LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Lineare Algebra und analytische Geometrie 6 — Lösungsvorschlag —

6.1 Für $B = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ gilt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{IV}+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{III}}{\overset{\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

wegen $\operatorname{Rang}(B) = 3$ sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig und damit eine Basis des von ihnen erzeugten Unteraums $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$. Wir unterwerfen diese Basis dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren und erhalten

$$a_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = 3, \quad \text{also} \quad b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

damit

$$a_2 = v_2 - (v_2 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{6}{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \frac{1}{3}\sqrt{18}, \quad \text{also} \quad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und damit

$$a_3 = v_3 - (v_3 \circ b_1) \cdot b_1 - (v_3 \circ b_2) \cdot b_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{\sqrt{18}} \cdot \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_3\| = \sqrt{3}, \quad \text{also} \quad b_3 = \frac{1}{\|a_3\|} \cdot a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von U bezüglich des Standardskalarprodukts $\circ$ auf $\mathbb{R}^4$ mit $\langle b_1 \rangle = \langle v_1 \rangle$ und $\langle b_1, b_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$, also mit $b_1 \in \langle v_1 \rangle$ und $b_2 \in \langle v_1, v_2 \rangle$; wir können also $e_1 = b_1$, $e_2 = b_2$ und $e_3 = b_3$ wählen.

6.2 a) Wegen

$$v_1 \circ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 = 0$$

sind v_1 und v_2 zueinander orthogonal.

b) Für $B = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ gilt

$$B^\top = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{5}\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I}+2\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit sind

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zwei linear unabhängige sowohl zu v_1 wie zu v_2 orthogonale Vektoren, die wegen

$$w_1 \circ w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

(zufälligerweise) schon zueinander orthogonal sind; folglich kann

$$v_3 = w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_4 = w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gewählt werden.

6.3 Zu betrachten ist der von den beiden gegebenen Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

aufgespannte Unterraum $U = \langle v_1, v_2 \rangle$ im $\mathbb{R}^4$; dazu sei $B = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{4\times 2}$. Das orthogonale Komplement $U^\perp$ von U im euklidischen $\mathbb{R}^4$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$) stimmt wegen

$$\begin{aligned}
x \in U^\perp \quad &\Longleftrightarrow \quad u \perp x \ \text{ für alle } \ u \in U \\
&\underset{U=\langle v_1,v_2\rangle}{\Longleftrightarrow} \quad v_1 \perp x \ \text{ und } \ v_2 \perp x \\
&\Longleftrightarrow \quad v_1 \circ x = 0 \ \text{ und } \ v_2 \circ x = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad v_1^\top \cdot x = 0 \ \text{ und } \ v_2^\top \cdot x = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad B^\top \cdot x = 0
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit dem Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $B^\top \cdot x = 0$ mit der Koeffizientenmatrix $B^\top \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ überein. Dementsprechend bilden wegen

$$B^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{(-1)\cdot\text{II}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die beiden Vektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$ von U im $\mathbb{R}^4$.

6.4 a) Für $B = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ gilt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-3\cdot\text{I, IV}-4\cdot\text{I}}{\overset{\text{II}-2\cdot\text{I}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}{\overset{\text{I+III, IV}-\text{III}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit sind v_1, v_2 linear unabhängig mit $v_3 = 3\,v_1 - 2\,v_2$; insbesondere ist v_1, v_2 eine Basis von $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

b) Für $C = (v_1, v_2, e_1, e_2) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gilt

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{3. Spalte}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{3. Spalte}}{=} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Damit ist die Matrix $C \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ invertierbar; insbesondere bilden die Spalten v_1, v_2, e_1, e_2 von C eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

c) Für $D = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ gilt

$$D^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{I}+3\cdot\text{II}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit sind

$$w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des orthogonalen Komplements $V^\perp$ von $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ in $\mathbb{R}^4$. Unterwirft man diese dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren, so erhält man

$$a_1 = w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = \sqrt{5}, \quad \text{also} \quad b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und damit

$$a_2 = w_2 - (w_2 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \frac{1}{5}\sqrt{55}, \quad \text{also} \quad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{\sqrt{55}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\langle b_1, b_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$ bilden die Vektoren b_1, b_2 eine Orthonormalbasis von $V^\perp$ bezüglich des Standardskalarprodukts $\circ$ auf $\mathbb{R}^4$.

6.5 a) Der Spaltenraum $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der gegebenen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

besitzt wegen

$$A \underset{\text{III}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}+\text{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}+\text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die Dimension

$$\dim U = \operatorname{Rang} A = 3;$$

dabei bilden die erste, zweite und dritte Spalte

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad s_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

eine Basis von U, die nun (bezüglich dem Standardskalarprodukt $\circ$) dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren unterworfen wird: wir erhalten

$$a_1 = s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = \sqrt{2}, \quad \text{also} \quad b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

damit

$$a_2 = s_2 - (s_2 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \frac{1}{2}\sqrt{6}, \quad \text{also} \quad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

und damit

$$\begin{aligned} a_3 &= s_3 - (s_3 \circ b_1) \cdot b_1 - (s_3 \circ b_2) \cdot b_2 = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\|a_3\| = \frac{1}{3}\sqrt{12}, \quad \text{also} \quad b_3 = \frac{1}{\|a_3\|} \cdot a_3 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von U.

b) Jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^4$ besitzt eine eindeutige Darstellung

$$x = u + \widetilde{u} \qquad \text{mit} \quad u \in U \quad \text{und} \quad \widetilde{u} \in U^\perp;$$

dabei ist u die orthogonale Projektion von x in U, und mit der Orthonormalbasis von a) gilt

$$u = (x \circ b_1) \cdot b_1 + (x \circ b_2) \cdot b_2 + (x \circ b_3) \cdot b_3.$$

Speziell für den ersten Einheitsvektor $x = e \in \mathbb{R}^4$ gibt es wegen

$$e = (e - y) + y \qquad \text{für alle} \quad y \in \mathbb{R}^4$$

genau ein $y \in U^\perp$ mit $e - y \in U$; dabei ist

$$\begin{aligned} e - y &= (e \circ b_1) \cdot b_1 + (e \circ b_2) \cdot b_2 + (e \circ b_3) \cdot b_3 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad \text{und damit} \qquad y = e - (e - y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6.6 a) Zunächst steht $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf dem gegebenen Vektor $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ wegen $u_1 \circ u_2 = 0$ senkrecht, so daß mit

$$u_3 = u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

die Vektoren u_1, u_2, u_3 eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

b) Eine Matrix $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ bzw. die durch diese gegebene lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = U \cdot x$, besitzt genau dann u_1 als Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$ und u_2, u_3 als Eigenvektoren zum Eigenwert $\mu = -2$, wenn

$$(*) \qquad U \cdot u_1 = \lambda \cdot u_1, \quad U \cdot u_2 = \mu \cdot u_2 \quad \text{und} \quad U \cdot u_3 = \mu \cdot u_3$$

bzw.

$$(**) \qquad f(u_1) = \lambda \cdot u_1, \quad f(u_2) = \mu \cdot u_2 \quad \text{und} \quad f(u_3) = \mu \cdot u_3$$

gilt. Da gemäß a) die Vektoren u_1, u_2, u_3 insbesondere eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden, gibt es nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $(**)$ und damit genau eine Matrix $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $(*)$.

c) Für die explizite Berechnung der Matrix $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ bieten sich die folgenden beide Wege an:

- Gemäß $(*)$ ergibt sich

  $$U \cdot (u_1, u_2, u_3) = (U \cdot u_1,\ U \cdot u_2,\ U \cdot u_3) = (\lambda\, u_1,\ \mu\, u_2,\ \mu\, u_3),$$

  also $U \cdot B = C$ mit

  $$B = (u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

und

$$C = (\lambda\, u_1,\ \mu\, u_2,\ \mu\, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Da u_1, u_2, u_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden, ist $B = (u_1, u_2, u_3)$ invertierbar, und es ist

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \cdot \widetilde{B} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

woraus sich dann

$$U = C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ergibt.

- Die normierten Vektoren

$$\frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

bilden eine Orthonormalbasis des euklidischen $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von U zu den Eigenwerten $\lambda = 1$, $\mu = -2$ und $\mu = -2$, so daß sich mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \frac{u_3}{\|u_3\|} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda,\ \mu,\ \mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

dann

$$D = P^\top U P \qquad \text{bzw.} \qquad U = P D P^\top =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{4}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ergibt.

6.7 a) Zu betrachten ist der von den beiden gegebenen Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

aufgespannte Unterraum $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ im $\mathbb{R}^4$; dazu sei $B = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^{4\times 2}$. Das orthogonale Komplement $U^\perp$ von U im euklidischen $\mathbb{R}^4$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$) stimmt wegen

$$\begin{aligned} x \in U^\perp \quad & \Longleftrightarrow \quad u \perp x \;\text{ für alle }\; u \in U \\ & \underset{U=\langle u_1,u_2\rangle}{\Longleftrightarrow} \quad u_1 \perp x \;\text{ und }\; u_2 \perp x \\ & \Longleftrightarrow \quad u_1 \circ x = 0 \;\text{ und }\; u_2 \circ x = 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad u_1^\top \cdot x = 0 \;\text{ und }\; u_2^\top \cdot x = 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad B^\top \cdot x = 0 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit dem Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $B^\top \cdot x = 0$ mit der Koeffizientenmatrix $B^\top \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ überein. Dementsprechend bilden wegen

$$B^\top = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{2}\mathrm{I} \leftrightarrow \frac{1}{2}\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I}+2\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

die beiden Vektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$ von U im $\mathbb{R}^4$.

b) Für das Erzeugendensystem u_1, u_2 von U mit $\|u_1\| = 6$ und $\|u_2\| = 6$ gilt

$$u_1 \circ u_2 = 0 \cdot 4 + 2 \cdot (-4) + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 0$$

also $u_1 \perp u_2$; folglich bilden die normierten Vektoren

$$v_1 = \frac{1}{\|u_1\|} \cdot u_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{\|u_2\|} \cdot u_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von U. Ferner unterwerfen wir die Basis w_2, w_1 von $U^\perp$ dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren und erhalten

$$a_1 = w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = 3, \quad \text{also} \quad b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und damit

$$a_2 = w_1 - (w_1 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{18}{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = 3, \quad \text{also} \quad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix};$$

damit ist b_1, b_2 eine Orthonormalbasis von $U^\perp$.

c) Eine reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann symmetrisch, wenn sie orthogonal diagonalisierbar ist, es also eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^n, \circ)$ aus Eigenvektoren von A gibt; es ist hier $n = 4$.

In a) wird $U^\perp$ als orthogonales Komplement von U in $\mathbb{R}^4$ konstruiert, und in b) werden v_1, v_2 bzw. b_1, b_2 als Orthonormalbasis von U bzw. $U^\perp$ berechnet; damit ist v_1, v_2, b_1, b_2 eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^4, \circ)$, die nun aus Eigenvektoren von A zum Eigenwert -1 bzw. 2 bestehen soll.

Mit der orthogonalen Matrix

$$P = (v_1, v_2, b_1, b_2) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(-1, -1, 2, 2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

ergibt sich $P^\top A P = D$, also

$$\begin{aligned} A = PDP^\top &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot P^\top \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6 & 12 & -6 & 0 \\ 12 & 3 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & 3 & -12 \\ 0 & -6 & -12 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6.8 Der Nachweis, daß die gegebene Bilinearform

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x,y) := 9x_1y_1 - 6x_1y_2 - 6x_2y_1 + 5x_2y_2,$$

symmetrisch und positiv definit und damit ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^2$ bildet, kann anhand der Definition oder mit Hilfe der Matrixdarstellung erfolgen:

- Wegen

$$\begin{aligned}\varphi(y,x) &= 9y_1x_1 - 6y_1x_2 - 6y_2x_1 + 5y_2x_2 = \\ &= 9x_1y_1 - 6x_1y_2 - 6x_2y_1 + 5x_2y_2 = \varphi(x,y)\end{aligned}$$

für alle x, $y \in \mathbb{R}^2$ ist φ zunächst symmetrisch. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt ferner

$$\begin{aligned}\varphi(x,x) &= 9x_1^2 - 6x_1x_2 - 6x_2x_1 + 5x_2^2 = 9x_1^2 - 12x_1x_2 + 5x_2^2 = \\ &= \left((3x_1)^2 - 2\cdot(3x_1)\cdot(2x_2) + (2x_2)^2\right) + x_2^2 = (3x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 \geq 0,\end{aligned}$$

und aus $\varphi(x,x) = 0$ folgt $3x_1 - 2x_2 = 0$ und $x_2 = 0$, also $x_1 = x_2 = 0$, und damit $x = 0$; damit ist φ auch positiv definit.

- Für alle x, $y \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\varphi(x,y) = x^\top A y \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Wegen $A^\top = A$ ist die Matrix A und damit auch die Bilinearform φ symmetrisch. Da die beiden Hauptminoren

$$\det(A_1) = \left|9\right| = 9$$

und

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} = 9\cdot 5 - (-6)\cdot(-6) = 45 - 36 = 9$$

positiv sind, ist nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz die symmetrische Matrix A und damit auch die Bilinearform φ positiv definit.

6.9 a) Zu betrachten ist die durch $\sigma_B(x,y) = x^\top B y$ für alle x, $y \in \mathbb{R}^3$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

definierte Bilinearform des $\mathbb{R}^3$; zunächst ist wegen $B^\top = B$ die Matrix B und damit auch die Bilinearform σ_B symmetrisch. Da die drei Hauptminoren

$$\det(B_1) = \det(1) = 1 > 0,$$

$$\det(B_2) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0,$$

$$\det(B_3) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (12+6+6) - (8+9+6) = 1 > 0$$

positiv sind, ist nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz die symmetrische Matrix B und damit auch die Bilinearform σ_B positiv definit; folglich ist σ_B ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$.

b) Es ist

$$\sigma_B\,(e_2, e_2) = e_2^\top B e_2 = 2, \qquad \text{also} \qquad \|e_2\| = \sqrt{\sigma_B\,(e_2, e_2)} = \sqrt{2},$$

und

$$\sigma_B\,(e_3, e_3) = e_3^\top B e_3 = 6, \qquad \text{also} \qquad \|e_3\| = \sqrt{\sigma_B\,(e_3, e_3)} = \sqrt{6},$$

sowie

$$\sigma_B\,(e_2, e_3) = e_2^\top B e_3 = 3,$$

so daß sich für den Winkel φ zwischen e_2 und e_3 wegen

$$\cos\varphi = \frac{\sigma_B\,(e_2, e_3)}{\|e_2\| \cdot \|e_3\|} = \frac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

dann $\varphi = \frac{\pi}{6}$ bzw. $\varphi = 30°$ ergibt.

6.10 a) Der Nachweis, daß die gegebene Bilinearform

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$$

symmetrisch und positiv definit und damit ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$ bildet, kann anhand der Definition oder mit Hilfe der Matrixdarstellung erfolgen:

- Wegen

$$\begin{aligned}\langle y, x\rangle = y_1x_1 + 3y_2x_2 + 4y_3x_3 + &\\ + y_1x_2 + y_2x_1 + y_1x_3 + y_3x_1 + y_2x_3 + y_3x_2 &= \\ = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + &\\ + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 &= \langle x, y\rangle\end{aligned}$$

  ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ zunächst symmetrisch. Für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt ferner

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle &= x_1^2 + 3\,x_2^2 + 4\,x_3^2 + 2\,x_1\,x_2 + 2\,x_1\,x_3 + 2\,x_2\,x_3 = \\ &= \frac{1}{2}\,(x_1 + 2\,x_2)^2 + \frac{1}{2}\,(x_1 + 2\,x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_3^2 \geq 0,\end{aligned}$$

  und aus $\langle x, x\rangle = 0$ folgt $x_1 + 2\,x_2 = x_1 + 2\,x_3 = x_2 + x_3 = x_3 = 0$ und damit $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, also $x = 0$; damit ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auch positiv definit.
- Für alle x, $y \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\langle x, y\rangle = x^\top A y \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

  Wegen $A^\top = A$ ist die Matrix A und damit auch die Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ symmetrisch. Da die drei Hauptminoren

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \text{und} \qquad \det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2$$

sowie

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks-}}{=}} 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

alle positiv sind, ist nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz die symmetrische Matrix A und damit auch die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit.

b) Es ist $U = \mathbb{R} \cdot v_1 + \mathbb{R} \cdot v_2$ mit den (offensichtlich linear unabhängigen) Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Anwendung des Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens liefert dann im ersten Schritt

$$\|v_1\| = \sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle} = \sqrt{2}$$

und damit

$$b_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie im zweiten Schritt

$$a_2 = v_2 - \langle v_2, b_1 \rangle \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \sqrt{\langle a_2, a_2 \rangle} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

und damit

$$b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\mathbb{R} \cdot b_1 + \mathbb{R} \cdot b_2 = \mathbb{R} \cdot v_1 + \mathbb{R} \cdot v_2$ bilden die Vektoren b_1, b_2 eine Orthonormalbasis von U bezüglich des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^3$; nachdem hier lediglich nach einer Basis von U aus orthogonalen Vektoren gefragt ist, kann auch a_1, a_2 gewählt werden.

6.11 a) Die gegebene Matrix $M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist gemäß $M^\top = M$ symmetrisch und damit orthogonal diagonalisierbar. Wegen

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 - 3^2 = (1-\lambda)(7-\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt M die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 7$; wegen

$$M - \lambda_1 E_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, und wegen

$$M - \lambda_1\, E_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{\text{II+I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda_2 = 7$. Folglich ist

$$\frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{\|v_2\|} \cdot v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis des euklidischen $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von M.

b) Gemäß a) ist die Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch mit zwei positiven Eigenwerte, folglich also positiv definit; demnach wird durch $\sigma(x, y) = x^\top \cdot M \cdot y$ für alle $x,\, y \in \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt σ auf $\mathbb{R}^2$ definiert.
Die beiden in a) ermittelten Eigenvektoren v_1 und v_2 von M sind gemäß

$$\sigma(v_1, v_2) = v_1^\top \cdot \underbrace{M \cdot v_2}_{=7\cdot v_2} = 7 \cdot \underbrace{v_1^\top v_2}_{=0} = 0$$

auch bezüglich σ orthogonal, wobei sie wegen

$$\sigma(v_1, v_1) = v_1^\top \cdot \underbrace{M \cdot v_1}_{=1\cdot v_1} = 1 \cdot \underbrace{v_1^\top v_1}_{=2} = 2$$

und

$$\sigma(v_2, v_2) = v_2^\top \cdot \underbrace{M \cdot v_2}_{=7\cdot v_2} = 7 \cdot \underbrace{v_2^\top v_2}_{=2} = 14$$

bezüglich σ die Länge

$$\|v_1\|_\sigma = \sqrt{\sigma(v_1, v_1)} = \sqrt{2} \qquad \text{und} \qquad \|v_2\|_\sigma = \sqrt{\sigma(v_2, v_2)} = \sqrt{14}$$

besitzen. Folglich ist

$$\frac{1}{\|v_1\|_\sigma} \cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{\|v_2\|_\sigma} \cdot v_2 = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Skalarprodukts σ.
Als alternativen Lösungsweg kann man auch die Standardbasis e_1, e_2 von $\mathbb{R}^2$ dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren unterwerfen; es ist zum einen

$$a_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \|a_1\|_\sigma = \sqrt{\sigma(a_1, a_1)} = \sqrt{4} = 2,$$

also

$$b_1 = \frac{1}{\|a_1\|_\sigma} \cdot a_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

und zum anderen

$$a_2 = e_2 - \sigma(e_2, b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\|_\sigma = \sqrt{\sigma(a_2, a_2)} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{7},$$

also

$$b_2 = \frac{1}{\|a_2\|_\sigma} \cdot a_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{14}\sqrt{7} \\ \frac{2}{7}\sqrt{7} \end{pmatrix}.$$

Folglich ist b_1, b_2 eine die Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Skalarprodukts σ.

6.12 a) Für die gegebene Bilinearform

$$\sigma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \sigma(x, y) = 4\,x_1\,y_1 - 8\,x_1\,y_2 - 8\,x_2\,y_1 + 25\,x_2\,y_2,$$

auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^2$ gilt

$$\sigma(x, y) = x^\top S\,y \qquad \text{mit} \qquad S = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 25 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Wegen $S^\top = S$ ist S symmetrisch, und wegen

$$\begin{aligned} \det(S) &= 4 \cdot 25 - (-8) \cdot (-8) = 36 > 0 \\ \mathrm{Spur}(S) &= 4 + 25 = 29 > 0 \end{aligned}$$

ist die symmetrische 2×2–Matrix S auch positiv definit; folglich ist σ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

b) Wir unterwerfen die Standardbasis e_1, e_2 von $\mathbb{R}^2$ dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren und erhalten im ersten Schritt

$$a_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \|a_1\| = \sqrt{\sigma(a_1, a_1)} = \sqrt{4} = 2,$$

also

$$b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

und zum anderen

$$a_2 = e_2 - \sigma(e_2, b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (-4) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \sqrt{\sigma(a_2, a_2)} = \sqrt{9} = 3,$$

also

$$b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Folglich ist b_1, b_2 eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^2, \sigma)$.

c) Die lineare Abbildung

$$\ell_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \ell_A(x) = A \cdot x,$$

mit der Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist genau dann eine orthogonale Abbildung $(\mathbb{R}^2, \sigma) \to (\mathbb{R}^2, \circ)$, wenn sie eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^2, \sigma)$, etwa b_1, b_2 von b), auf eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^2, \circ)$, etwa e_1, e_2, abbildet. Mit $B = (b_1, b_2) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ergibt sich

$$A \cdot B = A \cdot (b_1, b_2) = (A \cdot b_1, A \cdot b_2) = (e_1, e_2) = E_2$$

und damit

$$A = B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

6.13 Wir betrachten die durch die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegebene Bilinearform

$$\sigma_A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \sigma_A(x, y) = x^\top A y,$$

auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Für die beiden Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{mit} \qquad B = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dabei:

$$\left.\begin{array}{lcl} \sigma_A(v_1, v_1) = 1 & \iff & v_1^\top A v_1 = 1 \\ \sigma_A(v_1, v_2) = 0 & \iff & v_1^\top A v_2 = 0 \\ \sigma_A(v_2, v_1) = 0 & \iff & v_2^\top A v_1 = 0 \\ \sigma_A(v_2, v_2) = 1 & \iff & v_2^\top A v_2 = 1 \end{array}\right\} \iff B^\top A B = E_2,$$

dies ist aber zu

$$\begin{aligned} A = \left(B^\top\right)^{-1} \cdot B^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -13 \\ -13 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gleichwertig.

Damit gibt es höchstens ein Skalarprodukt σ auf dem $\mathbb{R}^2$, bezüglich dem v_1, v_2 eine Orthonormalbasis bilden, nämlich $\sigma = \sigma_A$ mit der eben bestimmten Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Da aber A symmetrisch und wegen $34 > 0$ und $\det(A) = 1 > 0$ nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz auch positiv definit ist, stellt σ_A tatsächlich ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^2$ mit den gewünschten Eigenschaften dar.

6.14 a) Die für $n \in \mathbb{N}$ gegebene Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

ist wegen $A_n^\top = A_n$ symmetrisch, so daß die durch

$$\langle x, y\rangle = x^\top \cdot A_n \cdot y \qquad \text{für alle} \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

definierte Bilinearform zunächst symmetrisch ist; diese ist nun genau dann ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, wenn sie zusätzlich positiv definit ist, weswegen noch nachzuweisen ist, daß die symmetrische Matrix A_n positiv definit ist. Hierfür müssen nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz alle n Hauptuntermatrizen von A_n, die hier mit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ übereinstimmen, eine positive Determinante besitzen; wir zeigen hierfür sogar

$$\det(A_k) = 1 \qquad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}$$

mit vollständiger Induktion: für „$k = 1$“ ist

$$\det(A_1) = \det(1) = 1,$$

und für „$k \to k+1$“ ist

$$\det(A_{k+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & k & k \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & k & k+1 \end{vmatrix} \underset{(*)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & k & k \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(**)}{=}$$

$$= (-1)^{(k+1)+(k+1)} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & k \end{vmatrix} = \det(A_k) = 1,$$

wobei in $(*)$ die vorletzte von der letzten Zeile subtrahiert und in $(**)$ die Laplace-Entwicklung nach der letzten Zeile durchgeführt wird.

b) Wir wenden auf die Standardbasis

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{R}^3$ das Gram–Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren bezüglich des durch die Matrix $A_3 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ über $\langle x, y\rangle = x^\top \cdot A_3 \cdot y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ gegebenen Skalarprodukts an und erhalten im ersten Schritt

$$\|e_1\| = \sqrt{\langle e_1, e_1\rangle} = \sqrt{1} = 1$$

und damit

$$b_1 = \frac{1}{\|e_1\|} \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

im zweiten Schritt

$$a_2 = e_2 - \langle e_2, b_1 \rangle \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \sqrt{\langle a_2, a_2 \rangle} = \sqrt{1} = 1$$

und damit

$$b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie im dritten Schritt

$$\begin{aligned} a_3 = e_3 - \langle e_3, b_1 \rangle \cdot b_1 - \langle e_3, b_2 \rangle \cdot b_2 = & \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \end{aligned}$$

mit

$$\|a_3\| = \sqrt{\langle a_3, a_3 \rangle} = \sqrt{1} = 1$$

und damit

$$b_3 = \frac{1}{\|a_3\|} \cdot a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit sind b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich des durch die Matrix A_3 definierten Skalarprodukts.

6.15 Für die beiden symmetrischen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei A den Rang n hat und B positiv definit ist, wird die Bilinearform

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^\top \cdot M \cdot y, \quad \text{mit} \quad M = A \cdot B \cdot A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

betrachtet:

- Die Matrizen A und B sind symmetrisch, es gilt also $A^\top = A$ und $B^\top = B$, und damit ist wegen

$$M^\top = (A \cdot B \cdot A)^\top = A^\top \cdot B^\top \cdot A^\top = A \cdot B \cdot A = M$$

auch die Matrix M symmetrisch; folglich ist die Bilinearform f symmetrisch.

- Die Matrix B ist positiv definit, es gilt also $x^\top \cdot B \cdot x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ bzw. $x^\top \cdot B \cdot x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\left(x^\top \cdot B \cdot x = 0 \Longrightarrow x = 0\right)$. Sei $y \in \mathbb{R}^n$, und mit $x = A \cdot y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} y^\top \cdot M \cdot y = y^\top \cdot (A \cdot B \cdot A) \cdot y \underset{A=A^\top}{=} \left(y^\top \cdot A^\top\right) \cdot B \cdot (A \cdot y) = & \\ = (A \cdot y)^\top \cdot B \cdot (A \cdot y) = x^\top \cdot B \cdot x \geq 0; & \end{aligned}$$

dabei folgt aus $y^\top \cdot M \cdot y = 0$, also $x^\top \cdot B \cdot x = 0$, schon $x = 0$, also $A \cdot y = 0$, und wegen $\mathrm{Rang}(A) = n$ ist A invertierbar, so daß sich $y = A^{-1} \cdot 0 = 0$ ergibt. Folglich ist die Matrix M und damit auch die Bilinearform f positiv definit.

Damit ist f eine symmetrische und positiv definite Bilinearform, also ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

6.16 a) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_S(\lambda) = \det(S - \lambda \cdot E_2) = \begin{vmatrix} -7-\lambda & 24 \\ 24 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (-7-\lambda)\,(7-\lambda) - 24^2 = \\ = \left(-49+\lambda^2\right) - 576 = \lambda^2 - 625 = \lambda^2 - 25^2 = (\lambda - 25)\,(\lambda+25)\,;$$

damit besitzt S die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 25$ und $\lambda_2 = -25$. Wegen

$$S - \lambda_1 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} -32 & 24 \\ 24 & -18 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{6}\cdot\mathrm{II}}{\overset{\frac{1}{8}\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ eine Basis des Eigenraums $\operatorname{Eig}(S; \lambda_1 = 25)$, und damit sind die vom Nullvektor verschiedenen skalaren Vielfachen $\alpha \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 3\alpha \\ 4\alpha \end{pmatrix}$ von u_1 mit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ genau die Eigenvektoren der Matrix S zum Eigenwert $\lambda_1 = 25$. Des weiteren ist wegen

$$S - \lambda_2 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 18 & 24 \\ 24 & 32 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{8}\cdot\mathrm{II}}{\overset{\frac{1}{6}\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$u_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ eine Basis des Eigenraums $\operatorname{Eig}(S; \lambda_1 = -25)$, und damit sind die vom Nullvektor verschiedenen skalaren Vielfachen $\beta \cdot u_2 = \begin{pmatrix} -4\beta \\ 3\beta \end{pmatrix}$ von u_2 mit $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ genau die Eigenvektoren der Matrix S zum Eigenwert $\lambda_1 = -25$.

b) Die Matrix $A = \frac{1}{25} S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist wegen

$$A^\top \cdot A = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{625}\begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

orthogonal und besitzt die Determinante

$$\det(A) = \frac{1}{25^2} \cdot \begin{vmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{625}\,((-7)\cdot 7 - 24 \cdot 24) = \frac{1}{625} \cdot (-625) = -1.$$

Damit ist $A = \frac{1}{25} S$ eine Spiegelungsmatrix in der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ und beschreibt damit die Achsenspiegelung am Eigenraum $\operatorname{Eig}(A; 1)$ zum Eigenwert 1; der Vektor u_1 aus a) ist wegen

$$A \cdot u_1 = \left(\frac{1}{25} S\right) \cdot u_1 = \frac{1}{25} \cdot (S \cdot u_1) \underset{\mathrm{a)}}{=} \frac{1}{25} \cdot (25 \cdot u_1) = \left(\frac{1}{25} \cdot 25\right) \cdot u_1 = 1 \cdot u_1$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1, und damit ergibt sich für die Spiegelungsachse $a = \operatorname{Eig}(A; 1) = \mathbb{R} \cdot u_1$.

6.17 Die gesuchte Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ der linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

die die Spiegelung an der Geraden g mit der Gleichung $2x - y = 0$ beschreibt, läßt sich auf verschiedenen Wegen ermitteln:

- Die gegebene Gerade g mit der Gleichung $2x-y=0$ besitzt den Normalenvektor $\widetilde{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Der Lotfußpunkt p_0 des Punktes $p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ auf der Geraden g besitzt (als Punkt auf der Lotgeraden von p auf g) die Gestalt

$$p_0 = p + \lambda \cdot \widetilde{u} = \begin{pmatrix} x + 2\lambda \\ y - \lambda \end{pmatrix}$$

mit einen geeigneten $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei sich wegen $p_0 \in g$ dann

$$2\,(x + 2\lambda) - (y - \lambda) = 0, \qquad \text{also} \qquad \lambda = -\frac{2x - y}{5},$$

und somit

$$p_0 = \begin{pmatrix} x + 2\left(-\frac{2x-y}{5}\right) \\ y - \left(-\frac{2x-y}{5}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y \\ \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y \end{pmatrix}$$

ergibt; der Bildpunkt $f(p)$ des Punktes p unter der Spiegelung f an der Geraden g ist demnach

$$\begin{aligned} f(p) &= \underbrace{p + (p_0 - p)}_{=p_0} + (p_0 - p) = 2\,p_0 - p = \\ &= 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y \\ \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ von f ergibt sich wegen

$$f(p) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot p$$

demnach

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

- Die gegebene Gerade g mit der Gleichung $2x-y=0$ besitzt den Richtungsvektor $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sowie den Normalenvektor $\widetilde{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Für die Spiegelung f an der Geraden g gilt nun

$$f(u) = u \qquad \text{und} \qquad f\,(\widetilde{u}) = -\widetilde{u},$$

so daß sich für die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ von f damit

$$A \cdot u = u \qquad \text{und} \qquad A \cdot \widetilde{u} = -\widetilde{u}$$

ergibt; mit den Matrizen

$$B = \left(u, \quad \widetilde{u}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C = \left(u, \quad -\widetilde{u}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

erhält man also

$$A \cdot B = A \cdot \left(u, \quad \widetilde{u}\right) = \left(A \cdot u, \quad A \cdot \widetilde{u}\right) = \left(u, \quad -\widetilde{u}\right) = C.$$

Wegen $\det(B) = -5 \neq 0$ ist die Matrix B invertierbar, und für die gesuchte Abbildungsmatrix A erhält man

$$A = C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

- Da die gegebene lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Ursprungsgeraden g beschreibt, besitzt ihre Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Gestalt einer Spiegelungsmatrix

$$A = S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2\left(\mathbb{R}\right)$$

mit einem geeigneten Parameter $\varphi \in \mathbb{R}$. Die Gerade g mit der Gleichung $2x - y = 0$ besitzt nun den Richtungsvektor $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, und für diesen gilt $f(u) = u$ und damit

$$A \cdot u = u, \qquad \text{also} \qquad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Für das resultierende lineare Gleichungssystem (in $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$)

$$\text{(I)} \quad \cos\varphi + 2\sin\varphi = 1 \qquad \text{und} \qquad \text{(II)} \quad \sin\varphi - 2\cos\varphi = 2$$

ergibt sich über „$(\mathrm{I}) - 2 \cdot (\mathrm{II})$" zum einen $5\cos\varphi = -3$, also $\cos\varphi = -\frac{3}{5}$, und über „$2 \cdot (\mathrm{I}) + \cdot(\mathrm{II})$" zum anderen $5\sin\varphi = 4$, also $\sin\varphi = \frac{4}{5}$, insgesamt also

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

6.18 Die beiden gegebenen Vektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

sind offensichtlich linear unabhängig und damit eine Basis von $W = \langle w_1, w_2 \rangle$. Die Anwendung des Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens liefert dann im ersten Schritt $\|w_1\| = \sqrt{3}$ und damit

$$b_1 = \frac{1}{\|w_1\|} \cdot w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie im zweiten Schritt

$$a_2 = w_2 - (w_2 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{9}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit $\|a_2\| = \sqrt{3}$ und damit

$$b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

wegen $\langle b_1, b_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$ bilden damit b_1, b_2 eine Orthonormalbasis von W. Die Orthogonalprojektion $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ auf den Unterraum W bildet jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^4$ auf seinen Lotfußpunkt $P(x) \in W$ ab; damit ergibt sich die Darstellung $P(x) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$ mit geeigneten Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, wobei als Lotfußpunkt

$$P(x) - x = (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) - x \in W^\perp$$

erfüllt sein muß. Wegen $P(x) - x \perp b_1$, also $(P(x) - x) \circ b_1 = 0$, ist

$$0 = ((\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) - x) \circ b_1 = \lambda_1 \cdot \underbrace{b_1 \circ b_1}_{=\|b_1\|^2=1} + \lambda_2 \cdot \underbrace{b_2 \circ b_1}_{=0, \text{ da } b_2 \perp b_1} - x \circ b_1$$

und damit $\lambda_1 = x \circ b_1$, und wegen $P(x) - x \perp b_2$, also $(P(x) - x) \circ b_2 = 0$, ist

$$0 = ((\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) - x) \circ b_2 = \lambda_1 \cdot \underbrace{b_1 \circ b_2}_{=0, \text{ da } b_1 \perp b_2} + \lambda_2 \cdot \underbrace{b_2 \circ b_2}_{=\|b_2\|^2=1} - x \circ b_2$$

und damit $\lambda_2 = x \circ b_2$, woraus sich insgesamt

$$P(x) = (x \circ b_1) \cdot b_1 + (x \circ b_2) \cdot b_2$$

ergibt. Mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

erhält man demnach

$$x \circ b_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \circ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{x_1 - x_3 + x_4}{\sqrt{3}}$$

$$x \circ b_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \circ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{x_2 - x_3 - x_4}{\sqrt{3}}$$

und damit

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x \circ b_1) \cdot b_1 + (x \circ b_2) \cdot b_2 \\
&= \frac{x_1 - x_3 + x_4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x_2 - x_3 - x_4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_3 + x_4 \\ 0 \\ -(x_1 - x_3 + x_4) \\ x_1 - x_3 + x_4 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 \\ -(x_2 - x_3 - x_4) \\ -(x_2 - x_3 - x_4) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_3 + x_4 \\ x_2 - x_3 - x_4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

also

$$P(x) = x \qquad \text{mit} \qquad A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4};$$

damit ist A die Abbildungsmatrix, also die darstellende Matrix bezüglich der kanonischen Basis e_1, e_2, e_3, e_4 von $\mathbb{R}^4$, der Orthogonalprojektion P auf den Unterraum W von $\mathbb{R}^4$.

6.19 Die gegebene Matrix

$$D = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \\ -1 & -8 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

ist wegen

$$D \cdot D^\top = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \\ -1 & -8 & -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{81} \begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} = E_3$$

orthogonal; da sie zudem die Determinante

$$\begin{aligned}
\det(D) = \frac{1}{9^3} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \\ -1 & -8 & -4 \end{vmatrix} &\underset{\text{III}-2\text{II}}{\overset{\text{I}-2\text{II}}{=}} \frac{1}{9^3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 9 & -18 \\ 4 & -4 & 7 \\ -9 & 0 & -18 \end{vmatrix} \underset{9 \text{ aus III}}{\overset{9 \text{ aus I}}{=}} \\
&= \frac{1}{9} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & -4 & 7 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} \frac{1}{9} \cdot [(0 - 7 + 0) - (-8 + 0 - 8)] = 1
\end{aligned}$$

besitzt, beschreibt D eine Drehung im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$. Die Drehachse a besteht aus allen Fixpunkten der Drehung und stimmt daher mit dem Eigenraum von D zum Eigenwert 1 überein; wegen

$$D - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8-9 & 1 & -4 \\ 4 & -4-9 & 7 \\ -1 & -8 & -4-9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 4 & -13 & 7 \\ -1 & -8 & -13 \end{pmatrix} \underset{\text{III+I}}{\overset{\text{II+4I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 0 & -9 & -9 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{9}\cdot\text{II}}{\overset{(-1)\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} \underset{\text{III+9II}}{\overset{\text{I+II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist also etwa

$$u = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Richtungsvektor der Drehachse a, und für den Drehwinkel α gilt

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{Spur}(D) - 1}{2} = \frac{\frac{1}{9}(8-4-4) - 1}{2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

6.20 a) Wegen

$$A \cdot A^\top = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

ist A eine orthogonale Matrix; folglich ist auch die zugehörige lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = A \cdot x$, orthogonal.

b) Wegen

$$A^\top = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix} = A$$

ist die gemäß a) orthogonale Matrix A symmetrisch; folglich beschreibt die zugehörige lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = A \cdot x$, eine (Orthogonal–) Spiegelung an ihrer Fixpunktmenge

$$U = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x) = x\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot x = 1 \cdot x\right\} = \operatorname{Eig}(A; 1);$$

wegen

$$A - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & -8 & -4 \\ -8 & -8 & -4 \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$\dim U = 3 - \operatorname{Rang}(A - 1 \cdot E_3) = 3 - 1 = 2,$$

und damit ist U eine Ebene.

6.21 a) Die gegebene Matrix

$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist gemäß

$$S \cdot S^\top = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

orthogonal sowie gemäß $S^\top = S$ auch symmetrisch; damit beschreibt S eine Spiegelung im $\mathbb{R}^3$ am Eigenraum $U = \mathrm{Eig}(S, 1)$ von S zum Eigenwert $\lambda = 1$. Wegen

$$S - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1-3 & -2 & -2 \\ -2 & 1-3 & -2 \\ -2 & -2 & 1-3 \end{pmatrix} \underset{-\frac{3}{2}\cdot\mathrm{III}}{\overset{-\frac{3}{2}\cdot\mathrm{I},\ \mathrm{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$\dim U = 3 - \mathrm{Rang}(S - 1 \cdot E_3) = 3 - 1 = 2;$$

damit ist U eine Ebene, und es gilt

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

b) Die Einträge auf der Hauptdiagonale der gegebenen Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

stimmen mit ihren Eigenwerten $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 2$ überein. Ferner ist die Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gemäß a) sowohl symmetrisch als auch orthogonal, so daß die zu betrachtende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gemäß

$$A = S \cdot D \cdot S \underset{S^\top = S}{=} S^\top \cdot D \cdot S \underset{S^{-1} = S^\top}{=} S^{-1} \cdot D \cdot S$$

zur Matrix D ähnlich ist; folglich besitzt A dieselben Eigenwerte wie D, also $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 2$.

6.22 a) Die Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist genau dann orthogonal, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis des euklidischen $\mathbb{R}^3$ bilden; dabei gilt

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ s_{32} \end{pmatrix} \iff 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot s_{32} = 0 \iff s_{32} = -2,$$

und in diesem Fall sind die beiden ersten Spalten von S wegen

$$\left\| \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{9} = 1$$

schon orthonormierte Vektoren im euklidischen $\mathbb{R}^3$ mit dem Vektorprodukt

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}-6\\6\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix},$$

so daß die Matrix S genau dann orthogonal ist, wenn für ihre dritte Spalte

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}s_{13}\\s_{23}\\s_{33}\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix}s_{13}\\s_{23}\\s_{33}\end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$$

gilt. Folglich gibt es mit

$$S_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\1 & 2 & 2\\2 & -2 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad S_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\1 & 2 & -2\\2 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

genau zwei orthogonale Matrizen von der gesuchten Gestalt.

b) Gemäß a) bilden die Spalten der orthogonalen Matrix

$$S_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\1 & 2 & 2\\2 & -2 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ein Rechtssystem, und damit gilt $\det(S_1) = 1$; folglich beschreibt die lineare Abbildung $\ell_{S_1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\ell_{S_1}(x) = S_1 \cdot x$, eine Drehung. Die Drehachse a stimmt als Fixpunktmenge von ℓ_{S_1} mit dem Eigenraum von S_1 zum Eigenwert $\lambda = 1$ überein; wegen

$$S_1 - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2-3 & 1 & -2\\1 & 2-3 & 2\\2 & -2 & 1-3\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\1 & -1 & 2\\2 & -2 & -2\end{pmatrix} \underset{\text{III}+2\cdot\text{I}}{\overset{\text{II}+\text{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & -6\end{pmatrix} \underset{\text{II}\leftrightarrow(-\frac{1}{6})\cdot\text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \underset{\text{I}+2\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ist also $a = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Für den Drehwinkel φ von ℓ_{S_1} gilt

$$2 \cdot \cos\varphi + 1 = \operatorname{Spur}(S_1) = \frac{2+2+1}{3} = \frac{5}{3}, \quad \text{also} \quad \cos\varphi = \frac{\frac{5}{3}-1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Ferner bilden gemäß a) die Spalten der orthogonalen Matrix

$$S_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\1 & 2 & -2\\2 & -2 & -1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ein Linkssystem, und damit gilt $\det(S_2) = -1$; folglich beschreibt die lineare Abbildung $\ell_{S_2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\ell_{S_2}(x) = S_2 \cdot x$, keine Drehung.

6.23 a) Die Matrix

$$S_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist wegen $S_1^\top S_1 = E_3$ orthogonal und wegen $S_1^\top = S_1$ symmetrisch. Damit beschreibt die Abbildung $s_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $s_1(x) = S_1 \cdot x$, die Spiegelung am Eigenraum $\mathrm{Eig}(S_1; 1)$ von S_1 zum Eigenwert 1; wegen

$$S_1 - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist also s_1 die Spiegelung an der Ebene $E_1 : x_1 + x_2 - 2\,x_3 = 0$.

b) Mit dem Normalenvektor $\widetilde{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ der Ebene $E_2 : x_1 - x_3 = 0$ erhalten wir die Lotgerade

$$\ell = x + \mathbb{R} \cdot \widetilde{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

für den Punkt $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ auf die Ebene E_2. Für den Lotfußpunkt

$$x_0 = x + \lambda \cdot \widetilde{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda \\ x_2 \\ x_3 - \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

mit einem geeigneten $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$(x_1 + \lambda) - (x_3 - \lambda) = 0, \qquad \text{also} \qquad \lambda = \frac{x_3 - x_1}{2},$$

und damit

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_1 + \frac{x_3 - x_1}{2} \\ x_2 \\ x_3 - \frac{x_3 - x_1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_3}{2} \\ x_2 \\ \frac{x_1 + x_3}{2} \end{pmatrix},$$

so daß sich für den Spiegelpunkt $s_2(x)$ von x an der Ebene E_2 dann

$$s_2(x) = x + 2\,(x_0 - x) = 2\,x_0 - x = 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_3}{2} \\ x_2 \\ \frac{x_1 + x_3}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (x_1 + x_3) - x_1 \\ 2\,x_2 - x_2 \\ (x_1 + x_3) - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};$$

ergibt; folglich gilt

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

c) Für die Komposition $d = s_2 \circ s_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $d(x) = S \cdot x$, gilt

$$S = S_2 \cdot S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

wegen $S^\top S = E_3$ ist S orthogonal, so daß d wegen

$$\det(S) = \frac{1}{3^3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \\ = \frac{1}{27} \cdot \big((8 + 8 + (-1)) - ((-4) + (-4) + (-4)) \big) = 1$$

eine Drehung beschreibt. Wegen

$$S - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+2\cdot\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{(-\frac{1}{3})\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-3\cdot\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{I}-2\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Drehachse von d, und für den Drehwinkel $\varphi \in [0, \pi]$ gilt

$$2 \cos\varphi + 1 = \operatorname{Spur}(S) = 2, \qquad \text{also} \qquad \cos\varphi = \frac{1}{2};$$

es ist also d eine Drehung um einen Drehwinkel $\varphi = \pm\frac{\pi}{3}$.

6.24 Die gegebene Ursprungsebene E besitzt die beiden Richtungsvektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

damit den Normalenvektor

$$\widetilde{u} = u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und folglich die Gleichung

$$E \quad : \quad \widetilde{u} \circ x = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad -2\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 0.$$

Der Lotfußpunkt x_0 des Punktes $x \in \mathbb{R}$ auf der Ebene E besitzt (als Punkt auf der Lotgeraden von x auf E) die Gestalt

$$x_0 = x + \lambda \cdot \widetilde{u} = \begin{pmatrix} x_1 - 2\,\lambda \\ x_2 + 2\,\lambda \\ x_3 + \lambda \end{pmatrix}$$

mit einen geeigneten $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei sich wegen $x_0 \in E$ dann

$$-2\,(x_1 - 2\,\lambda) + 2\,(x_2 + 2\,\lambda) + (x_3 + \lambda) = 0,$$

also

$$-2\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 + 9\,\lambda = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda = \frac{2\,x_1 - 2\,x_2 - x_3}{9}$$

und somit

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_1 - 2 \cdot \frac{2\,x_1 - 2\,x_2 - x_3}{9} \\ x_2 + 2 \cdot \frac{2\,x_1 - 2\,x_2 - x_3}{9} \\ x_3 + \frac{2\,x_1 - 2\,x_2 - x_3}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9}x_1 + \frac{4}{9}x_2 + \frac{2}{9}x_3 \\ \frac{4}{9}x_1 + \frac{5}{9}x_2 - \frac{2}{9}x_3 \\ \frac{2}{9}x_1 - \frac{2}{9}x_2 + \frac{8}{9}x_3 \end{pmatrix}$$

ergibt; der Bildpunkt $\sigma(x)$ von x unter der Spiegelung σ an der Ebene E ist

$$\begin{aligned}
\sigma(x) &= \underbrace{x + (x_0 - x)}_{=x_0} + (x_0 - x) = 2\,x_0 - x \\
&= 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{9}x_1 + \frac{4}{9}x_2 + \frac{2}{9}x_3 \\ \frac{4}{9}x_1 + \frac{5}{9}x_2 - \frac{2}{9}x_3 \\ \frac{2}{9}x_1 - \frac{2}{9}x_2 + \frac{8}{9}x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}x_1 + \frac{8}{9}x_2 + \frac{4}{9}x_3 \\ \frac{8}{9}x_1 + \frac{1}{9}x_2 - \frac{4}{9}x_3 \\ \frac{4}{9}x_1 - \frac{4}{9}x_2 + \frac{7}{9}x_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \cdot x \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.
\end{aligned}$$

6.25 a) Zu den gegebenen Vektoren

$$v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

betrachten wir die Hilfsmatrix

$$B = (v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3};$$

wegen $B^\top B = E_3$ ist die Matrix $B \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ orthogonal, so daß ihre Spalten v_1, v_2, v_3 eine Orthonormalbasis des euklidischen $\mathbb{R}^3$ bilden. Insbesondere ist v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$, und nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(v_1) = e_1, \qquad \varphi(v_2) = e_2, \qquad \varphi(v_3) = e_3.$$

Für die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ von φ gilt damit

$$A \cdot v_1 = \varphi(v_1) = e_1, \quad A \cdot v_2 = \varphi(v_2) = e_2, \quad A \cdot v_3 = \varphi(v_3) = e_3,$$

insgesamt also

$$A \cdot B = A \cdot (v_1, v_2, v_3) = (A \cdot v_1,\ A \cdot v_2,\ A \cdot v_3) = (e_1, e_2, e_3) = E_3,$$

und damit $A = B^{-1}$; da die Matrix B orthogonal ist, ist auch $A = B^\top$ eine orthogonale Matrix und folglich $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine orthogonale Abbildung.

b) Die Abbildungsmatrix

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist gemäß a) orthogonal, und es gilt

$$\begin{aligned}\det(A) = \frac{1}{3^3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} &= \\ &= \frac{1}{27}\cdot\big((8+8+(-1)) - ((-4)+(-4)+(-4))\big) = 1;\end{aligned}$$

folglich beschreibt die orthogonale Abbildung φ eine Drehung.

6.26 a) Die Abbildungsmatrizen A_1 und $A_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ der beiden gegebenen Drehungen φ_1 und φ_2 im $\mathbb{R}^3$ sind orthogonal mit $\det(A_1) = 1$ und $\det(A_2) = 1$. Folglich ist aber die Abbildungsmatrix $A = A_1 \cdot A_2$ der Hintereinanderausführung $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$ als Produkt orthogonaler Matrizen selbst orthogonal, und nach dem Determinantenmultiplikationssatz gilt

$$\det(A) = \det(A_1 \cdot A_2) = \det(A_1)\cdot\det(A_2) = 1\cdot 1 = 1;$$

damit ist die Abbildung φ eine Drehung im $\mathbb{R}^3$.

b) Da φ_1 eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ um die x–Achse beschreibt, besitzt die Abbildungsmatrix A_1 die Gestalt

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ 0 & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}$$

für einen Drehwinkel $\alpha_1 \in \mathbb{R}$; wegen

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \varphi_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A_1\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\alpha_1 \\ \cos\alpha_1 \end{pmatrix}$$

erhält man $-\sin\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, insgesamt also

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Da φ_2 eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ um die z–Achse beschreibt, besitzt die Abbildungsmatrix A_2 die Gestalt

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 & 0 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für einen Drehwinkel $\alpha_2 \in \mathbb{R}$; wegen

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \varphi_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = A_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha_2\\ \sin\alpha_2\\ 0\end{pmatrix}$$

erhält man $\cos\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\sin\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, insgesamt also

$$A_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Damit besitzt die Hintereinausführung $\varphi_1 \circ \varphi_2$ die Abbildungsmatrix

$$A = A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

c) Die Drehachse a besteht aus allen Fixpunkten von φ und stimmt daher mit dem Eigenraum von A zum Eigenwert 1 überein; wegen

$$A - 1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} - 1\end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}\cdot 2, \mathrm{III}\cdot(-2)}{\overset{\mathrm{I}\cdot(-\sqrt{2})\left(1+\sqrt{2}\right)}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 1+\sqrt{2} & 0\\ 1 & -1 & \sqrt{2}\\ 1 & 1 & 2-\sqrt{2}\end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix}1 & 1+\sqrt{2} & 0\\ 0 & -2-\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & -\sqrt{2} & 2-\sqrt{2}\end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}\cdot(-\frac{1}{\sqrt{2}})}{\overset{\mathrm{II}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{2}\right)}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 1+\sqrt{2} & 0\\ 0 & 1 & 1-\sqrt{2}\\ 0 & 1 & 1-\sqrt{2}\end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 1+\sqrt{2} & 0\\ 0 & 1 & 1-\sqrt{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ist also

$$a = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix}-1\\ -1+\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix},$$

wobei mehrfach von der dritten binomischen Formel

$$\left(\sqrt{2}+1\right) \cdot \left(\sqrt{2}-1\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$$

Gebrauch gemacht wurde. Für den Drehwinkel α von φ gilt

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{Spur}(A) - 1}{2} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1}{2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}.$$

6.27 Die Drehung φ_x im mathematisch positiven Sinn um die x–Achse mit dem Winkel $\frac{2\pi}{6}$ wird durch die Abbildungsmatrix

$$A_x = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\frac{2\pi}{6} & -\sin\frac{2\pi}{6}\\ 0 & \sin\frac{2\pi}{6} & \cos\frac{2\pi}{6}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3}\\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

die Drehung φ_z im mathematisch positiven Sinn um die z–Achse mit dem Winkel $\frac{2\pi}{6}$ durch die Abbildungsmatrix

$$A_z = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{6} & -\sin\frac{2\pi}{6} & 0 \\ \sin\frac{2\pi}{6} & \cos\frac{2\pi}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben; damit ist aber

$$\begin{aligned} A = A_x \cdot A_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die Abbildungsmatrix der Hintereinanderausführung $\varphi_x \circ \varphi_z$. Da A_x und A_z orthogonale Matrizen mit $\det(A_x) = 1$ und $\det(A_z) = 1$ sind, ist auch ihr Produkt A eine orthogonale Matrix mit

$$\det(A) = \det(A_x \cdot A_z) = \det(A_x) \cdot \det(A_z) = 1,$$

weswegen $\varphi_x \circ \varphi_z$ eine Drehung beschreibt. Für den Drehwinkel α gilt

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{Spur}(A) - 1}{2} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) - 1}{2} = \frac{1}{8},$$

und wegen

$$\begin{aligned} A - 1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{4}\sqrt{3} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \underset{(-2)\cdot\mathrm{I},\ \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\mathrm{II},\ 4\cdot\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} & -2 \\ 3 & \sqrt{3} & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-3\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \\ \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{3} & -2 \\ 0 & -2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{I}+\frac{1}{2}\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2\sqrt{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{2}\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ergibt sich als Drehachse

$$a = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

6.28 Die gegebene Ursprungsebene E mit der Gleichung $x + y + z = 0$ besitzt den Normalenvektor $\widetilde{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Lotfußpunkt p_0 des Punktes $p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ auf der Ebene E besitzt (als Punkt auf der Lotgeraden von p auf E) die Gestalt

$$p_0 = p + \lambda \cdot \widetilde{u} = \begin{pmatrix} x + \lambda \\ y + \lambda \\ z + \lambda \end{pmatrix}$$

mit einen geeigneten $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei sich wegen $p_0 \in E$ dann

$$(x+\lambda)+(y+\lambda)+(z+\lambda)=0, \qquad \text{also} \qquad \lambda = -\frac{x+y+z}{3},$$

und somit

$$p_0 = \begin{pmatrix} x - \frac{x+y+z}{3} \\ y - \frac{x+y+z}{3} \\ z - \frac{x+y+z}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \end{pmatrix}$$

ergibt; der Bildpunkt $\varphi(p)$ des Punktes p unter der Spiegelung φ an der Ebene E ist demnach

$$\varphi(p) = \underbrace{p + (p_0 - p)}_{=p_0} + (p_0 - p) = 2\,p_0 - p =$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z \\ -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z \\ -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \end{pmatrix}.$$

Für die darstellende Matrix von φ bezüglich der kanonischen Basis, also die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ von φ, ergibt sich wegen

$$\varphi(p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z \\ -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z \\ -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \cdot p$$

demnach

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Des weiteren erhält man für den Bildpunkt $\psi(p)$ des Punktes $p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ unter der Spiegelung ψ an der x–y–Ebene $z = 0$

$$\psi(p) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

so daß ψ die Abbildungsmatrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

besitzt; insgesamt ergibt sich als Abbildungsmatrix der Hintereinanderausführung $\varphi \circ \psi$ schließlich

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Wegen

$$C^\top C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

ist C eine orthogonale Matrix, so daß $\varphi \circ \psi$ wegen

$$\det(C) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{27} + \frac{8}{27} + \frac{8}{27}\right) - \left(-\frac{4}{27} - \frac{4}{27} - \frac{4}{27}\right) = 1$$

eine Drehung in $\mathbb{R}^3$ beschreibt.

6.29 Wir ergänzen $v_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

zu einer Orthonormalbasis v_1, v_2, v_3 von $(\mathbb{R}^3, \circ)$. Bei den zu betrachtenden Drehungen bleibt v_3 als Punkt der Drehachse fest, während sich die Wirkung dieser Drehungen um die Winkel $\varphi = \pm 90°$ in der von v_1 und v_2 aufgespannten Lotebene niederschlägt; für die darstellende Matrix dieser Drehungen bezüglich v_1, v_2, v_3 ergibt sich damit

$$M = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

also

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = D_1^\top$$

und damit

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_1^\top.$$

Mit

$$P = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

ergibt sich für die Abbildungsmatrix A dieser Drehungen, also die gesuchte darstellende Matrix A bezüglich der Standardbasis, dann $M = P^\top AP$, also

$$A_1 = PM_1P^\top = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{25} & \frac{3}{5} & -\frac{12}{25} \\ -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ -\frac{12}{25} & \frac{4}{5} & \frac{9}{25} \end{pmatrix}$$

sowie

$$A_2 = PM_2P^\top = PM_1^\top P^\top = (PM_1P^\top)^\top = A_1^\top = \begin{pmatrix} \frac{16}{25} & -\frac{3}{5} & -\frac{12}{25} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ -\frac{12}{25} & -\frac{4}{5} & \frac{9}{25} \end{pmatrix}.$$

6.30 Der Vektor $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und der Richtungsvektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ der Drehachse sind wegen $u_1 \circ v = 0$ orthogonal; damit bilden u_1, u_2, v mit

$$u_2 = v \times u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ein Orthogonalsystem und folglich

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis im euklidischen $\mathbb{R}^3$. Bei den zu betrachtenden Drehungen bleibt v_3 als Punkt der Drehachse fest, während sich die Wirkung dieser Drehungen um die Winkel $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ in der von v_1 und v_2 aufgespannten Lotebene niederschlägt; für die darstellende Matrix dieser Drehungen bezüglich v_1, v_2, v_3 ergibt sich damit

$$M = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

also

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = D_1^\top$$

und damit

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_1^\top.$$

Mit

$$P = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

ergibt sich für die Abbildungsmatrix U dieser Drehungen, also die gesuchte darstellende Matrix U bezüglich der kanonischen Basis, dann $M = P^\top U P$, also

$$\begin{aligned}
U_1 = PM_1P^\top &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
U_2 = PM_2P^\top = PM_1^\top P^\top = (PM_1P^\top)^\top = \\
= U_1^\top = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

6.31 a) Mit der Drehmatrix

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

ergibt sich

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3};$$

damit beschreibt eine lineare Abbildung $d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die bezüglich einer Orthonormalbasis b_1, b_2, b_3 von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ die darstellende Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ besitzt, eine Drehung mit der Drehachse $\mathbb{R} \cdot b_3$ und dem Drehwinkel $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Wegen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

können wir also

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wählen; bei der Reihenfolge b_2, b_1, b_3 wird die entsprechende Drehung mit dem entgegengesetzten Drehsinn betrachtet.

b) Mit der orthogonalen Matrix

$$P = (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

ergibt sich für die darstellende Matrix von d bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 von $\mathbb{R}^3$, also für die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ von d mit $d(x) = A \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$, über den Basiswechsel $P^\top A P = M$ damit

$$A = PMP^\top = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^\top =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix};$$

für die entsprechende Drehung mit dem entgegengesetzten Drehsinn erhält man die Abbildungsmatrix $A^\top = A^{-1} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$.

c) Es ist nicht möglich, dass die Drehung $d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich einer Basis c_1, c_2, c_3 von $\mathbb{R}^3$ eine darstellende Matrix in Diagonalgestalt besitzt; ansonsten wäre der Endomorphismus d von $\mathbb{R}^3$ und damit jede seiner darstellenden Matrizen, also auch die Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalisierbar. Dies ist aber nicht der Fall, da ihr charakteristisches Polynom

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda \cdot E_3) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \underset{\text{3. Zeile}}{\overset{\text{Laplace}}{=}}$$
$$= (1 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \cdot \underbrace{\left[\left(\tfrac{1}{2} - \lambda\right)^2 + \tfrac{3}{4} \right]}_{>0}$$

nicht vollständig in Linearfaktoren zerfällt.

6.32 a) Für die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = A \cdot x$, gilt

$$A \cdot e_1 = f(e_1) = e_2, \quad A \cdot e_2 = f(e_2) = e_3 \quad \text{und} \quad A \cdot e_3 = f(e_3) = e_1$$

und damit

$$A = A \cdot (e_1, e_2, e_3) = (A \cdot e_1, A \cdot e_2, A \cdot e_3) = (e_2, e_3, e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Spalten e_2, e_1, e_3 von A eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bilden, ist A eine orthogonale Matrix, und wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (0+0+1) - (0+0+0) = 1$$

beschreibt f eine Drehung im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$. Die Drehachse a besteht aus allen Fixpunkten von f und stimmt daher mit dem Eigenraum von A zum Eigenwert 1 überein; wegen

$$A - 1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{II+I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{III+II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist also

$$a = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und für den Drehwinkel α von f gilt

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{Spur}(A) - 1}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

b) Die gegebene Ursprungsebene

$$E_1 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

besitzt den Normalenvektor

$$\widetilde{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit die Gleichung

$$\widetilde{u}_1 \circ x = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad -x_1 + x_2 = 0.$$

Der Lotfußpunkt p_1 des Punktes e_1 auf der Ebene E_1 besitzt (als Punkt auf der Lotgeraden von e_1 auf E_1) die Gestalt

$$p_1 = e_1 + \lambda \cdot \widetilde{u}_1 = \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit einen geeigneten $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei sich wegen $p_1 \in E_1$ dann

$$-(1-\lambda) + \lambda = 0, \qquad \text{also} \qquad 2\lambda = 1 \quad \text{bzw.} \quad \lambda = \frac{1}{2},$$

und somit $p_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt. Der Bildpunkt $g_1(e_1)$ des Punktes e_1 unter der Spiegelung g_1 an der Ebene E_1 ist demnach

$$g(e_1) = \underbrace{e_1 + (p_1 - e_1)}_{=p_1} + (p_1 - e_1) = 2\,p_1 - e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2.$$

c) Für die in b) ermittelte Spiegelung $g_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ an der Ebene

$$E_1 = \mathbb{R} \cdot e_3 + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$g_1(e_1) = e_2 \qquad \text{und damit} \qquad g_1(e_2) = e_1 \qquad \text{sowie} \qquad g_1(e_3) = e_3.$$

Entsprechend erhält man für die Spiegelung $g_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ an der Ebene

$$E_2 = \mathbb{R} \cdot e_2 + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

durch Vertauschung der Rollen von e_2 und e_3 dann

$$g_2(e_1) = e_3 \qquad \text{und} \qquad g_2(e_3) = e_1 \qquad \text{sowie} \qquad g_2(e_2) = e_2,$$

so daß sich für das Produkt $g_2 \circ g_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ der beiden Ebenenspiegelungen g_1 und g_2 somit

$$\begin{array}{lllllllll} (g_2 \circ g_1)\,(e_1) & = & g_2\,(g_1(e_1)) & = & g_2(e_2) & = & e_2 & = & f(e_1) \\ (g_2 \circ g_1)\,(e_2) & = & g_2\,(g_1(e_2)) & = & g_2(e_1) & = & e_3 & = & f(e_2) \\ (g_2 \circ g_1)\,(e_3) & = & g_2\,(g_1(e_3)) & = & g_2(e_3) & = & e_1 & = & f(e_3) \end{array}$$

ergibt. Folglich stimmen die beiden linearen Abbildungen f und $g_2 \circ g_1$ auf der Basis e_1, e_2, e_3 überein, woraus $f = g_2 \circ g_1$ folgt.

6.33 a) Die gegebene Ebene $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2\,x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ besitzt das orthogonale Komplement

$$E^\perp = \langle \widetilde{u}_E \rangle \qquad \text{mit} \qquad \widetilde{u}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Für $x \in \mathbb{R}^3$ betrachten wir die Zerlegung

$$x = \underbrace{u}_{\in E} + \underbrace{\lambda \cdot \widetilde{u}_E}_{\in E^\perp} \qquad \text{für ein} \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

woraus wegen

$$u = x - \lambda \cdot \widetilde{u}_E = \begin{pmatrix} x_1 - 2\lambda \\ x_2 + \lambda \\ x_3 + \lambda \end{pmatrix} \in E$$

zunächst

$$2(x_1 - 2\lambda) - (x_2 + \lambda) - (x_3 + \lambda) = 0, \qquad \text{also} \qquad 2x_1 - x_2 - x_3 = 6\lambda,$$

und damit $\lambda = \frac{1}{6}\,(2x_1 - x_2 - x_3)$ folgt. Somit ist

$$\sigma(x) = x - 2\,\lambda\,\widetilde{u}_E = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{2}{6}\,(2x_1 - x_2 - x_3) \cdot 2 \\ x_2 - \frac{2}{6}\,(2x_1 - x_2 - x_3) \cdot (-1) \\ x_3 - \frac{2}{6}\,(2x_1 - x_2 - x_3) \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \\ \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \end{pmatrix} = A_\sigma \cdot x$$

mit

$$A_\sigma = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Des weiteren besitzt die gegebene Gerade

$$g = \mathbb{R} \cdot u_g \qquad \text{mit} \qquad u_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

das orthogonale Komplement $g^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 - x_3 = 0\}$. Für $x \in \mathbb{R}^3$ betrachten wir die Zerlegung

$$x = \underbrace{\mu \cdot u_g}_{\in g} + \underbrace{\widetilde{u}}_{\in g^\perp} \qquad \text{für ein} \qquad \mu \in \mathbb{R},$$

woraus wegen

$$\widetilde{u} = x - \mu \cdot u_g = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - \mu \\ x_3 + \mu \end{pmatrix} \in g^\perp$$

zunächst

$$(x_2 - \mu) - (x_3 + \mu) = 0, \qquad \text{also} \qquad x_2 - x_3 = 2\mu,$$

und damit $\mu = \frac{1}{2}\,(x_2 - x_3)$ folgt. Somit ist

$$\delta(x) = 2\,\mu\,u_g - x = \begin{pmatrix} (x_2 - x_3) \cdot 0 - x_1 \\ (x_2 - x_3) \cdot 1 - x_2 \\ (x_2 - x_3) \cdot (-1) - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix} = A_\delta \cdot x$$

mit

$$A_\delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Hintereinanderausführung $\varphi = \sigma \circ \delta$ besitzt damit die Abbildungsmatrix

$$A = A_\sigma \cdot A_\delta = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Die Abbildungsmatrix A von φ ist wegen

$$A^\top A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

orthogonal und wegen $A^\top = A$ symmetrisch; folglich ist φ die Orthogonalspiegelung in $(\mathbb{R}^3, \circ)$ am Unterraum

$$U = \mathrm{Eig}(A; 1) \qquad \text{mit} \qquad U^\perp = \mathrm{Eig}(A; -1).$$

Wegen

$$A - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\mathrm{Rang}(A - E_3) = 1$, also $\dim \mathrm{Eig}(A; 1) = 2$; folglich ist U eine Ebene, und es gilt

$$U = \{x \in \mathbb{R} \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

6.34 a) Die zu betrachtende Ebene

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -x - y + 2\,z = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

stimmt mit dem Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssytems mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

überein; mit den freien Variablen $y = \lambda \in \mathbb{R}$ und $z = \mu \in \mathbb{R}$ ergibt sich für die gebundene Variable

$$x = -y + 2\,z = -\lambda + 2\,\mu,$$

und wir erhalten für E die Parameterdarstellung

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} -\lambda + 2\,\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mid \lambda,\ \mu \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Die Ursprungsebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$ mit der Gleichung $-x - y + 2\,z = 0$ besitzt den Normalenvektor $\widetilde{u}_E = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sowie gemäß a) $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ als einen Richtungsvektor, so daß

$$u_2 = u_1 \times \widetilde{u}_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

ein zu u_1 orthogonaler Richtungsvektor von E ist. Damit ist

$$b_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von E sowie

$$b_1, \quad b_2, \quad b_3 = \frac{\widetilde{u}_E}{\|\widetilde{u}_E\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Standardskalarprodukts $\circ$; folglich ist

$$T = (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

eine orthogonale Matrix. Wegen

$$T \cdot e_1 = b_1 \quad \text{und} \quad T \cdot e_2 = b_2$$

gilt

$$T^{-1} \cdot b_1 = e_1 \quad \text{und} \quad T^{-1} \cdot b_2 = e_2,$$

woraus sich

$$T^{-1}(E) = T^{-1}(\langle b_1, b_2 \rangle) = \langle e_1, e_2 \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \right\}$$

ergibt.

6.35 a) Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind offensichtlich linear unabhängig und damit schon eine Basis des Untervektorraums $U = \langle v_1, v_2 \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$. Wir unterwerfen diese dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren und erhalten

$$a_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = 3, \quad \text{also} \quad b_1 = \frac{1}{\|a_1\|}\, a_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und

$$a_2 = v_2 - (v_2 \circ b_1) \cdot b_1 = v_2 - b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1, \quad \text{also} \quad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|}\, a_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

damit ist b_1, b_2 eine Orthonormalbasis von U bezüglich $\circ$.

b) Wir ermitteln zunächst die notwendige Gestalt einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so daß $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = A \cdot x$, eine orthogonale Abbildung mit

$$f(v_1) = \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad f(v_2) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist. Gemäß a) ist

$$b_1 = \frac{1}{3} \cdot a_1 = \frac{1}{3} \cdot v_1 \qquad \text{und} \qquad b_2 = a_2 = v_2 - b_1,$$

und mit der Linearität von f ergibt sich

$$\begin{aligned} f(b_1) = \frac{1}{3} \cdot f(v_1) \quad &= \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = w_1 \\ f(b_2) = f(v_2) - f(b_1) \quad &= \quad \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = w_2. \end{aligned}$$

Wir ergänzen b_1, b_2 durch

$$b_3 = b_1 \times b_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

zu einer Orthonormalbasis b_1, b_2, b_3 von $(\mathbb{R}^3, \circ)$; ferner ist

$$w_3 = w_1 \times w_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \times \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus $b_3 \perp b_1$ und $b_3 \perp b_2$ folgt wegen der Winkeltreue von f zunächst

$$f(b_3) \perp f(b_1) = w_1 \quad \text{und} \quad f(b_3) \perp f(b_2) = w_2,$$

also $f(b_3) = \lambda \cdot w_3$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$; die Längentreue von f liefert dann

$$1 = \|b_3\| = \|f(b_3)\| = \|\lambda \cdot w_3\| = |\lambda| \cdot \|w_3\| = |\lambda| \cdot 1 = |\lambda|,$$

also $\lambda = \pm 1$, und damit $f(b_3) = \pm w_3$. Wir erhalten demnach

$$A \cdot b_1 = f(b_1) = w_1, \qquad A \cdot b_2 = f(b_2) = w_2, \qquad A \cdot b_3 = f(b_3) = \pm w_3,$$

mit der orthogonalen Matrix $B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ und der (ebenfalls orthogonalen) Matrix $C = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ also

$$A \cdot B = A \cdot (b_1, b_2, b_3) = (A \cdot b_1, A \cdot b_2, A \cdot b_3) = (w_1, w_2, w_3) = C,$$

und damit

$$\begin{aligned} A = C \cdot B^{-1} \underset{B^{-1}=B^\top}{=} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \mp 5 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -2 & 10 & 11 \\ \mp 5 & \pm 10 & \mp 10 \\ -14 & -5 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir überprüfen nun, ob die beiden in Frage kommenden linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = A \cdot x$, mit

$$A = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -2 & 10 & 11 \\ -5 & 10 & -10 \\ -14 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -2 & 10 & 11 \\ 5 & -10 & 10 \\ -14 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

tatsächlich das Gewünschte leisten. Wegen

$$A^\top A = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -2 & \mp 5 & -14 \\ 10 & \pm 10 & -5 \\ 11 & \mp 10 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -2 & 10 & 11 \\ \mp 5 & \pm 10 & \mp 10 \\ -14 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

ist $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine orthogonale Matrix, also ist $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine orthogonale Abbildung, und es gilt

$$f(v_1) = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -2 & 10 & 11 \\ \mp 5 & \pm 10 & \mp 10 \\ -14 & -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

und

$$f(v_2) = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -2 & 10 & 11 \\ \mp 5 & \pm 10 & \mp 10 \\ -14 & -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

6.36 Wir zeigen zunächst, daß es höchstens eine Drehung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(v_1) = v_2 \qquad \text{und} \qquad \varphi(v_2) = v_3$$

geben kann, wobei v_1, v_2, v_3 die gegebene Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ ist. Aufgrund der Winkeltreue der orthogonalen Abbildung φ erhält man

$$\begin{aligned} v_3 \perp v_1 &\implies \varphi(v_3) \perp \varphi(v_1) = v_2 \\ v_3 \perp v_2 &\implies \varphi(v_3) \perp \varphi(v_2) = v_3 \end{aligned}$$

und damit $\varphi(v_3) = \lambda \cdot v_1$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei sich aufgrund ihrer Längentreue

$$1 = \|v_3\| = \|\varphi(v_3)\| = \|\lambda \cdot v_1\| = |\lambda| \cdot \|v_1\| = |\lambda| \cdot 1 = |\lambda|\,,$$

also $\lambda = \pm 1$, ergibt; für das Vorzeichen liefert die Orientierungstreue von φ dann

$$\begin{aligned} \det(v_1,\ v_2,\ v_3) &= \det(\varphi(v_1),\ \varphi(v_2),\ \varphi(v_3)) = \det(v_2,\ v_3,\ \lambda \cdot v_1) = \\ &= \lambda \cdot \det(v_2,\ v_3,\ v_1) = -\lambda \cdot \det(v_2,\ v_1,\ v_3) = \lambda \cdot \det(v_1,\ v_2,\ v_3)\,, \end{aligned}$$

wegen $\det(v_1,\ v_2,\ v_3) \neq 0$ also $\lambda = 1$. Durch ihre Wirkung

$$\varphi(v_1) = v_2, \quad \varphi(v_2) = v_3 \qquad \text{und} \qquad \varphi(v_3) = v_1$$

auf der (Orthonormal–)Basis v_1, v_2, v_3 von $\mathbb{R}^3$ ist nun die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ schon eindeutig bestimmt.

Wir weisen nun nach, daß die einzige in Frage kommende lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(v_1) = v_2, \quad \varphi(v_2) = v_3 \qquad \text{und} \qquad \varphi(v_3) = v_1$$

tatsächlich die gewünschten Eigenschaften besitzt. Wegen

$$\begin{aligned} \varphi(v_1) = v_2 &= 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \\ \varphi(v_2) = v_3 &= 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 \\ \varphi(v_3) = v_1 &= 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \end{aligned}$$

ist

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

die darstellende Matrix von φ bezüglich der Orthonormalbasis v_1, v_2, v_3 von $\mathbb{R}^3$. Wegen

$$M^\top \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

ist die Matrix M orthogonal, so daß φ wegen

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (0+0+1) - (0+0+0) = 1$$

eine Drehung des euklidischen $\mathbb{R}^3$ beschreibt. Für den Drehwinkel α von φ ergibt sich schließlich

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{Spur}(M) - 1}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

(Diese Informationen lassen sich aus der darstellenden Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ der linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich der Orthonormalbasis v_1, v_2, v_3 ebenso gewinnen wie aus ihrer Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ selbst: mit der orthogonalen Matrix $P = (v_1, v_2, v_3) \in \mathrm{O}_3$ ergibt sich nämlich für den Basiswechsel

$$M = P^{-1}AP = P^\top AP \qquad \text{bzw.} \qquad A = PMP^{-1} = PMP^\top,$$

so daß mit M dann auch A (als Produkt orthogonaler Matrizen) orthogonal ist; ferner sind A und M zueinander ähnliche Matrizen und besitzen daher dieselbe Determinante und dieselbe Spur.)

6.37 a) Unter Verwendung der Bilinearität und der Symmetrie des Standardskalarprodukts $\circ$ von $\mathbb{R}^3$ sowie der Beziehung $\|v_1\| = \|v_2\|$ ergibt sich

$$\begin{aligned} (v_1 + v_2) \circ (v_1 - v_2) &= v_1 \circ (v_1 - v_2) + v_2 \circ (v_1 - v_2) = \\ &= v_1 \circ v_1 + v_1 \circ (-v_2) + v_2 \circ v_1 + v_2 \circ (-v_2) = \\ &= v_1 \circ v_1 - v_1 \circ v_2 + v_1 \circ v_2 - v_2 \circ v_2 = \\ &= v_1 \circ v_1 - v_2 \circ v_2 = \|v_1\|^2 - \|v_2\|^2 = 0; \end{aligned}$$

damit stehen die Vektoren $v_1 + v_2$ und $v_1 - v_2$ senkrecht aufeinander.

b) Die Vektoren v_1, v_2 sind linear unabhängig mit $E = \langle v_1, v_2\rangle$; wegen $v_3 \neq 0$ folgt aus $v_3 \in E^\perp$ schon $v_3 \notin E$, so daß v_1, v_2, v_3 linear unabhängig und damit eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden. Nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung gibt es nun genau eine lineare Abbildung $\delta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\delta(v_1) = v_2, \quad \delta(v_2) = v_1 \quad \text{und} \quad \delta(v_3) = -v_3,$$

und es bleibt zu zeigen, daß δ eine Drehung des euklidischen $(\mathbb{R}^3, \circ)$ ist. Dazu betrachten wir die Vektoren $v_1 + v_2$, $v_1 - v_2 \in E$; wegen der Orthogonalität von $v_1 + v_2$ und $v_1 - v_2$ bilden

$$b_1 = \frac{v_1 + v_2}{\|v_1 + v_2\|} \qquad \text{und} \qquad b_2 = \frac{v_1 - v_2}{\|v_1 - v_2\|}$$

eine Orthonormalbasis von E. Da ferner der Vektor $v_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ senkrecht auf E steht, ist $b_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$ eine Orthonormalbasis von $E^\perp$, so daß insgesamt

$$b_1 = \frac{v_1 + v_2}{\|v_1 + v_2\|}, \qquad b_2 = \frac{v_1 - v_2}{\|v_1 - v_2\|} \qquad \text{und} \qquad b_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$$

eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ bilden. Dabei gilt nach Konstruktion

$$\begin{aligned} \delta(v_1 + v_2) = \delta(v_1) + \delta(v_2) &= v_2 + v_1 = v_1 + v_2 \\ \delta(v_1 - v_2) = \delta(v_1) - \delta(v_2) &= v_2 - v_1 = -(v_1 - v_2) \\ \delta(v_3) &= -v_3 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \delta(b_1) & = & b_1 & = & 1 \cdot b_1 & + & 0 \cdot b_2 & + & 0 \cdot b_3 \\ \delta(b_2) & = & -b_2 & = & 0 \cdot b_1 & + & (-1) \cdot b_2 & + & 0 \cdot b_3 \\ \delta(b_3) & = & -b_3 & = & 0 \cdot b_1 & + & 0 \cdot b_2 & + & (-1) \cdot b_3 \end{array}$$

Folglich besitzt die darstellende Matrix M von δ bezüglich der Orthonormalbasis b_1, b_2, b_3 von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ die Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D_\pi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

so daß δ eine Drehung mit der Drehachse $\mathbb{R} \cdot b_1$ und dem Drehwinkel $\varphi = \pi$ beschreibt, der sich in der Lotebene $\langle b_2, b_3\rangle$ niederschlägt. Dies läßt sich ebenfalls an der Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ von δ ablesen; mit der orthogonalen Matrix $P = (b_1, b_2, b_3) \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ ergibt sich nämlich $M = P^\top A P$ bzw. $A = PMP^\top$, so daß A als Produkt orthogonaler Matrizen selbst orthogonal ist, und wegen $\det(A) = \det(M) = 1$ ist δ schon eine Drehung.

Alternativ kann man auch ohne Verwendung der oben konstruierten Orthonormalbasis b_1, b_2, b_3 von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ argumentieren. Dazu betrachten wir nun die Drehung δ mit der Drehachse $\mathbb{R} \cdot (v_1 + v_2)$ und dem Drehwinkel $\varphi = \pi$. Für diese Drehung δ müssen wir noch die gewünschten Eigenschaften

$$\delta(v_1) = v_2, \quad \delta(v_2) = v_1 \quad \text{und} \quad \delta(v_3) = -v_3$$

nachweisen. Der Punkt v_1+v_2 bleibt als Punkt der Drehachse fest, während sich die Wirkung der Drehung um den Winkel $\varphi=\pi$ in der von v_1-v_2 und v_3 aufgespannten Lotebene niederschlägt; es ist also

$$\delta(v_1+v_2)=v_1+v_2 \quad \text{sowie} \quad \delta(v_1-v_2)=-(v_1-v_2) \;\; \text{und} \;\; \delta(v_3)=-v_3$$

und damit

$$\begin{aligned} \delta(v_1)+\delta(v_2)=\delta(v_1+v_2) &= v_1+v_2 \\ \delta(v_1)-\delta(v_2)=\delta(v_1-v_2) &= -(v_1-v_2)=-v_1+v_2 \end{aligned}$$

woraus man durch Addition der beiden Gleichungen

$$2\,\delta(v_1)=2\,v_2, \qquad \text{also} \qquad \delta(v_1)=v_2,$$

sowie durch Subtraktion der beiden Gleichungen

$$2\,\delta(v_2)=2\,v_1, \qquad \text{also} \qquad \delta(v_2)=v_1,$$

zusammen also für die Drehung δ die gewünschten Eigenschaften

$$\delta(v_1)=v_2, \qquad \delta(v_2)=v_1 \qquad \text{und} \qquad \delta(v_3)=-v_3.$$

erhält.

6.38 a) Wir betrachten eine Drehung φ des euklidischen $\mathbb{R}^3$ mit der symmetrisch vorausgesetzten Abbildungsmatrix $D\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ um die Drehachse a und den Drehwinkel α, und ergänzen einen normierten Richtungsvektor v_3 von a zu einer Orthonormalbasis v_1, v_2, v_3 von $(\mathbb{R}^3,\circ)$. Die darstellende Matrix von φ bezüglich v_1, v_2, v_3 ist damit

$$M=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3},$$

und mit der orthogonalen Matrix $P=(v_1,v_2,v_3)\in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ ergibt sich über den Basiswechsel $M=P^\top DP$. Wegen

$$M^\top=\left(P^\top DP\right)^\top=P^\top D^\top\left(P^\top\right)^\top=P^\top DP=M$$

ist mit der Abbildungsmatrix D auch die darstellende Matrix M symmetrisch, woraus $\sin\alpha=0$ und damit $\alpha=0$ oder $\alpha=\pi$ folgt.

Für $\alpha=0$ ist φ die identische Abbildung, und für $\alpha=\pi$ ist φ eine Geradenspiegelung an der Drehachse a; in beiden Fällen ist also die Abbildungsmatrix D tatsächlich symmetrisch.

b) Die Drehung φ des euklidischen $\mathbb{R}^3$ um die z–Achse mit dem Drehwinkel $\alpha=\pi$ besitzt die Abbildungmatrix

$$D=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3},$$

und die Spiegelung ψ des euklidischen $\mathbb{R}^3$ an der die z–Achse beinhaltenden Ebene $x = y$ besitzt die Abbildungsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{2} & -\cos\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Wird zunächst die Drehung und danach die Spiegelung ausgeführt, ergibt sich die lineare Abbildung $\psi \circ \varphi$ mit der Matrix

$$S \cdot D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wird zunächst die Spiegelung und danach die Drehung ausgeführt, ergibt sich die lineare Abbildung $\varphi \circ \psi$ mit der Matrix

$$D \cdot S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

es ist hier also $S \cdot D = D \cdot S$ und folglich $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi$.

6.39 In einem euklidischen Vektorraum W mit dem Skalarprodukt φ wird für einen Unterraum $U \subseteq W$ das orthogonale Komplement

$$U^\perp = \{w \in W \mid \varphi(u,w) = 0 \quad \text{für alle} \quad u \in U\}$$

betrachtet; dies ist wiederum ein Unterraum von W. Dabei gilt für Unterräume U_1, $U_2 \subseteq W$ mit $U_1 \subseteq U_2$ wegen

$$\begin{aligned} w \in U_2^\perp \quad &\Longrightarrow \quad \varphi(u,w) = 0 \quad \text{für alle} \quad u \in U_2 \\ &\underset{U_1 \subseteq U_2}{\Longrightarrow} \quad \varphi(u,w) = 0 \quad \text{für alle} \quad u \in U_1 \\ &\Longrightarrow \quad w \in U_1^\perp \end{aligned}$$

schon $(*)$ $U_2^\perp \subseteq U_1^\perp$. Somit ergibt sich für Unterräume U, $V \subseteq W$ dann:

a) Wegen

$$U \subseteq U + V \qquad \text{und} \qquad V \subseteq U + V$$

gilt gemäß $(*)$

$$(U+V)^\perp \subseteq U^\perp \qquad \text{und} \qquad (U+V)^\perp \subseteq V^\perp,$$

zusammen also

$$(U+V)^\perp \subseteq U^\perp \cap V^\perp.$$

Für „$\supseteq$“ sei $w \in U^\perp \cap V^\perp$; damit gilt sowohl

$$w \in U^\perp, \qquad \text{also} \qquad \varphi(u,w) = 0 \quad \text{für alle} \quad u \in U,$$

also auch

$$w \in V^\perp, \qquad \text{also} \qquad \varphi(v,w) = 0 \quad \text{für alle} \quad v \in V.$$

Für alle $x \in U + V$ gibt es nun $u \in U$ und $v \in V$ mit $x = u + v$, so daß sich wegen der Linearität von φ im 1. Argument dann

$$\varphi(x, w) = \varphi(u + v, w) = \varphi(u, w) + \varphi(v, w) = 0 + 0 = 0$$

ergibt; damit ist aber $w \in (U + V)^{\perp}$.

b) Wegen

$$U \cap V \subseteq U \qquad \text{und} \qquad U \cap V \subseteq V$$

gilt gemäß $(*)$

$$U^{\perp} \subseteq (U \cap V)^{\perp} \qquad \text{und} \qquad V^{\perp} \subseteq (U \cap V)^{\perp},$$

zusammen also

$$U^{\perp} + V^{\perp} \subseteq (U \cap V)^{\perp}.$$

6.40 Zu betrachten ist ein euklidischer Vektorraum (V, φ) mit dem $\mathbb{R}$–Vektorraum V von $\dim(V) < \infty$ und dem Skalarprodukt $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$. Für einen Untervektorraum $U \subseteq V$ wird

$$U^{\perp} = \{v \in V \mid \varphi(u, v) = 0 \ \text{ für alle } \ u \in U\}$$

definiert; es seien U und W beliebige Untervektorräume von V.

a) Wir zeigen, daß $U^{\perp}$ ist ein Untervektorraum von V ist, anhand des Unterraumkriteriums:

- Für $0_V \in V$ gilt

$$\varphi(u, 0_V) \underset{(*)}{=} 0 \quad \text{für alle} \quad u \in U;$$

  damit ist $0_V \in U^{\perp}$.
- Für alle v_1, $v_2 \in U^{\perp}$ gilt v_1, $v_2 \in V$ mit

$$\varphi(u, v_1) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(u, v_2) = 0 \quad \text{für alle} \quad u \in U;$$

  für $v_1 + v_2 \in V$ folgt also

$$\varphi(u, v_1 + v_2) \underset{(*)}{=} \varphi(u, v_1) + \varphi(u, v_2) = 0 + 0 = 0 \quad \text{für alle} \quad u \in U,$$

  und damit ist $v_1 + v_2 \in U^{\perp}$.
- Für alle $v \in U^{\perp}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $v \in V$ mit

$$\varphi(u, v) = 0 \quad \text{für alle} \quad u \in U;$$

  für $\lambda \cdot v \in V$ folgt also

$$\varphi(u, \lambda \cdot v) \underset{(*)}{=} \lambda \cdot \varphi(u, v) = \lambda \cdot 0 = 0 \quad \text{für alle} \quad u \in U,$$

  und damit ist $\lambda \cdot v \in U^{\perp}$.

Dabei geht bei $(*)$ jeweils die Linearität von φ im zweiten Argument ein.

b) Für jedes $v \in V$ betrachten wir die orthogonale Projektion $u_0 \in U$ von v in U; damit gilt

$$u \perp v - u_0, \quad \text{also} \quad \varphi(u, v - u_0) = 0 \quad \text{für alle} \quad u \in U,$$

und damit $\widetilde{u} = v - u_0 \in U^\perp$, so daß wegen

$$v = (v - u_0) + u_0 = u_0 + \widetilde{u} \in U + U^\perp$$

zunächst $U + U^\perp = V$ folgt. Für alle $v \in U \cap U^\perp$ gilt ferner

$$v \in U \quad \text{und} \quad v \in U^\perp, \qquad \text{also} \qquad \varphi(v, v) = 0;$$

da φ positiv definit ist, folgt schon $v = 0_V$ und damit dann $U \cap U^\perp = \{0_V\}$. Mit der Dimensionsformel für Untervektorräume ergibt sich nun

$$\begin{aligned}\dim(V) = \dim(U + U^\perp) &= \dim(U) + \dim(U^\perp) - \dim(U \cap U^\perp) = \\ &= \dim(U) + \dim(U^\perp) - \dim(\{0_V\}) = \dim(U) + \dim(U^\perp),\end{aligned}$$

also $\dim(U^\perp) = \dim(V) - \dim(U)$.

c) Für jedes $u \in U$ gilt gemäß der Definition von $U^\perp$ insbesondere

$$\varphi(u, v) = 0 \quad \text{für alle} \quad v \in U^\perp;$$

da φ symmetrisch ist, folgt daraus

$$\varphi(v, u) = 0 \quad \text{für alle} \quad v \in U^\perp,$$

und damit gilt $u \in (U^\perp)^\perp$. Demnach ist $U \subseteq (U^\perp)^\perp$, und wegen

$$\dim((U^\perp)^\perp) \underset{\text{b) für } U^\perp}{=} V - \dim(U^\perp) \underset{\text{b) für } U}{=} V - (V - \dim(U)) = \dim(U)$$

folgt daraus schon $U = (U^\perp)^\perp$.

d) Wir zeigen $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$ durch den Nachweis von zwei Inklusionen:

- Für „$\subseteq$“ sei $v \in (U + W)^\perp$; damit gilt $\varphi(x, v) = 0$ für alle $x \in U + W$. Daraus folgt zum einen wegen $U \subseteq (U + W)$ schon

  $$\varphi(u, v) = 0 \quad \text{für alle} \quad u \in U, \quad \text{also} \quad v \in U^\perp,$$

  und zum anderen wegen $W \subseteq (U + W)$ schon

  $$\varphi(w, v) = 0 \quad \text{für alle} \quad w \in W, \quad \text{also} \quad v \in W^\perp,$$

  insgesamt also $v \in U^\perp \cap W^\perp$.
- Für „$\supseteq$“ sei $v \in U^\perp \cap W^\perp$, also $v \in U^\perp$ und $v \in W^\perp$; damit gilt zum einen

  $$\varphi(u, v) = 0 \quad \text{für alle} \quad u \in U \qquad \big(\text{wegen } v \in U^\perp\big)$$

  und zum anderen

  $$\varphi(w, v) = 0 \quad \text{für alle} \quad w \in W \qquad \big(\text{wegen } v \in W^\perp\big),$$

  wegen der Linearität von φ im ersten Argument demnach insgesamt

  $$\varphi(u + w, v) = \varphi(u, v) + \varphi(w, v) = 0 + 0 = 0$$

  für alle $u + w \in U + W$, also $v \in (U + W)^\perp$.