen

$$\left(\begin{array}{rr|r} 9 & -8 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 9 & -8 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}-9\text{I}}{\overset{\text{II}-3\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 4 & 4 \\ 0 & -11 & -9 \\ 0 & -44 & -36 \end{array}\right) \underset{\text{III}-4\text{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 4 & 4 \\ 0 & -11 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{-\frac{1}{11}\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{9}{11} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{I}-4\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & \frac{8}{11} \\ 0 & 1 & \frac{9}{11} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ist dies genau der Punkt $P = \begin{pmatrix} \frac{8}{11} \\ \frac{9}{11} \end{pmatrix}$.

7.33 a) Sei K_1 der Kreis mit Mittelpunkt $M_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ und Radius $r_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; wegen

$$d(P, M_1) = \|M_1 - P\| = \left\| \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \right\| = \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = r_1$$

und

$$d(R, M_1) = \|M_1 - R\| = \left\| \left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) \right\| = \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = r_1$$

liegen die beiden Punkte P und R auf dem Kreis K_1. Ferner erhält man für den Richtungsvektor $R - Q$ der Geraden QR und den Richtungsvektor $R - M_1$ der Geraden M_1R

$$(R - Q) \circ (R - M_1) = (-1, 1) \circ \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = 0,$$

so daß R der Lotfußpunkt von M_1 auf die Gerade QR ist; folglich berührt K_1 die Gerade QR im Punkte R.

b) Veranschaulicht man sich die gegebene Situation anhand einer Skizze, so erkennt man, daß es sich bei K_2 um den Kreis mit Mittelpunkt $M_2 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ und Radius $r_2 = \frac{1}{2}$ sowie bei K_3 um den Kreis mit Mittelpunkt $M_3 = (1, 1)$ und dem Radius $r_3 = 1$ handeln muß; wir weisen diese Behauptungen durch Rechnung nach:

- Wegen
$$d(Q, M_2) = \|M_2 - Q\| = \| \left(-\tfrac{1}{2}, 0\right) \| = \tfrac{1}{2} = r_2$$
und
$$d(P, M_2) = \|M_2 - P\| = \| \left(\tfrac{1}{2}, 0\right) \| = \tfrac{1}{2} = r_2$$
liegen die beiden Punkte Q und P auf K_2; da ferner für den Abstand des Mittelpunkts M_2 von der Hochwertachse RP
$$d(M_2, RP) = \tfrac{1}{2} = r_2$$
gilt, ist RP die Tangente an K_2 im Punkte P.
- Wegen
$$d(R, M_3) = \|M_3 - R\| = \| (1, 0) \| = 1 = r_3$$
und
$$d(Q, M_2) = \|M_3 - Q\| = \| (0, 1) \| = 1 = r_3$$
liegen die beiden Punkte R und Q auf K_3; da ferner für den Abstand des Mittelpunkts M_3 von der Rechtswertachse PQ
$$d(M_3, PQ) = 1 = r_3$$
gilt, ist PQ die Tangente an K_3 im Punkte Q.

Als Gleichungen für die beiden Kreise K_2 und K_3 ergeben sich dann

$$K_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}\right\}$$

und

$$K_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1\}.$$

c) Für den Kreis K_1 erhält man die Gleichung

$$K_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + \tfrac{1}{2})^2 + (y - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{2}\right\}.$$

Für einen Schnittpunkt $S = (x_S, y_S) \in \mathbb{R}^2$ von K_1 und K_2 gilt damit zum einen

$$\left(x_S + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y_S - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2},$$

also

$$x_S^2 + x_S + y_S^2 - y_S = 0, \tag{1}$$

und zum anderen

$$\left(x_S - \tfrac{1}{2}\right)^2 + y_S^2 = \tfrac{1}{4},$$

also

$$x_S^2 - x_S + y_S^2 = 0; \tag{2}$$

zieht man nun (2) von (1) ab, so erhält man $2\,x_S - y_S = 0$, also $y_S = 2\,x_S$, woraus sich über (2) dann

$$0 = x_S^2 - x_S + (2\,x_S)^2 = 5\,x_S^2 - x_S = 5\,x_S\,(x_S - \tfrac{1}{5}),$$

also $x_S = 0$ (mit $y_S = 0$) oder $x_S = \frac{1}{5}$ (mit $y_S = \frac{2}{5}$) ergibt. Eine Probe bestätigt, daß die beiden ermittelten Punkte

$$S_1 = (0,0) \qquad \text{und} \qquad S_2 = \left(\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}\right)$$

tatsächlich auf den beiden Kreisen K_1 und K_2 liegen. Wegen

$$d(S_1, M_3) = \|M_3 - S_1\| = \|\,(1,1)\,\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \neq r_3$$

ist $S_1 \notin K_3$, während aufgrund von

$$d(S_2, M_3) = \|M_3 - S_2\| = \|\,\left(\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}\right)\,\| = \sqrt{\left(\tfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{5}\right)^2} = 1 = r_3$$

ist $S_2 \in K_3$ gilt; damit ist $B = S_2$.

7.34 a) In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$, versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$, ist für zwei verschiedene Punkte $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ die Menge

$$M_{a,b} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \operatorname{dist}(a,x) = \operatorname{dist}(b,x)\right\}$$

aller Punkte $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ zu betrachten, die von a und b denselben Abstand $\operatorname{dist}(a,x) = \operatorname{dist}(b,x)$ haben. Für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt dabei

$$\begin{aligned}
x \in M_{a,b} \quad &\iff \quad \operatorname{dist}(a,x) = \operatorname{dist}(b,x) \\
&\iff \quad \|a - x\| = \|b - x\| \\
&\iff \quad \|a - x\|^2 = \|b - x\|^2 \\
&\iff \quad (a - x) \circ (a - x) = (b - x) \circ (b - x) \\
&\iff \quad a \circ (a - x) - x \circ (a - x) = b \circ (b - x) - x \circ (b - x) \\
&\iff \quad a \circ a - a \circ x - x \circ a + x \circ x = \\
&\qquad\qquad = b \circ b - b \circ x - x \circ b + x \circ x \\
&\iff \quad a \circ a - 2 \cdot a \circ x = b \circ b - 2 \cdot b \circ x \\
&\iff \quad (2\,b) \circ x - (2\,a) \circ x = b \circ b - a \circ a \\
&\iff \quad (2\,(b - a)) \circ x = b \circ b - a \circ a \\
&\iff \quad 2\,(b_1 - a_1)\,x_1 + 2\,(b_2 - a_2)\,x_2 = \|b\|^2 - \|a\|^2,
\end{aligned}$$

und damit ist

$$M_{a,b} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2\,(b_1 - a_1)\,x_1 + 2\,(b_2 - a_2)\,x_2 = \|b\|^2 - \|a\|^2\right\}.$$

b) Der Umkreismittelpunkt $m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ des Dreiecks mit den Eckpunkten

$$a = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

hat von den drei Punkten a, b und c denselben Abstand, es gilt also

$$m \in M_{a,b} \qquad \text{und} \qquad m \in M_{a,c},$$

woraus aus $\operatorname{dist}(a, m) = \operatorname{dist}(b, m)$ und $\operatorname{dist}(a, m) = \operatorname{dist}(c, m)$ automatisch $\operatorname{dist}(b, m) = \operatorname{dist}(c, m)$, also $m \in M_{b,c}$, folgt. Mit

$$\|a\|^2 = 5^2 + 3^2 = 34, \quad \|b\|^2 = 4^2 + 4^2 = 32, \quad \|c\|^2 = (-3)^2 + (-3)^2 = 18$$

ergibt sich gemäß a) also

$$\begin{aligned} m \in M_{a,b} \quad &\iff \quad 2\,(b_1 - a_1)\,m_1 + 2\,(b_2 - a_2)\,m_2 = \|b\|^2 - \|a\|^2 \\ &\iff \quad 2\,(4-5)\,m_1 + 2\,(4-3)\,m_2 = 32 - 34 \\ &\iff \quad -2\,m_1 + 2\,m_2 = -2 \quad \iff \quad m_1 - m_2 = 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} m \in M_{a,c} \quad &\iff \quad 2\,(c_1 - a_1)\,m_1 + 2\,(c_2 - a_2)\,m_2 = \|c\|^2 - \|a\|^2 \\ &\iff \quad 2\,(-3-5)\,m_1 + 2\,(-3-3)\,m_2 = 18 - 34 \\ &\iff \quad -16\,m_1 - 12\,m_2 = -16 \quad \iff \quad 4\,m_1 + 3\,m_2 = 4, \end{aligned}$$

insgesamt damit $m_1 = 1$ und $m_2 = 0$, also $m = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

7.35 Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt, betrachten wir die vier Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

die Koordinaten seien mit x_1, x_2, x_3 bezeichnet.

a) Für zwei Punkte P, $Q \in \mathbb{R}^3$ mit $P \neq Q$ stimmt die Menge aller Punkte X von $\mathbb{R}^3$, die von P und Q denselben Abstand besitzen, mit der Mittelsenkrechten M_{PQ} von P und Q überein; dabei ist M_{PQ} die (Hyper–)Ebene mit dem Trägerpunkt $\frac{P+Q}{2}$ und dem Normalenvektor $Q - P$. Wegen

$$t_1 = \frac{A + B}{2} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \widetilde{u}_1 = B - A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

besitzt die Mittelsenkrechte M_{AB} von A und B die Gleichung

$$M_{AB} \quad : \quad \widetilde{u}_1 \circ x = \widetilde{u}_1 \circ t_1 \qquad \text{bzw.} \qquad 3\,x_1 + x_2 = 12,$$

und wegen

$$t_2 = \frac{A+C}{2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \widetilde{u}_2 = C - A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

besitzt die Mittelsenkrechte M_{AC} von A und C die Gleichung

$$M_{AC} \quad : \quad \widetilde{u}_2 \circ x = \widetilde{u}_2 \circ t_2 \qquad \text{bzw.} \qquad 2\,x_1 + 4\,x_2 = 18.$$

Für die gesuchte Menge g aller Punkte X von $\mathbb{R}^3$, die von A, B und C denselben Abstand besitzen, gilt nun

$$g = M_{AB} \cap M_{AC},$$

und damit stimmt g mit der Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & 18 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I} \leftrightarrow \frac{1}{2}\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 12 \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}-3\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & -5 & 0 & -15 \end{array}\right) \underset{-\frac{1}{5}\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}-2\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

überein. Folglich ist

$$g = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine (affine) Gerade.

b) Der Mittelpunkt M der Umkugel des Tetraeders mit den Ecken A, B, C, D ist derjenige Punkt auf g, der von den Punkten A (und damit auch von B und C) und D denselben Abstand besitzt; für den Radius r der Umkugel gilt dann

$$\operatorname{dist}(A, M) = r = \operatorname{dist}(D, M).$$

Wegen $M \in g$ ergibt sich die Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei wegen

$$\operatorname{dist}(A, M) = \|M - A\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \lambda \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5 + \lambda^2}$$

und

$$\operatorname{dist}(D, M) = \|M - D\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda - 1 \end{pmatrix} \right\| = |\lambda - 1|$$

dann

$$\sqrt{5+\lambda^2} = |\lambda - 1| \quad \text{bzw.} \quad 5+\lambda^2 = (\lambda-1)^2 = \lambda^2 - 2\,\lambda + 1,$$

also $2\,\lambda = -4$ bzw. $\lambda = -2$ gilt. Wir erhalten also

$$M = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad r = \sqrt{5+(-2)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Die Eckpunkte A, B und C des Tetraeders liegen auf der x_1–x_2–Ebene mit der Gleichung $x_3 = 0$; da sich nun der vierte Eckpunkt D oberhalb und der Mittelpunkt M der Umkugel unterhalb der x_1–x_2–Ebene befindet, kann M nicht im Inneren des Tetraeders liegen.

7.36 a) Die gegebene Gerade $g \subseteq \mathbb{R}^2$ mit der Gleichung $x + y = 2$ besitzt den Normalenvektor $\widetilde{u}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; für die Lotgerade ℓ des Punktes $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ auf g ergibt sich somit die Parameterdarstellung

$$\ell = P + \mathbb{R} \cdot \widetilde{u}_g = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Lotfußpunkt L von P auf g besitzt nun wegen $L \in \ell$ die Gestalt

$$L = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\lambda \\ y+\lambda \end{pmatrix}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei wegen $L \in g$ dann

$$(x+\lambda) + (y+\lambda) = 2 \qquad \text{und damit} \qquad \lambda = \frac{2-x-y}{2}$$

gilt; für den an der Geraden g gespiegelten Punkt $S(P)$ ergibt sich somit

$$\begin{aligned} S(P) = P + 2\,(L-P) = 2L - P = 2 \begin{pmatrix} x+\lambda \\ y+\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} x+2\,\lambda \\ y+2\,\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+(2-x-y) \\ y+(2-x-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-y \\ 2-x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Auf der gegebenen Geraden g_1 mit der Gleichung $2x - y = 1$ liegen etwa die beiden Punkte

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

damit ist g_1 die Verbindungsgerade von Q und R, die gespiegelte Gerade $g_2 = S(g_1)$ folglich die Verbindungsgerade der beiden gespiegelten Punkte

$$S(Q) = \begin{pmatrix} 2-(-1) \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad S(R) = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit besitzt g_2 den Trägerpunkt $S(Q)$ sowie den Richtungsvektor

$$u = S(R) - S(Q) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und damit den Normalenvektor

$$u^\perp = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

so daß sich für g_2 die Gleichung

$$u^\perp \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u^\perp \circ S(Q) \qquad \text{bzw.} \qquad x - 2y = -1$$

ergibt.

7.37 Die gegebene Ebene $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 = 5\}$ besitzt den Normalenvektor $\widetilde{u}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Damit ist der Bildpunkt $f(p)$ des Punktes $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ unter der Orthogonalprojektion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ auf die Ebene E aber genau der Schnittpunkt der Geraden $\ell = p + \mathbb{R} \cdot \widetilde{u}_E$ (also der Lotgeraden des Punktes p auf die Ebene E) mit der Ebene E selbst. Damit ist

$$f(p) = p + \lambda_p \cdot \widetilde{u}_E = \begin{pmatrix} p_1 + 2\,\lambda_p \\ p_2 + \lambda_p \\ p_3 + 2\,\lambda_p \end{pmatrix} \in \ell$$

für einen geeigneten Parameter $\lambda_p \in \mathbb{R}$, wobei wegen $f(p) \in E$ dann

$$2\,(p_1 + 2\,\lambda_p) + (p_2 + \lambda_p) + 2\,(p_3 + 2\,\lambda_p) = 5,$$

also

$$2\,p_1 + p_2 + 2\,p_3 + 9\,\lambda_p = 5 \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda_p = -\tfrac{2}{9}\,p_1 - \tfrac{1}{9}\,p_2 - \tfrac{2}{9}\,p_3 + \tfrac{5}{9},$$

gilt. Folglich erhält man

$$\begin{aligned} f(p) = p + \lambda_p \cdot \widetilde{u}_E &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \left(-\tfrac{2}{9}\,p_1 - \tfrac{1}{9}\,p_2 - \tfrac{2}{9}\,p_3 + \tfrac{5}{9}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{9}\,p_1 - \frac{2}{9}\,p_2 - \frac{4}{9}\,p_3 + \frac{10}{9} \\ -\frac{2}{9}\,p_1 + \frac{8}{9}\,p_2 - \frac{2}{9}\,p_3 + \frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9}\,p_1 - \frac{2}{9}\,p_2 + \frac{5}{9}\,p_3 + \frac{10}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{10}{9} \\ \frac{5}{9} \\ \frac{10}{9} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also $f(p) = A \cdot p + t$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad \text{und} \qquad t = \begin{pmatrix} \frac{10}{9} \\ \frac{5}{9} \\ \frac{10}{9} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

7.38 Die zu betrachtende Orthogonalprojektion $f : E \to H$ von der Ebene E auf die Ebene H mit

$$E : z = 0 \qquad \text{und} \qquad H : x + y + z = 1$$

bildet (als die Parallelprojektion längs der Normelenrichtung von H) einen Punkt $p \in E$ auf dessen Lotfußpunkt in H ab; dabei ist $\widetilde{u}_H = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von H. Für den Punkt $p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in E$ besitzt $f(p)$ als Punkt der Lotgerade $\ell = p + \mathbb{R} \cdot \widetilde{u}_H$ die Gestalt

$$f(p) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \lambda_p \\ y + \lambda_p \\ \lambda_p \end{pmatrix}$$

für ein geeignetes $\lambda_p \in \mathbb{R}$, wobei sich wegen $f(p) \in H$

$$(x + \lambda_p) + (y + \lambda_p) + \lambda_p = 1, \qquad \text{also} \quad 3\,\lambda_p + x + y = 1,$$

und damit

$$\lambda_p = -\frac{1}{3}\,x - \frac{1}{3}\,y + \frac{1}{3}$$

ergibt. Folglich erhält man

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{3}\,y + \frac{1}{3} \\ y - \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{3}\,y + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}\,x - \frac{1}{3}\,y + \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\,x - \frac{1}{3}\,y + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}\,x + \frac{2}{3}\,y + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}\,x - \frac{1}{3}\,y + \frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\,x - \frac{1}{3}\,y \\ -\frac{1}{3}\,x + \frac{2}{3}\,y \\ -\frac{1}{3}\,x - \frac{1}{3}\,y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

so daß mit der Wahl von

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} \qquad \text{und} \qquad v = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

dann

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + v \qquad \text{für alle} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in E$$

gilt.

7.39 a) Die Lösungsmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ der inhomogenen linearen Gleichung

$$2\,x - y + z = 1$$

mit den beiden freien Variablen y und z ist eine Ebene mit dem Trägerpunkt $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sowie den beiden linear unabhängigen Richtungsvektoren

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$; sie besitzt also die Parameterdarstellung

$$U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) Der zu U parallele Untervektorraum $U_0 \subseteq \mathbb{R}^3$ ist der Lösungsraum der zugehörigen homogenen linearen Gleichung

$$2\,x - y + z = 0$$

und besitzt demnach den Normalenvektor $\widetilde{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Der Lotfußpunkt p_0 des Punktes $p \in \mathbb{R}$ auf der Ebene U_0 besitzt (als Punkt auf der Lotgeraden von p auf U_0) die Gestalt

$$p_0 = p + \lambda \cdot \widetilde{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2\,\lambda \\ y - \lambda \\ z + \lambda \end{pmatrix}$$

mit einem geeigneten $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei sich wegen $p_0 \in U_0$ dann

$$2\,(x + 2\,\lambda) - (y - \lambda) + (z + \lambda) = 0,$$

also

$$2\,x - y + z + 6\,\lambda = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda = \frac{-2\,x + y - z}{6}$$

und somit

$$p_0 = \begin{pmatrix} x + 2 \cdot \frac{-2\,x+y-z}{6} \\ y - \frac{-2\,x+y-z}{6} \\ z + \frac{-2\,x+y-z}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{6}x + \frac{2}{6}y - \frac{2}{6}z \\ \frac{2}{6}x + \frac{5}{6}y + \frac{1}{6}z \\ -\frac{2}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{5}{6}z \end{pmatrix}$$

ergibt; der Bildpunkt $S_0(p)$ von p unter der Spiegelung $S_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ an der Ebene U_0 ist

$$\begin{aligned}
S_0(p) &= \underbrace{p + (p_0 - p)}_{=p_0} + (p_0 - p) = 2\,p_0 - p \\
&= 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{6}x + \frac{2}{6}y - \frac{2}{6}z \\ \frac{2}{6}x + \frac{5}{6}y + \frac{1}{6}z \\ -\frac{2}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{5}{6}z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z \\ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \\ -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \cdot p
\end{aligned}$$

mit der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

c) Zu betrachten ist die Spiegelung

$$S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad S(p) = A \cdot p + t,$$

mit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $t \in \mathbb{R}^3$ an der affinen Ebene $U = v + U_0$ mit dem Trägerpunkt $v \in \mathbb{R}^3$. Für jeden Punkt $p \in \mathbb{R}^3$ mit dem Spiegelpunkt $S(p)$ geht damit $S(p) - v$ aus $p - v$ durch Spiegelung an der Ursprungsebene U_0 hervor, und wir erhalten

$$S(p) - v = S_0(p - v) = M \cdot (p - v) = M \cdot p - M \cdot v$$

und damit

$$S(p) = (M \cdot p - M \cdot v) + v = M \cdot p + (E_3 - M) \cdot v.$$

Folglich ergibt sich für die affine Abbildung S die Matrix

$$A = M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

sowie der Vektor

$$t = (E_3 - M) \cdot v = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

7.40 In der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ sind die beiden Dreiecke Δ mit den Eckpunkten

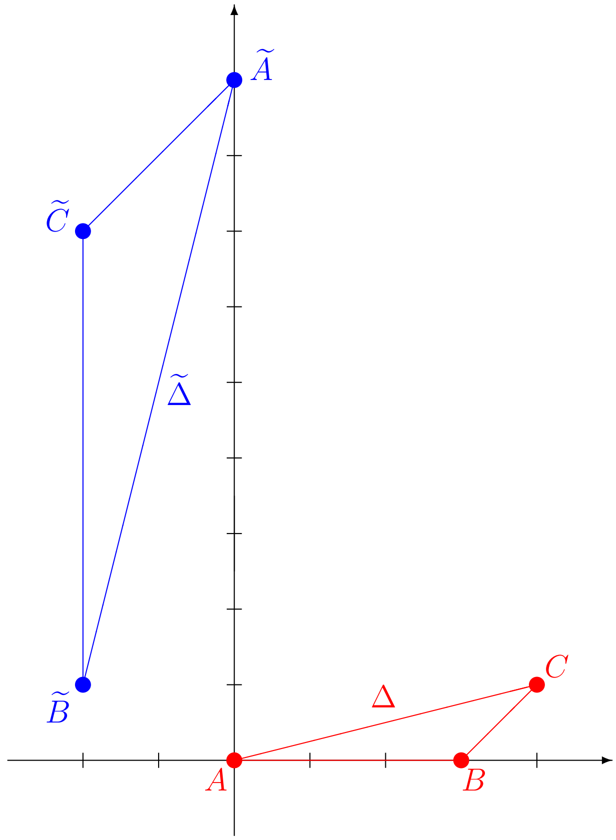
$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und $\widetilde{\Delta}$ mit den Eckpunkten

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \widetilde{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Für die beiden Dreiecke Δ und $\widetilde{\Delta}$ ergibt sich die folgende Skizze:



b) Die drei Punkte A, B, C bilden das (gemäß a) nicht ausgeartete) Dreieck Δ, also ein affines Koordinatensystem von $\mathbb{R}^2$; damit existiert aber nach dem Prinzip der affinen Fortsetzung genau eine affine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \text{mit} \qquad f(A) = \widetilde{A}, \quad f(B) = \widetilde{B} \quad \text{und} \quad f(C) = \widetilde{C}.$$

Für die Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und den Vektor $t \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = M \cdot x + t$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt damit

$$M \cdot A + t = \widetilde{A}, \qquad M \cdot B + t = \widetilde{B} \qquad \text{und} \qquad M \cdot C + t = \widetilde{C}.$$

Wegen $A = 0$ ist zunächst

$$t = \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

woraus sich dann

$$\begin{aligned} M \cdot B = \widetilde{B} - t &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix} \\ M \cdot C = \widetilde{C} - t &= \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit

$$M \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M \cdot (B,\, C) = (M \cdot B,\, M \cdot C) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}$$

ergibt; wegen

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \qquad \text{mit} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

erhält man schließlich

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -8 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -8 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{26}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

7.41 a) Die drei Richtungsvektoren

$$u_1 = P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$u_2 = P_2 - P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$u_3 = P_3 - P_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vom Punkt P_0 zu den Punkten P_1, P_2 und P_3 sind wegen

$$\det(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (0 - 1 - 4) - (-8 + 0 + 2) = 1 \neq 0$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$, insbesondere also linear unabhängig; damit sind aber die Punkte P_0, P_1, P_2 und P_3 in keiner affinen Ebene (der Dimension 2) des $\mathbb{R}^3$ enthalten.

b) Gemäß a) bilden P_0, P_1, P_2, P_3 ein affines Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$, weswegen es zu je vier Punkten Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 des $\mathbb{R}^3$ genau eine affine Abbildung $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = A \cdot x + b$, mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ gibt, für die

$$\psi(P_0) = Q_0, \quad \psi(P_1) = Q_1, \quad \psi(P_2) = Q_2 \quad \text{und} \quad \psi(P_3) = Q_3$$

gilt; dabei ist hier

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; Q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(Es sei angemerkt, daß hier auch die Richtungsvektoren $w_1 = Q_1 - Q_0 = e_1$, $w_2 = Q_2 - Q_0 = e_2$ und $w_3 = Q_3 - Q_0 = e_3$ vom Punkt Q_0 zu den Punkten Q_1, Q_2 und Q_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ sind, weswegen auch Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 ein affines Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ bilden und folglich die affine Abbildung ψ sogar bijektiv ist.)

Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und den Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned}
A \cdot P_0 + b &= \psi(P_0) = Q_0 \\
A \cdot P_1 + b &= \psi(P_1) = Q_1 \\
A \cdot P_2 + b &= \psi(P_2) = Q_2 \\
A \cdot P_3 + b &= \psi(P_3) = Q_3
\end{aligned}$$

sowie durch Differenzbildung dann

$$\begin{array}{lcl}
A \cdot (P_1 - P_0) = Q_1 - Q_0, & \text{also} & A \cdot u_1 = e_1, \\
A \cdot (P_2 - P_0) = Q_2 - Q_0, & \text{also} & A \cdot u_2 = e_2, \\
A \cdot (P_3 - P_0) = Q_3 - Q_0, & \text{also} & A \cdot u_3 = e_3.
\end{array}$$

Mit $B = (u_1, u_2, u_3) \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ und $E_3 = (e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ erhält man also

$$A \cdot B = A \cdot (u_1, u_2, u_3) = (A \cdot u_1, A \cdot u_2, A \cdot u_3) = (e_1, e_2, e_3) = E_3$$

und folglich

$$A = B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \cdot \widetilde{B} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

sowie damit

$$b = Q_0 - A \cdot P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7.42 a) Im euklidischen $\mathbb{R}^2$ sind die Punkte

$$a_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$b_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

zu betrachten. Da

$$u_1 = a_1 - a_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = a_2 - a_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, bilden die Punkte a_0, a_1, a_2 ein Dreieck, also ein affines Koordinatensystem von $\mathbb{R}^2$; damit existiert aber nach dem Prinzip der affinen Fortsetzung genau eine affine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f(a_0) = b_0, \quad f(a_1) = b_1 \ \text{ und } \ f(a_2) = b_2.$$

Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und den Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = A \cdot x + b$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt damit

$$A \cdot a_0 + b = b_0, \quad A \cdot a_1 + b = b_1 \quad \text{und} \quad A \cdot a_2 + b = b_2;$$

wegen $a_0 = 0$ ist zunächst

$$b = b_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

und wegen $a_1 = e_1$ und $a_2 = e_2$ folgt dann

$$\begin{aligned} A \cdot e_1 = A \cdot a_1 = b_1 - b &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A \cdot e_2 = A \cdot a_2 = b_2 - b &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit

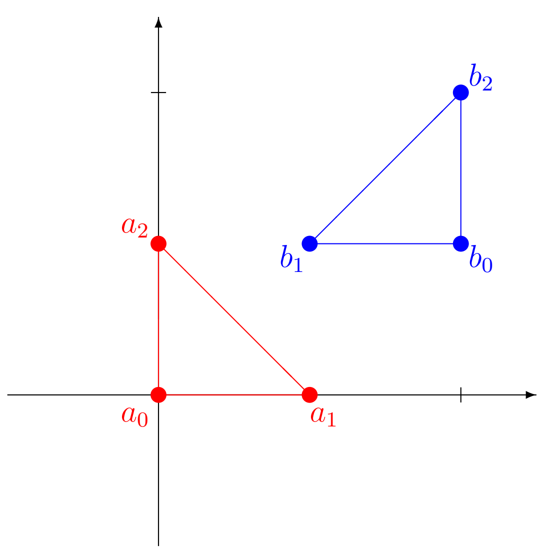
$$A = A \cdot E_2 = A \cdot (e_1, e_2) = (A \cdot e_1, A \cdot e_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

ist die Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ invertierbar, und damit ist die affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bijektiv.

b) Wir betrachten die Lage der beiden Dreiecke mit den Eckpunkten a_0, a_1, a_2 sowie b_0, b_1, b_2 in der Ebene:



Wir betrachten

- die Achsenspiegelung $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an der Achse $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
- die Parallelverschiebung $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um den Vektor $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

damit ist $p \circ s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Gleitspiegelung mit der Spiegelachse a und dem dazu parallelen Schubvektor v. Wegen

$$\begin{aligned}
(p \circ s)(a_0) = p\left(s\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) &= p\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = b_0\\
(p \circ s)(a_1) = p\left(s\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) &= p\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = b_1\\
(p \circ s)(a_2) = p\left(s\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) &= p\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = b_2
\end{aligned}$$

stimmen die beiden affinen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $p \circ s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auf dem Dreieck a_0, a_1, a_2 von $\mathbb{R}^2$ überein, und nach dem Prinzip der affinen Fortsetzung folgt $f = p \circ s$; damit ist f die oben beschriebene Gleitspiegelung, insbesondere also eine Bewegung des $\mathbb{R}^2$.

Zu diesem Ergebnis kann man auch rein rechnerisch gelangen: Wegen

$$A^\top \cdot A = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = E_2$$

ist die Matrix $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ von a) sogar orthogonal, und damit ist die affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Bewegung. Wegen $\det(A) = -1$ gemäß a) ist A genauer eine Spiegelungsmatrix, und damit beschreibt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Gleitspiegelung in $\mathbb{R}^2$; sei $a = t + \mathbb{R} \cdot u$ die Spiegelachse sowie $v = \alpha \cdot u$ der Schubvektor von f. Wegen

$$A \cdot e_2 = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1 \cdot e_2$$

ist e_2 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = 1$, und wir können

$$u = e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{mit} \qquad u^\perp = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

wählen. Wir zerlegen

$$b = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = (-2) \cdot u^\perp + 1 \cdot u;$$

damit ist $v = 1 \cdot u$, und wegen

$$\big(E_2 - A \mid (-2) \cdot u^\perp\big) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right) \qquad \text{kann} \qquad t = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

gewählt werden; damit ist

$$\begin{aligned}
f(x) = A \cdot x + b = A \cdot x + \big((-2) \cdot u^\perp + 1 \cdot u\big) &=\\
= A \cdot x + (E_2 - A) \cdot t + u = \underbrace{S \cdot (x - t) + t}_{\text{Achsenspiegelung an } a} &+ \underbrace{u}_{\text{Verschiebung um } v}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^2$.

7.43 a) Eine Drehung f der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit dem Drehzentrum z besitzt die Gestalt

$$f(x) = D_\varphi \cdot (x - z) + z = D_\varphi \cdot x + (E - D_\varphi) \cdot z$$

für alle $x \in \mathbb{R}^2$; dabei sei D_φ die Drehmatrix zum Drehwinkel $\varphi \in [0; 2\pi[$. Da D_φ insbesondere eine orthogonale Matrix ist, gilt $\|D_\varphi \cdot v\| = \|v\|$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$, und wir erhalten damit

$$\|f(p) - z\| = \|(D_\varphi \cdot (p - z) + z) - z\| = \|D_\varphi \cdot (p - z)\| = \|p - z\|$$

für alle $p \in \mathbb{R}^2$.

b) Wir ermitteln zunächst die notwendige Gestalt einer Drehmatrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und eines Vektors $t \in \mathbb{R}^2$, so daß die damit gegebene Drehung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = A \cdot x + t,$$

die geforderten Eigenschaften $f(p) = p'$ und $f(q) = q'$ für die Punkte

$$p = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad p' = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad q' = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

besitzt, und überprüfen danach, ob die gefundene Abbildung tatsächlich das Gewünschte leistet. Wegen $p' = f(p) = A \cdot p + t$ und $q' = f(q) = A \cdot q + t$ ergibt sich durch Differenzbildung $A \cdot (p - q) = p' - q'$, wobei $A = D_\varphi$ für ein geeignetes $\varphi \in [0; 2\pi[$ ist; damit erhält man

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{=A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=p-q} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=p'-q'},$$

also das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{(I)} & \frac{3}{2} \cdot \cos\varphi & + & 2 \cdot \sin\varphi & = & \frac{3}{2} \\ \text{(II)} & \frac{3}{2} \cdot \sin\varphi & - & 2 \cdot \cos\varphi & = & 2 \end{array}$$

woraus mit $3 \cdot \text{(I)} - 4 \cdot \text{(II)}$ zum einen $\frac{25}{2} \cdot \cos\varphi = -\frac{7}{2}$, also $\cos\varphi = -\frac{7}{25}$, und mit $4 \cdot \text{(I)} + 3 \cdot \text{(II)}$ zum anderen $\frac{25}{2} \cdot \sin\varphi = 12$, also $\sin\varphi = \frac{24}{25}$, folgt. Damit ist zunächst

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{7}{25} & -\frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -24 \\ 24 & -7 \end{pmatrix}$$

und damit

$$t = p' - A \cdot p = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -24 \\ 24 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Wir überprüfen nun, ob die in Frage kommende affine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = A \cdot x + t,$$

mit

$$A = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -24 \\ 24 & -7 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad t = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

eine Drehung mit den gewünschten Eigenschaften ist, und bestimmen dann das Drehzentrum z. Zunächst ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine orthogonale Matrix mit $\det(A) = 1$ und folglich eine Drehmatrix; damit ist f eine Drehung der euklidischen Ebene, und es gilt

$$f(p) = A \cdot p + t = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -24 \\ 24 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = p'$$

sowie

$$f(q) = A \cdot q + t = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -24 \\ 24 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} = q'.$$

Zur Bestimmung des Drehzentrums $z \in \mathbb{R}^2$ von f lösen wir die aus der allgemeinen Gestalt einer Drehung gewonnene Gleichung $t = (E - D_\varphi) \cdot z$ auf und erhalten wegen

$$(E - D_\varphi)^{-1} = \left(\frac{1}{25} \begin{pmatrix} 32 & 24 \\ -24 & 32 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \left(\frac{8}{25} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \right)^{-1} =$$
$$= \frac{25}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{25}{8} \cdot \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

schließlich

$$z = (E - D_\varphi)^{-1} \cdot t = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

7.44 a) Eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist durch die Abbildungsvorschrift der Form $f(x) = A \cdot x + b$ mit einer Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und einem Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ charakterisiert; es sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Dabei gilt zum einen

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff$$
$$\iff \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - b_1 \\ 3 - b_2 \end{pmatrix}$$

und zum anderen

$$f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}\iff$$
$$\iff\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-b_1\\-2-b_2\end{pmatrix},$$

und wir erhalten für f die Abbildungsmatrix

$$A=\begin{pmatrix}2-b_1&-2-b_1\\3-b_2&-2-b_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$$

bei beliebigem Vektor $b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$. Nach Vorgabe bilden diese affinen Abbildungen das Punktepaar

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\quad\text{vom Abstand}\quad\left\|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{2}$$

auf das Punktepaar

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}\quad\text{vom Abstand}\quad\left\|\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{41}$$

ab und sind damit nicht abstandserhaltend, also keine Bewegungen.

b) Für die gegebene Abbildung $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ gilt

$$g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+5\\x+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$$

für alle $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$; damit ist g eine affine Abbildung mit der Abbildungsmatrix $S=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$ und dem Vektor $v=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$. Wegen $S^\top\cdot S=E_2$ ist S eine orthogonale Matrix und folglich g eine Bewegung des $\mathbb{R}^2$.
Da die orthogonale Matrix $S\in\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ wegen $S^\top=S$ zudem symmetrisch ist, beschreibt die lineare Abbildung $\ell_S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\ell_S(x)=S\cdot x$, eine Spiegelung am Eigenraum $\mathrm{Eig}(S,1)$ von S zum Eigenwert $\lambda=1$; wegen

$$S-1\cdot E_2=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\underset{\mathrm{II+I}}{\leadsto}\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix}\qquad\text{ist}\qquad u=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathrm{Eig}(S,1)$, und ℓ_S ist die Achsenspiegelung an der Ursprungsgeraden $\mathbb{R}\cdot u$. Folglich ist g eine Gleitspiegelung mit der dazu parallelen Spiegelungsgeraden $t+\mathbb{R}\cdot u$ mit dem Trägerpunkt t und dem Translationsvektor $\alpha\cdot u$ für ein $\alpha\in\mathbb{R}$, und es gilt

$$\begin{aligned}g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=\underbrace{S\cdot\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-t\right)+t}_{\text{Achsenspiegelung an }t+\mathbb{R}\cdot u}\quad\underbrace{+\,\alpha\cdot u}_{\text{Translation um }\alpha\cdot u}\\&=S\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\underbrace{\left((E_2-S)\cdot t+\alpha\cdot u\right)}_{=v}\end{aligned}$$

für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Damit ist

$$(E_2 - S) \cdot t + \alpha \cdot u = v \qquad \text{bzw.} \qquad (E_2 - S) \cdot t = v - \alpha \cdot u$$

mit

$$E_2 - S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{und} \quad v - \alpha \cdot u = \begin{pmatrix} 5-\alpha \\ 2-\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2;$$

dieses inhomogenen lineare Gleichungssystem ist wegen

$$(E_2 - S \mid v - \alpha \cdot u) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 5-\alpha \\ -1 & 1 & 2-\alpha \end{array} \right) \underset{\text{II+I}}{\leadsto} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 5-\alpha \\ 0 & 0 & 7-2\,\alpha \end{array} \right)$$

genau dann lösbar, wenn $7-2\,\alpha = 0$ gilt, also für $\alpha = \frac{7}{2}$, und als eine spezielle Lösung ergibt sich $t = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Zusammenfassend ist g die Gleitspiegelung mit der Spiegelungsachse $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und dem Translationsvektor $\begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$.

7.45 a) Für die Seitenlängen des Dreiecks Δ mit den Eckpunkten

$$a = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ergibt sich

$$d(a,b) = d\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = 3,$$

$$d(a,c) = d\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 4,$$

$$d(b,c) = d\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = 5;$$

für die Seitenlängen des Dreiecks Δ' mit den Eckpunkten

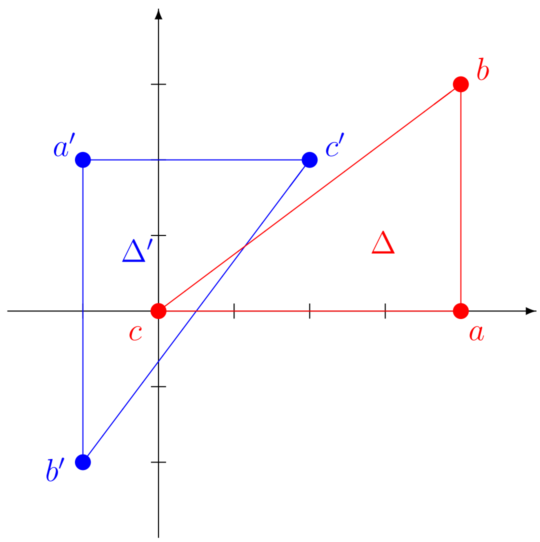
$$a' = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b' = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad c' = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$d(a',b') = d\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = 4,$$

$$d(a',c') = d\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 3,$$

$$d(b',c') = d\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| = 5.$$



b) Eine Bewegung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist eine Kongruenzabbildung der euklidischen Ebene; insbesondere ist f abstandserhaltend, für alle p, $q \in \mathbb{R}^2$ gilt also $d(f(p), f(q)) = d(p, q)$. Damit muß eine Bewegung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die das Dreieck Δ auf das Dreieck Δ' abbildet, notwendig die Eckpunkte von Δ so auf die Eckpunkte von Δ' überführen, daß die kurze bzw. mittlere bzw. lange Seite von Δ auf die kurze bzw. mittlere bzw. lange Seite von Δ' geht, also

$$f(a) = a', \quad f(b) = c' \quad \text{und} \quad f(c) = b'.$$

c) Wir ermitteln im ersten Schritt die notwendige Gestalt einer Bewegung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = S \cdot x + t,$$

mit $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $t \in \mathbb{R}^2$, die das Dreieck Δ auf das Dreieck Δ' abbildet. Gemäß b) gilt

$$S \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad S \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

also $t = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, und damit

$$S \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad S \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix};$$

folglich ist

$$S \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix},$$

also

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir überprüfen nun, ob die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = S \cdot x + t,$$

mit

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \text{und} \qquad t = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

tatsächlich die gewünschten Eigenschaften besitzt. Wegen $S = S_{\frac{\pi}{2}} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Bewegung des $\mathbb{R}^2$, und es gilt

$$\begin{aligned}
f(a) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = a', \\
f(b) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = c', \\
f(c) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = b';
\end{aligned}$$

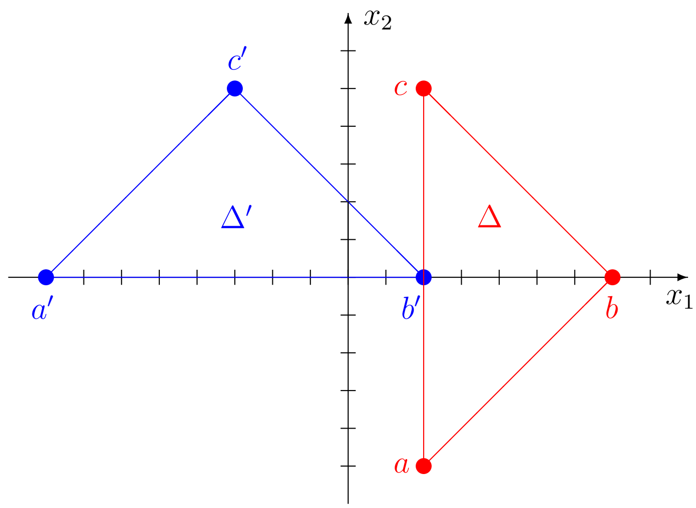
damit führt f das Dreieck Δ in das Dreieck Δ' über.

7.46 a) Für die Seitenlängen des Dreiecks Δ ergibt sich

$$\begin{aligned}
d(a,b) &= d\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = 5\sqrt{2}, \\
d(a,c) &= d\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix} \right\| = 10, \\
d(b,c) &= d\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \left\| \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = 5\sqrt{2};
\end{aligned}$$

ferner ergibt sich für die Seitenlängen des Dreiecks Δ'

$$\begin{aligned}
d(a',b') &= d\left(\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\| \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 10, \\
d(a',c') &= d\left(\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \left\| \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = 5\sqrt{2}, \\
d(b',c') &= d\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = 5\sqrt{2}.
\end{aligned}$$



b) Aufgrund der Längen– und Orientierungstreue der Abbildung d gilt

$$d(a) = b', \quad d(b) = c' \quad \text{und} \quad d(c) = a';$$

damit ist aber wegen $d(x) = D \cdot x + t$

$$D \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix},$$

woraus sich durch Differenzbildung der zweiten und dritten Beziehung jeweils mit der ersten Beziehung

$$D \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad D \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt; damit ist

$$D \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$D = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{50} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und folglich

$$t = b' - D \cdot a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$D \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \det(D) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

beschreibt d eine orientierungstreue Abbildung, also eine Drehung (um $\frac{\pi}{2}$) in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$. Wir überprüfen nun, ob die Abbildung

$$d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad d(x) = D \cdot x + t,$$

mit

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad t = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

auch tatsächlich die gewünschten Eigenschaften besitzt.
Wegen

$$d\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$d\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und

$$d\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

gibt es genau eine Drehung mit den gewünschten Eigenschaften.

7.47 a) Wir ermitteln zunächst im ersten Schritt die notwendige Gestalt einer orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und eines Vektors $b \in \mathbb{R}^2$, so daß die damit gegebene Bewegung

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad g(x) = A \cdot x + b,$$

die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

auf die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

abbildet, und überprüfen dann im zweiten Schritt, ob die gefundene Abbildung auch tatsächlich das Gewünschte leisten. Wegen

$$d\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\|\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = 10,$$

$$d\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right) = \left\|\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}\right\| = 3\sqrt{5}$$

und

$$d\left(\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right) = \left\|\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right\| = 5$$

sowie

$$d\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}\right\| = 3\sqrt{5},$$

$$d\left(\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}\right)=\left\|\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}-8\\-6\end{pmatrix}\right\|=10$$

und

$$d\left(\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}\right)=\left\|\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}\right\|=5$$

muß aufgrund der Längentreue der Abbildung g

$$g\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix},\quad g\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad g\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

sein. Damit ist

$$A\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}+b=\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix},\quad A\cdot\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}+b=\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad A\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}+b=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix},$$

woraus sich durch Differenzbildung der zweiten und dritten Beziehung jeweils mit der ersten Beziehung

$$A\cdot\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}\qquad\text{und}\qquad A\cdot\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$$

ergibt; damit ist

$$A\cdot\begin{pmatrix}10&6\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&3\\6&6\end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned}A&=\begin{pmatrix}8&3\\6&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10&6\\0&-3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}8&3\\6&6\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{-30}\begin{pmatrix}-3&-6\\0&10\end{pmatrix}=\\&=-\frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix}8&3\\6&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&-6\\0&10\end{pmatrix}=-\frac{1}{30}\begin{pmatrix}-24&-18\\-18&24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\\\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

und folglich

$$b=\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}-A\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\\\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{5}\\-\frac{9}{5}\end{pmatrix}.$$

Wir überprüfen nun, ob die einzige in Frage kommende affine Abbildung

$$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad g(x)=A\cdot x+b,$$

mit

$$A=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\\\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\end{pmatrix}\qquad\text{und}\qquad b=\begin{pmatrix}\frac{8}{5}\\-\frac{9}{5}\end{pmatrix}$$

auch tatsächlich die gewünschten Eigenschaften besitzt. Wegen $A\in\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ ist g zunächst eine Bewegung der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$, und es gilt

$$g\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\\\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{8}{5}\\-\frac{9}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{8}{5}\\-\frac{6}{5}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{8}{5}\\-\frac{9}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix},$$

$$g\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\\\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{8}{5}\\-\frac{9}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{32}{5}\\\frac{24}{5}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{8}{5}\\-\frac{9}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$$

und

$$g\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\\\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{8}{5}\\-\frac{9}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{5}\\\frac{24}{5}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{8}{5}\\-\frac{9}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}.$$

Damit gibt es genau eine Bewegung mit den gewünschten Eigenschaften.

b) Es ist

$$g\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{8}{5}\\ -\frac{9}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{8}{5}\\ -\frac{9}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{8}{5}\\ -\frac{9}{5}\end{pmatrix},$$

$$g\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{8}{5}\\ -\frac{9}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\ \frac{3}{5}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{8}{5}\\ -\frac{9}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{12}{5}\\ -\frac{6}{5}\end{pmatrix}$$

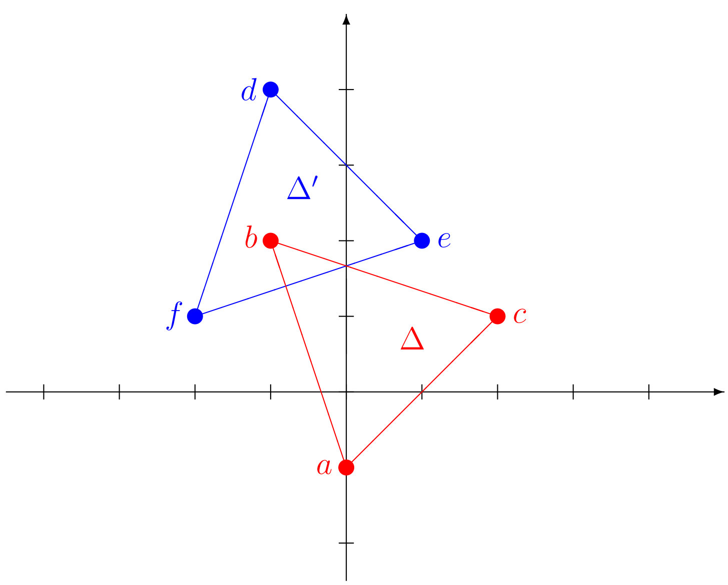
und

$$g\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{8}{5}\\ -\frac{9}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\ -\frac{4}{5}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{8}{5}\\ -\frac{9}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{11}{5}\\ -\frac{13}{5}\end{pmatrix}.$$

7.48 In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ sind die Punkte

$$a = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\; b = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},\; c = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\; d = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix},\; e = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\; f = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

gegeben; zu betrachten sind die Bewegungen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche die Punktmenge $\{a, b, c\}$ auf die Punktmenge $\{d, e, f\}$ abbilden:



a) Für die Seitenlängen des Dreiecks Δ ergibt sich

$$\operatorname{dist}(a,b) = \|a-b\| = \left\|\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{10},$$

$$\operatorname{dist}(a,c) = \|a-c\| = \left\|\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}\right\| = 2\sqrt{2},$$

$$\operatorname{dist}(b,c) = \|b-c\| = \left\|\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{10};$$

ferner ergibt sich für die Seitenlängen des Dreiecks Δ'

$$\operatorname{dist}(d,e) = \|d-e\| = \left\|\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}\right\| = 2\sqrt{2},$$

$$\operatorname{dist}(d,f) = \|d-f\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{10},$$
$$\operatorname{dist}(e,f) = \|e-f\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{10}.$$

Damit gilt für eine Bewegung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die das Dreieck Δ mit den Eckpunkten a, b, c auf das Dreieck Δ' mit den Eckpunkten d, e, f abbildet, aufgrund ihrer Abstandstreue notwendigerweise entweder

$$(1) \qquad g(a) = e, \quad g(b) = f, \quad g(c) = d$$

oder

$$(2) \qquad g(a) = d, \quad g(b) = f, \quad g(c) = e.$$

Wir weisen nun nach, daß beiden Möglichkeiten (1) und (2) realisiert werden. Da die beiden Richtungsvektoren

$$u_1 = b - a = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = c - a = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, bilden die Punkte a, b, c ein affines Koordinatensystem; damit existiert aber nach dem Prinzip der affinen Fortsetzung für jede Vorgabe von Punkten $a', b', c' \in \mathbb{R}^2$ genau eine affine Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x) = M \cdot x + t$, mit

$$g(a) = a', \quad g(b) = b' \quad \text{und} \quad g(c) = c'.$$

Für ihre Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und ihren Vektor $t \in \mathbb{R}^2$ gilt damit

$$M \cdot a + t = a', \qquad M \cdot b + t = b' \quad \text{und} \quad M \cdot c + t = c';$$

zieht man die erste Gleichung von den beiden anderen ab, so erhält man

$$M \cdot \underbrace{(b-a)}_{=u_1} = b' - a' \qquad \text{und} \qquad M \cdot \underbrace{(c-a)}_{=u_2} = c' - a'.$$

Mit den Hilfsmatrizen $B = (u_1, u_2) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und $C = (b'-a', c'-a') \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ergibt sich damit zunächst

$$M \cdot B = M \cdot (u_1, u_2) = (M \cdot u_1, M \cdot u_2) = (b' - a',\, c' - a') = C,$$

also

$$M = C \cdot B^{-1} \qquad \text{mit} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix},$$

und dann etwa über die erste Gleichung $t = a' - M \cdot a$; damit ergibt sich:

- Bei (1) ist $a' = e$, $b' = f$ und $c' = d$, also $C = (f - e,\, d - e) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, damit zum einen

  $$M = C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  und zum anderen

  $$t = e - M \cdot a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

  Wegen $M^\top M = E_2$ gilt $M \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, so daß g eine Bewegung ist.

- Bei (2) ist $a' = d$, $b' = f$ und $c' = e$, also $C = (f - d, e - d) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, damit zum einen

$$M = C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und zum anderen

$$t = d - M \cdot a = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Wegen $M^\top M = E_2$ gilt $M \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, so daß g eine Bewegung ist.

b) Bei der in a) ermittelten Möglichkeit (1) gilt

$$M = D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{für} \qquad \varphi = \frac{\pi}{2};$$

damit ist g eine Drehung mit dem Drehwinkel $\varphi = \frac{\pi}{2}$, und für das Drehzentrum $z \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$z = (E_2 - M)^{-1} \cdot t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Bei der in a) ermittelten Möglichkeit (2) gilt

$$M = S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{für} \qquad \varphi = 0;$$

damit ist g eine Gleitspiegelung mit der Spiegelachse $s + \mathbb{R} \cdot u$ und dem Verschiebungsvektor $\alpha \cdot u$. Da u ein Eigenvektor von M zum Eigenwert 1 ist, können wir etwa $u = e_1$ mit $u^\perp = e_2$ wählen, und über die Zerlegung

$$t = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1) \cdot u + 3 \cdot u^\perp$$

ergibt sich zum einen $\alpha = -1$ sowie zum anderen s als eine Lösung von

$$(E_2 - M \mid 3 \cdot u^\perp) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \text{etwa} \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

7.49 a) Wir ermitteln zunächst im ersten Schritt die notwendige Gestalt eines Vektors $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, so daß die Matrix $A_s = \begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ 2 & s_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ das Vielfache einer orthogonalen Matrix ist; es gibt also eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $A_s = \lambda \cdot P$, und damit ergibt sich

$$A_s^\top \cdot A_s = (\lambda \cdot P)^\top \cdot (\lambda \cdot P) = \lambda^2 \cdot \left(P^\top \cdot P\right) = \lambda^2 \cdot E_2.$$

Wegen

$$A_s^\top \cdot A_s = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ 2 & s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & s_1 + 2\,s_2 \\ s_1 + 2\,s_2 & s_1^2 + s_2^2 \end{pmatrix}$$

und
$$\lambda^2 \cdot E_2 = \lambda^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$
folgt
$$5 = \lambda^2 \qquad \text{und} \qquad s_1 + 2\,s_2 = 0 \qquad \text{und} \qquad s_1^2 + s_2^2 = \lambda^2,$$
also
$$s_1 = -2\,s_2 \qquad \text{und} \qquad s_1^2 + s_2^2 = 5,$$
und damit
$$(-2\,s_2)^2 + s_2^2 = 5 \qquad \text{bzw.} \qquad 5\,s_2^2 = 5 \qquad \text{bzw.} \qquad s_2^2 = 1,$$
woraus sich $s_2 = 1$ (mit $s_1 = -2$) oder $s_2 = -1$ (mit $s_1 = 2$) ergibt.
Wir überprüfen nun im zweiten Schritt, ob die beiden in Frage kommenden Vektoren $s = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $s = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ das Gewünschte leisten:

- Für $s = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist
$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{5} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \lambda \cdot P$$
mit den Faktor $\lambda = \sqrt{5} \in \mathbb{R}$ und der wegen $P^\top \cdot P = E_2$ orthogonalen Matrix $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$.
- Für $s = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist
$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \sqrt{5} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \lambda \cdot P$$
mit den Faktor $\lambda = \sqrt{5} \in \mathbb{R}$ und der wegen $P^\top \cdot P = E_2$ orthogonalen Matrix $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$.

b) Zu betrachten ist die affine Abbildung $\varphi_s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi_s(x) = A_s \cdot x + b$, mit
$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -14 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$
Für einen Fixpunkt $m \in \mathbb{R}^2$ von φ_s gilt $\varphi_s(m) = m$, und wegen
$$\varphi_s(m) = m \iff A_s \cdot m + b = m \iff$$
$$\iff A_s \cdot m - m = -b \iff (A_s - E_2) \cdot m = -b$$
mit
$$(A_s - E_2 \mid -b) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & 14 \end{array}\right) \underset{-\frac{1}{2}\cdot\mathrm{I} \leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$
besitzt φ_s genau einen Fixpunkt, nämlich $m = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

c) Für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned}
\|\varphi_s(x) - m\| &\underset{\varphi_s(m)=m}{=} \|\varphi_s(x) - \varphi_s(m)\| \\
&= \|(A_s \cdot x + b) - (A_s \cdot m + b)\| \\
&= \|A_s \cdot (x - m)\| \\
&\underset{A_s=\sqrt{5}\cdot P}{=} \left\| \left(\sqrt{5} \cdot P\right) \cdot (x - m) \right\| \\
&= \sqrt{5} \cdot \|P \cdot (x - m)\| \\
&\underset{P \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})}{=} \sqrt{5} \cdot \|x - m\| .
\end{aligned}$$

Damit wird jeder Punkt x des Kreises $K \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt m und Radius 1 wegen $\|x - m\| = 1$ nach obiger Rechnung auf einen Punkt $\varphi_s(x)$ mit $\|\varphi_s(x) - m\| = \sqrt{5}$ und damit auf einen Punkt des Kreises $K' \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt m und Radius $\sqrt{5}$ abgebildet; folglich ist $\alpha = \sqrt{5}$.

7.50 Zu betrachten ist die Menge A aller affinen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; diese sind durch ihre Abbildungsvorschrift der Gestalt $f(x) = M \cdot x + t$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit einer Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und einem Vektor $t \in \mathbb{R}^2$ charakterisiert.

a) Die Aussage ist falsch: nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung sind zwar lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (mit $t = 0$) durch die Vorgabe auf einer Basis des $\mathbb{R}^2$ eindeutig bestimmt, aber nach dem Prinzip der affinen Fortsetzung müssen hierfür affine Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auf einem Dreieck des $\mathbb{R}^2$ vorgegeben werden. Wir geben das folgende Gegenbeispiel: die beiden affinen Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = M_1 \cdot x + t_1, \quad \text{mit} \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ g(x) = M_2 \cdot x + t_2, \quad \text{mit} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } t_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

stimmen auf der Standardbasis $b_1 = e_1$, $b_2 = e_2$ des $\mathbb{R}^2$ gemäß

$$\begin{aligned}
f(b_1) = M_1 \cdot e_1 + t_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
f(b_2) = M_1 \cdot e_2 + t_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
g(b_1) = M_2 \cdot e_1 + t_2 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
g(b_2) = M_2 \cdot e_2 + t_2 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

überein, wegen $f(0) = t_1 \neq t_2 = g(0)$ gilt jedoch $f \neq g$.

b) Die Aussage ist richtig: sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = M \cdot x + t$, eine affine Abbildung mit $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ und jedes $\lambda \in \mathbb{R}$; speziell für $\lambda = 0$ ergibt sich

$$f(0) = f(0 \cdot x) = f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x) = 0 \cdot f(x) = 0,$$

und damit folgt wegen

$$0 = f(0) = M \cdot 0 + t = 0 + t = t$$

schon $f(x) = M \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$, so daß f eine lineare Abbildung ist.

7.51 a) Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ werden die Punkte

$$p_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

betrachtet. Da

$$u_1 = p_2 - p_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = p_3 - p_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, bilden die Punkte p_1, p_2, p_3 ein Dreieck, also ein affines Koordinatensystem; damit existiert aber genau eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = M \cdot x + t$, mit

$$f(p_1) = p_2, \quad f(p_2) = p_3 \quad \text{und} \quad f(p_3) = p_4.$$

Für ihre Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und ihren Vektor $t \in \mathbb{R}^2$ gilt damit

$$M \cdot p_1 + t = p_2, \qquad M \cdot p_2 + t = p_3 \quad \text{und} \quad M \cdot p_3 + t = p_4;$$

zieht man die erste Gleichung von den beiden anderen ab, so erhält man

$$M \cdot \underbrace{(p_2 - p_1)}_{=u_1} = p_3 - p_2 \qquad \text{und} \qquad M \cdot \underbrace{(p_3 - p_1)}_{=u_2} = p_4 - p_2,$$

also

$$M \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad M \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich zunächst

$$M \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{wegen} \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

dann

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

etwa über die Gleichung $M \cdot p_1 + t = p_2$ erhält man schließlich

$$t = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und man kann damit auch

$$f(p_4) = M \cdot p_4 + t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = p_1$$

bestätigen. Da die Matrix $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ invertierbar ist, ist die affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = M \cdot x + t$, bijektiv, also eine Affinität.

b) Die Affinität $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ von Teilaufgabe a) bildet den Einheitskreis

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}$$

auf die Ellipse

$$E = f(K) = \{f(x) \mid x \in K\} = \{M \cdot x + t \mid x \in K\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ab. Wegen

$$u = M \cdot x + t \iff x = M^{-1} \cdot (u - t)$$

und damit

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 - 1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \cdot (u_1 - 1) + 2 \cdot u_2 \\ -1 \cdot (u_1 - 1) + 1 \cdot u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1 + 2\,u_2 + 1 \\ -u_1 + u_2 + 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in E \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K \iff x_1^2 + x_2^2 = 1 \\
&\iff \quad (-u_1 + 2\,u_2 + 1)^2 + (-u_1 + u_2 + 1)^2 = 1 \\
&\iff \quad \left(u_1^2 + 4\,u_2^2 + 1 - 4\,u_1\,u_2 - 2\,u_1 + 4\,u_2\right) + \\
&\qquad\quad + \left(u_1^2 + u_2^2 + 1 - 2\,u_1\,u_2 - 2\,u_1 + 2\,u_2\right) = 1 \\
&\iff \quad 2\,u_1^2 - 6\,u_1\,u_2 + 5\,u_2^2 - 4\,u_1 + 6\,u_2 + 1 = 0.
\end{aligned}$$