LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Lineare Algebra und analytische Geometrie 5 — Lösungsvorschlag —

5.1 Wegen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 7 & 9 \end{pmatrix} \overset{\text{II}-2\text{I}}{\underset{\text{III}-5\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 12 & 14 \end{pmatrix} \overset{\text{I}-\text{II}}{\underset{\text{III}-2\text{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $r = \operatorname{Rang}(A) = 2$ und damit

$$\dim \operatorname{Kern}(\varphi) = 4 - r = 2 \qquad \text{sowie} \qquad \dim \operatorname{Bild}(\varphi) = r = 2;$$

genauer gilt:

- $\operatorname{Kern}(\varphi) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \varphi(x) = 0\}$ stimmt mit dem Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ mit den freien Variablen x_3 und x_4 überein; folglich ist

$$u_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  eine Basis von $\operatorname{Kern}(\varphi)$.

- $\operatorname{Bild}(\varphi) = \{\varphi(x) \mid x \in \mathbb{R}^4\}$ stimmt mit dem Spaltenraum der Matrix A überein; da die erste und zweite Spalte einen Pivot beinhaltet, bilden die erste und zweite Spalte von A, also

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix},$$

  eine Basis von $\operatorname{Bild}(\varphi)$.

5.2 Gegeben ist die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4,\ f(x) = A \cdot x, \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ -6 & -6 & -3 & -4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5}.$$

a) Wegen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ -6 & -6 & -3 & -4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \underset{\text{III+I, IV}-2\text{I}}{\overset{\text{II}+3\text{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{II}\leftrightarrow\text{IV}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{II}}{\overset{\text{I}-2\text{II}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}-2\text{III}}{\overset{\text{I}-2\text{III}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $r = \operatorname{Rang}(A) = 3$ und damit $\dim \operatorname{Bild}(f) = r = 3$. Ferner stimmt $\operatorname{Bild}(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^5\}$ mit dem Spaltenraum der Matrix A überein; da die erste, zweite und vierte Spalte einen Pivot beinhaltet, bilden die erste, zweite und vierte Spalte von A, also

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\operatorname{Bild}(f)$.

b) Wegen

$$\dim \operatorname{Bild}(f) \underset{\text{a)}}{=} 3 < 4 = \dim \mathbb{R}^4$$

ist $\operatorname{Bild}(f) \subsetneq \mathbb{R}^4$, und damit ist f nicht surjektiv. Ferner ergibt sich mit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen

$$\dim \operatorname{Kern}(f) = \dim \mathbb{R}^5 - \dim \operatorname{Bild}(f) = 5 - 3 = 2,$$

also $\operatorname{Kern}(f) \neq \{0\}$, so daß f auch nicht injektiv ist.

5.3 a) Wir weisen die Linearität der gegebenen Abbildung

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto v_1 - v_2 + 2\,v_3,$$

anhand der Definition nach: für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

- zum einen $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{aligned} g(x+y) &= (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + 2\,(x_3 + y_3) = \\ &= (x_1 - x_2 + 2\,x_3) + (y_1 - y_2 + 2\,y_3) = g(x) + g(y), \end{aligned}$$

weswegen g zunächst additiv ist, und

- zum anderen $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda\, x_1 \\ \lambda\, x_2 \\ \lambda\, x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit

  $$g(\lambda \cdot x) = \lambda\, x_1 - \lambda\, x_2 + 2\,\lambda\, x_3 = \lambda \cdot (x_1 - x_2 + 2\, x_3) = \lambda \cdot g(x),$$

  weswegen g dann auch homogen ist.

Damit ist $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung; für alle $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$g(v) = v_1 - v_2 + 2\, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = A \cdot v$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3},$$

so daß A die Abbildungsmatrix von g, also die darstellende Matrix von g bezüglich der Standardbasen e_1, e_2, e_3 von $\mathbb{R}^3$ und 1 von $\mathbb{R}$, ist.

b) Die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ besitzt den Rang $r = \operatorname{Rang}(A) = 1$, und damit erhält man

$$\dim \operatorname{Kern}(g) = 3 - r = 2 \qquad \text{sowie} \qquad \dim \operatorname{Bild}(g) = r = 1;$$

genauer gilt:

- $\operatorname{Kern}(g) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x) = 0\}$ stimmt mit dem Lösungsraum der homogenen linearen Gleichung $A \cdot x = 0$ mit den freien Variablen x_2 und x_3 überein; folglich ist

  $$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  eine Basis von $\operatorname{Kern}(g)$.
- $\operatorname{Bild}(g) = \{g(x) \mid x \in \mathbb{R}^3\}$ stimmt mit dem Spaltenraum der Matrix A überein; da die erste Spalte einen Pivot beinhaltet, bildet die erste Spalte von A, also 1, eine Basis von $\operatorname{Bild}(g)$.

c) Die Lösungsmenge L der linearen Gleichung

$$g(v) = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad v_1 - v_2 + 2\, v_3 = 1,$$

setzt sich additiv aus einer partikulären Lösung v_p dieser Gleichung, also etwa $v_p = e_1 \in \mathbb{R}^3$, und dem Lösungsraum der zugehörigen homogenen Gleichung $g(v) = 0$, der mit dem $\operatorname{Kern}(g) = \langle u_1, u_2 \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ übereinstimmt, zusammen; es ist also

$$L = v_p + \operatorname{Kern}(g) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.4 a) Wegen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & -3 & -7 \\ 3 & -6 & 4 & 10 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-3\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+2\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}\cdot\frac{1}{3}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+5\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{I}-3\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $r = \mathrm{Rang}(A) = 2$ und damit

$$\dim U = 4 - r = 2 \qquad \text{sowie} \qquad \dim W = r = 2;$$

genauer gilt:

- $U = \mathrm{Kern}(f)$ stimmt mit dem Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ mit den freien Variablen x_2 und x_4 überein; folglich ist

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  eine Basis von U.

- $W = \mathrm{Bild}(f)$ stimmt mit dem Spaltenraum der Matrix A überein; da die erste und dritte Spalte einen Pivot beinhaltet, bilden die erste und dritte Spalte von A, also

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

  eine Basis von W.

b) Für eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $\mathrm{Kern}(g) = W$ und $\mathrm{Bild}(g) = U$ müßte nach der Dimensionsformel

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Kern}(g) + \dim \mathrm{Bild}(g) = \dim W + \dim U = 2 + 2 = 4$$

gelten; daher kann es keine derartige lineare Abbildung geben.

5.5 a) Wegen

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & s \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-2\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & s-2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-2\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{I}-2\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix}$$

gilt

$$\dim \mathrm{Bild}(f_s) = \mathrm{Rang}(A_s) = \begin{cases} 2, & \text{falls } s = 0, \\ 3, & \text{falls } s \neq 0. \end{cases}$$

Damit ist f_s genau dann surjektiv, wenn $s \neq 0$ gilt, und in diesen Fällen erhalten wir gemäß obiger Rechnung

$$\operatorname{Kern}(f_s) = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \mid A_s \cdot x = 0\right\} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Für $s = 0$ erhalten wir gemäß a)

$$A_0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kern(f_0) stimmt mit dem Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $A_0 \cdot x = 0$ mit den freien Unbestimmten x_3 und x_4 überein; damit bilden

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

eine Basis von Kern(f_0). Ferner stimmt Bild(f_0) mit dem Spaltenraum der Matrix A_0 überein; da x_1 und x_2 die gebundenen Unbestimmten sind, bilden die ersten beiden Spalten

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad s_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

von A_0 eine Basis von Bild(f_0).

5.6 Zu betrachten ist die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $F(x) = B \cdot x$, mit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

a) Der Kern von F ist der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $B \cdot x = 0$; wegen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{2}\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}+\text{II}}{\overset{\text{III}-\text{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist x_3 die einzige freie Variable, und

$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

ist eine Basis von Kern(F).

b) Wegen

$$B - 1 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}-\mathrm{III}}{\overset{\mathrm{IV}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}\leftrightarrow\mathrm{IV}}{\overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$\mathrm{Rang}(B - 1 \cdot E_4) = 3 < 4$$

und damit $\lambda = 1$ ein Eigenwert der Matrix B der geometrischen Vielfachheit $\gamma = 4 - 3 = 1$; dabei ist

$$\mathrm{Eig}(B; \lambda = 1) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Für das charakteristische Polynom χ_B der Matrix B ergibt sich

$$\begin{aligned}
\chi_B(\lambda) &= \det(B - \lambda \cdot E_4) \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{(\lambda-1)\text{ aus III}}{=} (\lambda - 1) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\underset{\text{IV+III}}{=} \quad (\lambda-1)\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{(\lambda-1)\text{ aus IV}}{=} \quad (\lambda-1)^2\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{4. Zeile}}{=} \quad (\lambda-1)^2\cdot(-1)^{4+4}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{Sarrus}}{=} \quad -(\lambda-1)^2\cdot\Big(\big(-(1-\lambda)^2+0+2\big)-\big(0+0+1\big)\Big)$$

$$= \quad (\lambda-1)^2\cdot\big(1-2\lambda+\lambda^2-2+1\big)$$

$$= \quad (\lambda-1)^2\cdot(\lambda-2)\cdot\lambda$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; folglich besitzt der Eigenwert $\lambda = 1$ die algebraische Vielfachheit $\alpha = 2$, so daß die Matrix B wegen $\gamma < \alpha$ nach dem Hauptsatz über diagonalisierbare Matrizen nicht diagonalisierbar ist.

5.7 In Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ sind

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ -2 & -2t & t & 4+t \\ -4t & -4 & 2-2t & 8t \\ 6 & -6 & 3+t & -9+t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \quad \text{und} \quad b(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3-t^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

zu betrachten; dabei gilt

$$(A(t)\mid b(t)) \quad = \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & -2t & t & 4+t & 0 \\ -4t & -4 & 2-2t & 8t & 2 \\ 6 & -6 & 3+t & -9+t & 3-t^2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\text{III}+2t\text{I, IV}-3\text{I}}{\overset{\text{II+I}}{\rightsquigarrow}} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2-2t & 1+t & 1+t & 1 \\ 0 & -4-4t & 2 & 2t & 2t+2 \\ 0 & 0 & t & t & -t^2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\text{III}-2\text{II}}{\rightsquigarrow} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2-2t & 1+t & 1+t & 1 \\ 0 & 0 & -2t & -2 & 2t \\ 0 & 0 & t & t & -t^2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\text{IV}+\frac{1}{2}\text{III}}{\rightsquigarrow} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2-2t & 1+t & 1+t & 1 \\ 0 & 0 & -2t & -2 & 2t \\ 0 & 0 & 0 & t-1 & t-t^2 \end{array}\right).$$

a) Gemäß obiger Rechnung ist

$$A(t) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2(1+t) & 1+t & 1+t \\ 0 & 0 & -2t & -2 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix};$$

für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ ist $-2(1+t) \neq 0$ und $-2t \neq 0$ und $t-1 \neq 0$, so daß sich zunächst in diesen Fällen $\mathrm{Rang}(A(t)) = 4$ ergibt.
Für die verbleibenden drei Parameterwerte erhält man

$$A(-1) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\mathrm{Rang}(A(-1)) = 3$, und

$$A(0) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\mathrm{Rang}(A(0)) = 3$, und

$$A(1) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\mathrm{Rang}(A(1)) = 3$.

b) Der Kern der zu betrachtenden linearen Abbildung

$$\ell_0 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad \ell_0(x) = A(0) \cdot x,$$

ist gemäß

$$\mathrm{Kern}\,(\ell_0) = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \mid \ell_0(x) = 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \mid A(0) \cdot x = 0\right\}$$

der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $A(0) \cdot x = 0$; gemäß a) ist

$$A(0) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{2}\cdot\mathrm{III}}{\overset{\mathrm{I-II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

eine Basis von $\mathrm{Kern}\,(\ell_0)$.

c) Gemäß a) besitzt für $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ die Matrix $A(t)$ den vollen Rang 4, so daß hier das inhomogene lineare Gleichungssystem $A(t) \cdot x = b(t)$ wegen

$$\operatorname{Rang}(A(t) \mid b(t)) = 4 = \operatorname{Rang}(A(t))$$

sogar eindeutig lösbar ist; für die verbleibenden Fälle ergibt sich:

- für $t = -1$ ist

$$(A(-1) \mid b(-1)) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right),$$

  und wegen des Widerspruchs in der zweiten Zeile ist das inhomogene lineare Gleichungssystem $A(-1) \cdot x = b(-1)$ nicht lösbar.

- für $t = 0$ ist

$$(A(0) \mid b(0)) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

  und wegen $\operatorname{Rang}(A(0) \,|\, b(0)) = 3 = \operatorname{Rang}(A(0))$ ist das inhomogene lineare Gleichungssystem $A(0) \cdot x = b(0)$ lösbar.

- für $t = 1$ ist

$$(A(1) \mid b(1)) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

  und wegen $\operatorname{Rang}(A(1) \,|\, b(1)) = 3 = \operatorname{Rang}(A(1))$ ist das inhomogene lineare Gleichungssystem $A(1) \cdot x = b(1)$ lösbar.

5.8 a) Es ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-3\text{I},\ \text{IV}+\text{I}}{\overset{\text{II}-2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 10 & -10 & -10 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{5}\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & -10 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-10\text{II},\ \text{IV}+5\text{II}}{\overset{\text{I}+4\text{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

damit ist $r = \operatorname{Rang}(A) = 2$, so daß sich für den zugehörigen Endomorphismus $\ell_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\ell_A(x) = A \cdot x$, zunächst

$$\dim \operatorname{Kern}(\ell_A) = 4 - r = 2 \qquad \text{und} \qquad \dim \operatorname{Bild}(\ell_A) = r = 2$$

ergibt. Genauer gilt:

- $\mathrm{Kern}(\ell_A) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid A \cdot x = 0\}$ stimmt mit dem Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ überein; über die beiden freien Variablen x_3 und x_4 erhalten wir

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

als Basis von $\mathrm{Kern}(\ell_A)$.
- $\mathrm{Bild}(\ell_A) = \{A \cdot x \mid x \in \mathbb{R}^4\}$ stimmt mit dem Spaltenraum der Abbildungsmatrix A überein; über die beiden Pivots in der ersten und zweiten Spalte erhalten wir

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad s_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

als Basis von $\mathrm{Bild}(\ell_A)$.

Wir betrachten die Matrix $M = (u_1, u_2, s_1, s_2) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und erhalten

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III-I}}{\overset{\mathrm{II-I}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{(-1)\cdot\mathrm{II}}{\leadsto}$$
$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III+2II,\ IV-II}}{\overset{\mathrm{I-2II}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

damit gilt

$$\begin{aligned} s_1 &= 3 \cdot u_1 + (-1) \cdot u_2 \in \langle u_1, u_2 \rangle \\ s_2 &= (-2) \cdot u_1 + (-1) \cdot u_2 \in \langle u_1, u_2 \rangle, \end{aligned}$$

woraus sich zunächst

$$\mathrm{Bild}(\ell_A) = \langle s_1, s_2 \rangle \subseteq \langle u_1, u_2 \rangle = \mathrm{Kern}(\ell_A)$$

und mit $\dim \mathrm{Kern}(\ell_A) = \dim \mathrm{Bild}(\ell_A)$ dann $\mathrm{Kern}(\ell_A) = \mathrm{Bild}(\ell_A)$ ergibt.

b) Für die beiden Endomorphismen

$$\ell_B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ \ell_B(x) = B \cdot x, \quad \text{und} \quad \ell_C : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ \ell_C(x) = C \cdot x,$$

mit den Abbildungsmatrizen

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

gilt zum einen

$$\operatorname{Kern}(\ell_B) = \langle e_1 \rangle \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Bild}(\ell_B) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$$

und zum anderen

$$\operatorname{Kern}(\ell_C) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Bild}(\ell_C) = \langle e_1 \rangle,$$

insgesamt also

$$\operatorname{Kern}(\ell_B) \subsetneq \operatorname{Bild}(\ell_B) \subsetneq \mathbb{R}^4 \quad \text{und} \quad \operatorname{Bild}(\ell_C) \subsetneq \operatorname{Kern}(\ell_C) \subsetneq \mathbb{R}^4.$$

5.9 a) Für alle $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\pi(v) = \pi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x - y - z \\ x - z \\ x - y \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} \pi(\pi(v)) &= \pi \begin{pmatrix} 2\,x - y - z \\ x - z \\ x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,(2\,x - y - z) - (x - z) - (x - y) \\ (2\,x - y - z) - (x - y) \\ (2\,x - y - z) - (x - z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4\,x - 2\,y - 2\,z - x + z - x + y \\ 2\,x - y - z - x + y \\ 2\,x - y - z - x + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x - y - z \\ x - z \\ x - y \end{pmatrix} = \pi(v). \end{aligned}$$

b) Für jedes $w \in \operatorname{Kern}(\pi) \cap \operatorname{Bild}(\pi)$ gilt

- zum einen $w \in \operatorname{Kern}(\pi)$, also $\pi(w) = 0$, und
- zum anderen $w \in \operatorname{Bild}(\pi)$, also $w = \pi(v)$ für ein $v \in \mathbb{R}^3$;

damit ergibt sich zusammen

$$w \underset{w \in \operatorname{Bild}(\pi)}{=} \pi(v) \underset{\text{a)}}{=} \pi(\pi(v)) = \pi(w) \underset{w \in \operatorname{Kern}(\pi)}{=} 0,$$

also $\operatorname{Kern}(\pi) \cap \operatorname{Bild}(\pi) = \{0\}$.

c) Wegen $\operatorname{Kern}(\pi) \subseteq \mathbb{R}^3$ und $\operatorname{Bild}(\pi) \subseteq \mathbb{R}^3$ ist auch $\operatorname{Kern}(\pi) + \operatorname{Bild}(\pi) \subseteq \mathbb{R}^3$; mit der Dimensionsformel für Unterräume ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} &\dim\left(\operatorname{Kern}(\pi) + \operatorname{Bild}(\pi)\right) = \\ &\quad = \dim \operatorname{Kern}(\pi) + \dim \operatorname{Bild}(\pi) - \dim \underbrace{\left(\operatorname{Kern}(\pi) \cap \operatorname{Bild}(\pi)\right)}_{=\{0\} \text{ gemäß b)}} = \\ &\quad = \dim \operatorname{Kern}(\pi) + \dim \operatorname{Bild}(\pi), \end{aligned}$$

woraus mit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen dann

$$\dim\left(\operatorname{Kern}(\pi) + \operatorname{Bild}(\pi)\right) = \dim \operatorname{Kern}(\pi) + \dim \operatorname{Bild}(\pi) = \dim \mathbb{R}^3$$

und damit insgesamt $\operatorname{Kern}(\pi) + \operatorname{Bild}(\pi) = \mathbb{R}^3$ folgt.

5.10 a) Es ist

$$(S|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) = (E_3|S')$$

Damit ist S invertierbar mit $S^{-1} = S' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Da die Matrix $S = (a_1, a_2, a_3)$ gemäß a) invertierbar ist, bilden ihre Spalten a_1, a_2, a_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$; demnach gibt es für jeden $\mathbb{R}$–Vektorraum W und jede Wahl von Vektoren w_1, w_2, $w_3 \in W$ genau eine lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to W \quad \text{mit} \quad f(a_1) = w_1, \quad f(a_2) = w_2 \quad \text{und} \quad f(a_3) = w_3.$$

Insbesondere existiert also genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(a_1) = a_2$, $f(a_2) = a_3$ und $f(a_3) = a_1$; für die gesuchte Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt

$$A\,a_1 = f(a_1) = a_2, \quad A\,a_2 = f(a_2) = a_3 \quad \text{und} \quad A\,a_3 = f(a_3) = a_1,$$

also

$$A \cdot (a_1, a_2, a_3) = (A\,a_1, A\,a_2, A\,a_3) = (a_2, a_3, a_1)\,.$$

Mit $T = (a_2, a_3, a_1) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt also $A \cdot S = T$, und man erhält

$$A = T \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativ läßt sich die Aufgabe auch ohne Verwendung des Prinzips der linearen Fortsetzung wie folgt lösen: Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit $f(a_1) = a_2$, $f(a_2) = a_3$ und $f(a_3) = a_1$; für ihre Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt $A\,a_1 = f(a_1) = a_2$, $A\,a_2 = f(a_2) = a_3$ und $A\,a_3 = f(a_3) = a_1$, also $A \cdot (a_1, a_2, a_3) = (a_2, a_3, a_1)$, und man erhält wie oben

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist schon gezeigt, daß es höchstens eine lineare Abbildung mit den geforderten Eigenschaften gibt, nämlich ℓ_A; die Probe

$$\ell_A(a_1) = A\,a_1 = a_2, \quad \ell_A(a_2) = A\,a_2 = a_3 \quad \text{und} \quad \ell_A(a_3) = A\,a_3 = a_1$$

beweist nun, daß $f = \ell_A$ auch das Gewünschte leistet.

5.11 a) Es ist

$$(M|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = (E_3|M')$$

Damit ist M invertierbar mit $M^{-1} = M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Zu den im $\mathbb{R}^3$ gegebenen Vektoren betrachten wir die beiden Matrizen

$$\begin{aligned} F = (f_1, f_2, f_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{a)}}{=} M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \\ G = (g_1, g_2, g_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \end{aligned}$$

Für eine Matrix $N \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt nun:

$$\begin{aligned} &N \cdot f_1 = g_1,\ N \cdot f_2 = g_2,\ N \cdot f_3 = g_3 \iff \\ &\iff N \cdot (f_1, f_2, f_3) = (N \cdot f_1, N \cdot f_2, N \cdot f_3) = (g_1, g_2, g_3) \iff \\ &\iff N \cdot M = G \iff N = G \cdot M^{-1}, \end{aligned}$$

also

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.12 a) (i) Da e_1, e_2, e_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ sind, gibt es nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung für jeden Vektorraum W und jede Wahl von Vektoren w_1, w_2, $w_3 \in W$ eine (eindeutig bestimmte) lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to W$ mit $f(e_1) = w_1$, $f(e_2) = w_2$ und $f(e_3) = w_3$, insbesondere auch für $W = \mathbb{R}^3$ und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(ii) Die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

sind wegen $v_2 = v_1 + v_3$ linear abhängig; die Annahme, es gibt eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(v_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

führt unter Verwendung der Additivität von f in

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f(v_2) = f(v_1 + v_3) = f(v_1) + f(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu einem Widerspruch. Damit kann es keine lineare Abbildung mit den gewünschten Eigenschaften geben.

b) Für die gegebenen Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \\ -14 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

betrachten wir die Hilfsmatrix $A = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
A \quad = \quad & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 4 \\ -3 & 5 & -6 & -4 \\ -4 & 13 & -14 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{III}+3\text{I},\ \text{IV}+4\text{I}}{\overset{\text{II}-2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -6 & 3 \end{pmatrix} \\
\underset{\text{III}\leftrightarrow\text{IV}}{\overset{\frac{1}{2}\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow}} \quad & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -6 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-5\text{II},\ \text{IV}+\text{II}}{\overset{\text{I}+2\text{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\underset{-\frac{1}{6}\cdot\text{III}}{\rightsquigarrow} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{I}-2\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

damit sind die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 linear abhängig, und es gilt

$$v_4 = \tfrac{7}{3} \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \tfrac{1}{3} \cdot v_3.$$

Für jede lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ müßte damit

$$g(v_4) = g\left(\tfrac{7}{3} \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \tfrac{1}{3} \cdot v_3\right) = \tfrac{7}{3} \cdot g(v_1) + 1 \cdot g(v_2) + \tfrac{1}{3} \cdot g(v_3)$$

gelten, wodurch mit den getroffenen Vorgaben in

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tfrac{7}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ \frac{25}{3} \\ \frac{29}{3} \\ 11 \end{pmatrix}$$

ein Widerspruch entsteht; damit gibt es keine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit den gewünschten Eigenschaften.

5.13 a) Die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sind genau dann linear unabhängig, wenn die Matrix $B = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertierbar ist. Wegen

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & t \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & t & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} \left(0 + 0 + t^2\right) - (0 + 0 + 4) = t^2 - 4$$

ist dies genau für

$$t^2 - 4 \neq 0 \iff t^2 \neq 4 \iff t \neq \pm 2$$

der Fall. Für $t = 2$ ist $v_2 = v_3$ und damit

$$0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + (-1) \cdot v_3 = 0,$$

für $t = -2$ ist $v_2 + v_3 = 2\, v_1$ und damit

$$(-2) \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = 0$$

eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors aus den dann linear abhängigen Vektoren v_1, v_2, v_3.

b) Im Hinblick auf a) treffen wir die folgende Fallunterscheidung:

- Für $t \neq \pm 2$ sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^3$, wegen $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ also eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Damit gibt es nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung genau eine lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f(v_1) = w_1,\ f(v_2) = w_2 \ \text{ und } \ f(v_3) = w_3.$$

- Für $t = 2$ gilt $v_2 = v_3$; wegen $w_2 \neq w_3$ kann es überhaupt keine Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(v_2) = w_2$ und $f(v_3) = w_3$ geben, insbesondere existiert damit auch keine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$ und $f(v_3) = w_3$.
- Für $t = -2$ liegt die nichttriviale Linearkombination

$$-2\, v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

des Nullvektors aus den Vektoren v_1, v_2, v_3 vor; dies entspricht genau

$$-2\, w_1 + w_2 + w_3 = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Die linear unabhängigen Vektoren v_1, v_2 lassen sich nun zu einer Basis v_1, v_2, v_4 von $\mathbb{R}^3$ ergänzen, und für jede Wahl des Vektors $w_4 \in \mathbb{R}^3$ gibt es nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung eine (zu w_4 eindeutig bestimmte) lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f(v_1) = w_1,\ f(v_2) = w_2 \ \text{ und } \ f(v_4) = w_4,$$

welche dann auch

$$f(v_3) = f(2\,v_1 - v_2) = 2\,f(v_1) - f(v_2) = 2\,w_1 - w_2 = w_3$$

erfüllt. Folglich gibt es in diesem Fall insgesamt unendlich viele lineare Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f(v_1) = w_1,\ f(v_2) = w_2 \ \text{ und } \ f(v_3) = w_3.$$

5.14 a) Für die Matrix $B = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2c-1 \\ 0 & 2 & 1-c \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2(c-1) \\ 0 & 2 & 1-c \end{pmatrix} \underset{\text{III}+2\text{II}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2(c-1) \\ 0 & 0 & 3(c-1) \end{pmatrix};$$

damit ist

$$\dim\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \operatorname{Rang}(B) = \begin{cases} 3, & \text{falls } c \neq 1, \\ 2, & \text{falls } c = 1. \end{cases}$$

b) Im Hinblick auf a) treffen wir die folgende Fallunterscheidung:

- Für den Fall $c \neq 1$ bilden die drei Vektoren v_1, v_2, v_3 gemäß a) ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ und damit schon eine Basis von $\mathbb{R}^3$; folglich gibt es dann nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$ und $f(v_3) = w_3$.
- Für den Fall $c = 1$ sind die drei Vektoren v_1, v_2, v_3 von $\mathbb{R}^3$ linear abhängig, es gilt hier sogar $v_1 = v_3$; wegen $w_1 \neq w_3$ kann es überhaupt keine Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $f(v_1) = w_1$ und $f(v_3) = w_3$ geben, insbesondere existiert damit auch keine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$ und $f(v_3) = w_3$.

c) Für $c = 0$ gibt es gemäß b) genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$ und $f(v_3) = w_3$; da nun v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist, gilt

$$\mathbb{R}^3 = \langle v_1, v_2, v_3\rangle = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\},$$

und wegen der Linearität von f ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \operatorname{Bild}(f) &= \{\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \lambda_3 f(v_3) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle f(v_1), f(v_2), f(v_3)\rangle = \langle w_1, w_2, w_3\rangle. \end{aligned}$$

Für die Hilfsmatrix $C = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ gilt

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{III}-2\text{I}}{\underset{\text{IV}-\text{I}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{III}+2\text{II}}{\underset{\text{IV}-2\text{II}}{\leadsto}}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}+\frac{3}{5}\cdot\text{III}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\dim \operatorname{Bild}(f) = \operatorname{Rang}(C) = 3;$$

insbesondere sind die Vektoren w_1, w_2, w_3 linear unabhängig, aber kein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$, weswegen die lineare Abbildung f zwar injektiv, aber nicht surjektiv ist.

5.15 Die Matrix $B = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist wegen

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (0+9+4) - (0+3+8) = 2 \neq 0$$

invertierbar, weswegen a_1, a_2, a_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden. Folglich gibt es nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$ und $f(a_3) = b_3$. Aus

$$a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_3 - a_1 - a_2$$

folgt aufgrund der Linearität von f dann

$$\begin{aligned} f(a_4) = f(a_3 - a_1 - a_2) = f(a_3) - f(a_1) - f(a_2) = \\ = b_3 - b_1 - b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und es ergibt sich

$$f(a_4) = b_4 \iff \alpha = -3.$$

5.16 a) Die Matrix $B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist wegen

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{Dreiecks-}}{\underset{\text{matrix}}{=}} 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

invertierbar, weswegen b_1, b_2, b_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden. Ferner ist die Matrix $C = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ wegen

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

invertierbar, weswegen c_1, c_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden.

b) Die lineare Abbildung $f_P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ besitzt bezüglich der kanonischen Basen des $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ die darstellende Matrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3},$$

es ist also $f_P(x) = P \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Für die darstellende Matrix $P' \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ von f_P bezüglich der Basen b_1, b_2, b_3 von $\mathbb{R}^3$ und c_1, c_2 von $\mathbb{R}^2$ ergibt sich gemäß dem Basiswechsel

$$\begin{aligned} P' = C^{-1} \cdot P \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -15 \\ -1 & 4 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}. \end{aligned}$$

5.17 a) Bezüglich der gegebenen Basis

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

des Vektorraums $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ergibt sich für

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

die Darstellung

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} a-d & b-d \\ c-d & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & d \\ d & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a-c & b-c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c-d & c-d \\ c-d & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & d \\ d & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b-c & b-c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c-d & c-d \\ c-d & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & d \\ d & d \end{pmatrix} \\ &= (a-b) \cdot M_1 + (b-c) \cdot M_2 + (c-d) \cdot M_3 + d \cdot M_4 \end{aligned}$$

als Linearkombination von M_1, M_2, M_3, M_4.

b) Des weiteren ist die Basis

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ gegeben, und die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ besitzt bezüglich den Basen M_1, M_2, M_3, M_4 von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ und b_1, b_2, b_3 von $\mathbb{R}^3$ die darstellende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}.$$

Folglich gilt gemäß der Definition der darstellenden Matrix

$$f(M_1) = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 3 \cdot b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$f(M_2) = 0 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 + 2 \cdot b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$f(M_3) = (-1) \cdot b_1 + 3 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$f(M_4) = 0 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 + 2 \cdot b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und wegen der Linearität von f somit

$$\begin{aligned}
f(M) &= f((a-b) \cdot M_1 + (b-c) \cdot M_2 + (c-d) \cdot M_3 + d \cdot M_4) \\
&= (a-b) \cdot f(M_1) + (b-c) \cdot f(M_2) + (c-d) \cdot f(M_3) + d \cdot f(M_4) \\
&= (a-b) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + (b-c) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + (c-d) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a-b) \cdot 3 + (b-c) \cdot 0 + (c-d) \cdot (-3) + d \cdot 1 \\ (a-b) \cdot 7 + (b-c) \cdot 4 + (c-d) \cdot (-1) + d \cdot 4 \\ (a-b) \cdot (-2) + (b-c) \cdot 4 + (c-d) \cdot 8 + d \cdot 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3\,a - 3\,b - 3\,c + 4\,d \\ 7\,a - 3\,b - 5\,c + 5\,d \\ -2\,a + 6\,b + 4\,c - 6\,d \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

c) Für die darstellende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ von $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basen M_1, M_2, M_3, M_4 von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ und b_1, b_2, b_3 von $\mathbb{R}^3$ gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-3\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

damit gilt

$$\dim(\text{Bild}(f)) = \text{Rang}(A) = 3, \qquad \text{also} \qquad \text{Bild}(f) = \mathbb{R}^3,$$

so daß f surjektiv ist.

5.18 a) Für die gegebene Abbildungsmatrix gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-3\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \end{pmatrix} \underset{\text{III}+4\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit $r = \text{Rang}(A) = 2$; folglich erhält man

$$\dim \text{Kern}(f) = 4 - r = 2 \qquad \text{und} \qquad \dim \text{Bild}(f) = r = 2.$$

Genauer gilt:

- $U = \operatorname{Kern}(f)$ stimmt mit dem Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ mit den beiden freien Variablen x_3 und x_4 überein; folglich ist

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  eine Basis von U.
- $W = \operatorname{Bild}(f)$ stimmt mit dem Spaltenraum der Matrix A überein; da x_1 und x_2 die beiden gebundenen Variablen sind, ist

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  eine Basis von W.

b) Mit $b_1 = e_1$ und $b_2 = e_2$ sowie $b_3 = u_1$ und $b_4 = u_2$ ist b_1, b_2, b_3, b_4 wegen

$$\det(b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{Dreiecks–}}{\underset{\text{matrix}}{=}} 1 \neq 0$$

eine Basis von $\mathbb{R}^4$, und mit $c_1 = w_1$, $c_2 = w_2$ und $w_3 = e_3$ ist c_1, c_2, c_3 wegen

$$\det(c_1, c_2, c_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{Laplace}}{\underset{\text{3. Spalte}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Wegen

$$\begin{array}{rcccccccccc} f(b_1) & = & A \cdot e_1 & = & w_1 & = & 1 \cdot c_1 & + & 0 \cdot c_2 & + & 0 \cdot c_3 \\ f(b_2) & = & A \cdot e_2 & = & w_2 & = & 0 \cdot c_1 & + & 1 \cdot c_2 & + & 0 \cdot c_3 \\ f(b_3) & = & A \cdot u_1 & = & 0 & = & 0 \cdot c_1 & + & 0 \cdot c_2 & + & 0 \cdot c_3 \\ f(b_4) & = & A \cdot u_2 & = & 0 & = & 0 \cdot c_1 & + & 0 \cdot c_2 & + & 0 \cdot c_3 \end{array}$$

besitzt die darstellende Matrix von f bezüglich dieser beiden Basen die Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}.$$

5.19 a) Für die Matrix $A = (v_1, v_2, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\text{III+I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \overset{\text{I−II}}{\underset{\text{III−2·II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

damit sind v_1, v_2 linear unabhängig mit

$$w_1 = 2 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2 \qquad \text{und} \qquad w_2 = 1 \cdot v_1 + 4 \cdot v_2,$$

insbesondere also eine Basis von $V = \langle v_1, v_2, w_1, w_2 \rangle$.

b) Da v_1, v_2 eine Basis von V sind, gibt es nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung für jeden Vektorraum V' und jede Wahl von v_1', $v_2' \in V'$ genau eine lineare Abbildung $f : V \to V'$ mit $f(v_1) = v_1'$ und $f(v_2) = v_2'$; insbesondere existiert genau ein Endomorphismus $f : V \to V$ von V mit $f(v_1) = w_1$ und $f(v_2) = w_2$. Wegen

$$\begin{array}{rcccccc} f(v_1) & = & w_1 & = & 2 \cdot v_1 & + & 3 \cdot v_2 \\ f(v_2) & = & w_2 & = & 1 \cdot v_1 & + & 4 \cdot v_2 \end{array} \qquad \text{ist} \qquad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis v_1, v_2 von V.

c) Wegen

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\,(4-\lambda) - 3 =$$
$$= \lambda^2 - 6\,\lambda + 5 = (\lambda - 1)\,(\lambda - 5)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt M die beiden einfachen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 5$ und ist damit als 2×2–Matrix insbesondere diagonalisierbar; wegen

$$M - \lambda_1\,E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-3\cdot\text{I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, und wegen

$$M - \lambda_2\,E_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{II}+\text{I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda_2 = 5$. Folglich ist auch der Endomorphismus f von V diagonalisierbar, und

$$b_1 = (-1) \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b_2 = 1 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist eine Basis von V aus Eigenvektoren von f.

5.20 a) Die beiden gegebenen Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

sind keine skalaren Vielfachen voneinander und folglich linear unabhängig; für das orthogonale Komplement $U^\perp$ von $U = \langle v_1, v_2 \rangle$ gilt demnach

$$\dim(U^\perp) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(U) = 3 - 2 = 1,$$

so daß etwa das Vektorprodukt

$$\widetilde{u} = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

eine Basis von $U^\perp$ ist.

b) Die Hilfsmatrix $B = (v_1, v_2, e_1) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist wegen

$$(B \mid E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{II}-2\text{I}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{\frac{1}{2}\cdot\text{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{\text{II}+\text{III}}{\overset{\text{I}-\text{III}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) = (E_3 \mid B')$$

invertierbar mit

$$B^{-1} = B' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Folglich ist v_1, v_2, e_1 eine Basis von $\mathbb{R}^3$, und nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung gibt es genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(v_1) = 0 \quad \text{und} \quad f(v_2) = 0 \quad \text{sowie} \quad f(e_1) = 2\,\widetilde{u}.$$

Damit gilt zum einen

$$U = \langle v_1, v_2 \rangle \subseteq \mathrm{Kern}(f) \subsetneq \mathbb{R}^3,$$

wegen

$$2 = \dim(U) \leq \dim(\mathrm{Kern}(f)) < \dim(\mathbb{R}^3) = 3,$$

also

$$\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 2 = \dim(U) \qquad \text{schon} \qquad \mathrm{Kern}(f) = U,$$

und zum anderen

$$U^\perp = \langle \widetilde{u} \rangle \subseteq \mathrm{Bild}(f),$$

wegen

$$1 = \dim(U^\perp) \leq \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Kern}(f)) = 1,$$

also

$$\dim(\mathrm{Bild}(f)) = 1 = \dim(U^\perp) \qquad \text{schon} \qquad \mathrm{Bild}(f) = U^\perp,$$

mit

$$e_1 \circ f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 4.$$

Für die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ von f gilt damit

$$A \cdot v_1 = f(v_1) = 0, \qquad A \cdot v_2 = f(v_2) = 0, \qquad A \cdot e_1 = f(e_1) = 2\,\widetilde{u},$$

so daß sich mit der Matrix $C = (0, 0, 2\,\widetilde{u}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ dann

$$A \cdot B = A \cdot (v_1, v_2, e_1) = (A \cdot v_1,\ A \cdot v_2,\ A \cdot e_1) = (0, 0, 2\,\widetilde{u}) = C$$

und damit

$$A = C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

ergibt.

c) Die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ von f ist wegen $A^\top = A$ symmetrisch und damit orthogonal diagonalisierbar; die Eigenräume von A bzw. von f sind also orthogonal zueinander. Wegen

$$\text{Kern}(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0 \cdot x\} = \text{Eig}(f, 0)$$

mit $\dim(\text{Kern}(f)) = 2$ ist $\lambda_1 = 0$ ein doppelter Eigenwert von f mit dem Eigenraum $\text{Eig}(f, 0) = U$. Damit ist $U^\perp$ mit $\dim(U^\perp) = 1$ ebenfalls ein Eigenraum von f, und wegen

$$f(\widetilde{u}) = A \cdot \widetilde{u} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -9 \\ 18 \end{pmatrix} = 9 \cdot \widetilde{u}$$

ist $U^\perp = \text{Eig}(f, 9)$ der Eigenraum zum einfachen Eigenwert $\lambda_2 = 9$. Weitere Eigenräume und damit Eigenwerte kann es wegen $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ nicht geben.

d) Für den Vektor

$$v_2' = v_1 \times \widetilde{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

gilt zum einen wegen $v_2' \perp \widetilde{u}$ schon $v_2' \in U$ und zum anderen $v_2' \perp v_1$; damit sind v_1, v_2', $\widetilde{u}$ drei paarweise orthogonale Eigenvektoren von f und folglich

$$\frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \frac{\widetilde{u}}{\|\widetilde{u}\|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ aus Eigenvektoren von f.

5.21 Für eine fest gewählte invertierbare Matrix $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad f(X) = AXA^{-1},$$

zu betrachten.

a) Wir weisen die Linearität von f anhand der Definition nach:

- Für alle X, $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$f(X + Y) = A(X + Y)A^{-1} = AXA^{-1} + AYA^{-1} = f(X) + f(Y);$$

damit ist f additiv.

- Für alle $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(\lambda \cdot X) = A(\lambda \cdot X)A^{-1} = \lambda \cdot AXA^{-1} = \lambda \cdot f(X);$$

  damit ist f homogen.

b) Wir zeigen, daß die

$$U_A = \left\{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid f(X^\top) = f(X)^\top\right\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist, mit Hilfe des Unterraumkriteriums:

- Für die Nullmatrix $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$f(O^\top) = f(O) = O = O^\top = f(O)^\top,$$

  also $O \in U_A$.
- Für alle $X,\ Y \in U_A$ gilt $X,\ Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $f(X^\top) = f(X)^\top$ und $f(Y^\top) = f(Y)^\top$; damit ist $X + Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$\begin{aligned} f((X+Y)^\top) = f(X^\top + Y^\top) = f(X^\top) + f(Y^\top) = \\ = f(X)^\top + f(Y)^\top = (f(X) + f(Y))^\top = f(X+Y)^\top, \end{aligned}$$

  also $X + Y \in U_A$.
- Für alle $X \in U_A$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $f(X^\top) = f(X)^\top$; damit ist $\lambda \cdot X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$\begin{aligned} f((\lambda \cdot X)^\top) = f(\lambda \cdot X^\top) = \lambda \cdot f(X^\top) = \\ = \lambda \cdot f(X)^\top = (\lambda \cdot f(X))^\top = f(\lambda \cdot X)^\top, \end{aligned}$$

  also $\lambda \cdot X \in U_A$.

c) Ist $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix, so gilt $A^{-1} = A^\top$, und für alle $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ergibt sich

$$f(X) = AXA^{-1} = AXA^\top \qquad \text{bzw.} \qquad f(X^\top) = AX^\top A^\top$$

und damit

$$f(X)^\top = (AXA^\top)^\top = (A^\top)^\top X^\top A^\top = AX^\top A^\top = f(X^\top),$$

also $X \in U_A$; folglich ist $U_A = \mathbb{R}^{n\times n}$.

d) Für die Einheitsmatrix $E_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $E_n \neq O$ und

$$f(E_n) = AE_nA^{-1} = AA^{-1} = E_n = 1 \cdot E_n;$$

damit ist E_n ein Eigenvektor von f zum Eigenwert 1.

e) Für alle $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$f(X) = 0 \cdot X \Longrightarrow AXA^{-1} = O \Longrightarrow X = A^{-1}OA = O;$$

es gibt also kein $X \neq O$ mit $f(X) = 0 \cdot X$, d.h. 0 ist kein Eigenwert von f.

5.22 Für die (Elementar– bzw. Spiegelungs–)Matrix $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$F^2 = F \cdot F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

ist die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \Phi(A) = F \cdot A \cdot F,$$

zu betrachten.

a) Für alle A_1, $A_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

$$\begin{aligned} \Phi(A_1 + A_2) = F \cdot (A_1 + A_2) \cdot F = (F \cdot A_1 + F \cdot A_2) \cdot F = \\ = F \cdot A_1 \cdot F + F \cdot A_2 \cdot F = \Phi(A_1) + \Phi(A_2); \end{aligned}$$

damit ist Φ additiv. Für alle $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt ferner

$$\Phi(\lambda \cdot A) = F \cdot (\lambda \cdot A) \cdot F = \lambda \cdot (F \cdot A \cdot F) = \lambda \cdot \Phi(A);$$

damit ist Φ auch homogen, zusammen also eine lineare Abbildung.

b) Für alle $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

$$\begin{aligned} (\Phi \circ \Phi)(A) = \Phi(\Phi(A)) = \Phi\,(F \cdot A \cdot F) = F \cdot (F \cdot A \cdot F) \cdot F = \\ = (F \cdot F) \cdot A \cdot (F \cdot F) = E_2 \cdot A \cdot E_2 = A = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{2\times 2}}(A), \end{aligned}$$

also $\Phi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{2\times 2}}$; damit ist die lineare Abbildung Φ bijektiv mit $\Phi^{-1} = \Phi$. Folglich ist Φ sowohl injektiv, es ist also $\mathrm{Kern}(\Phi) = \{0\}$, als auch surjektiv, es ist also $\mathrm{Bild}(\Phi) = \mathbb{R}^{2\times 2}$.

c) Wir betrachten für den Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ die kanonische Basis

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in U$$

mit Koeffizienten a, b, $c \in \mathbb{R}$ gilt zum einen

$$A = a \cdot E_{11} + b \cdot E_{12} + c \cdot E_{22}$$

und zum anderen

$$\begin{aligned} \Phi(A) = F \cdot A \cdot F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 & c \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ b & a \end{pmatrix} = c \cdot E_{11} + b \cdot E_{21} + a \cdot E_{22}; \end{aligned}$$

damit ist zum einen

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \right\} = \langle E_{11}, E_{12}, E_{22} \rangle$$

der von den linear unabhängigen Matrizen E_{11}, E_{12}, E_{22} erzeugte Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\dim(U) = 3$ und zum anderen

$$\Phi(U) = \{\Phi(A) \mid A \in U\} = \langle E_{11}, E_{21}, E_{22} \rangle$$

der von den linear unabhängigen Matrizen E_{11}, E_{21}, E_{22} erzeugte Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\dim(\Phi(U)) = 3$. Damit erhält man ferner

$$\begin{aligned} U + \Phi(U) &= \langle E_{11}, E_{12}, E_{22} \rangle + \langle E_{11}, E_{21}, E_{22} \rangle \\ &= \langle E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} \rangle = \mathbb{R}^{2\times 2} \end{aligned}$$

mit $\dim\left(U + \Phi(U)\right) = \dim\left(\mathbb{R}^{2\times 2}\right) = 4$, und über die Dimensionsformel für Unterräume ergibt sich schließlich

$$\dim\left(U \cap \Phi(U)\right) = \underbrace{\dim(U)}_{=3} + \underbrace{\dim(\Phi(U))}_{=3} - \underbrace{\dim\left(U + \Phi(U)\right)}_{=4} = 2.$$

5.23 Für fest gewählte Matrizen A, $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ betrachten wir die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad X \mapsto A \cdot X - X \cdot B;$$

diese ist gemäß den Rechenregeln für das Matrixprodukt linear.

a) Sei $x \in \mathbb{R}^2$ ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^2$ ein Eigenvektor der zu B transponierten Matrix $B^\top$ zum Eigenwert $\mu \in \mathbb{R}$, es ist also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \text{mit} \qquad A \cdot x = \lambda \cdot x$$

und

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \text{mit} \qquad B^\top \cdot y = \mu \cdot y.$$

Wegen $x_i \neq 0$ für ein $i \in \{1, 2\}$ und $y_j \neq 0$ für ein $j \in \{1, 2\}$ ist

$$X = x \cdot y^\top = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} f(X) &= A \cdot X - X \cdot B = A \cdot \left(x \cdot y^\top\right) - \left(x \cdot y^\top\right) \cdot B \\ &= (A \cdot x) \cdot y^\top - x \cdot \left(y^\top \cdot B\right) = (A \cdot x) \cdot y^\top - x \cdot \left(B^\top \cdot y\right)^\top \\ &= (\lambda \cdot x) \cdot y^\top - x \cdot (\mu \cdot y)^\top = \lambda \cdot \left(x \cdot y^\top\right) - \mu \cdot \left(x \cdot y^\top\right) \\ &= \lambda \cdot X - \mu \cdot X = (\lambda - \mu) \cdot X; \end{aligned}$$

damit ist $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda - \mu$.

b) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein gemeinsamer Eigenwert der Matrizen A und B, so ist wegen

$$\begin{aligned}\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda E_2) = \det\left((B - \lambda E_2)^\top\right) = \\ = \det(B^\top - \lambda E_2^\top) = \det(B^\top - \lambda E_2) = \chi_{B^\top}(\lambda)\end{aligned}$$

der Eigenwert λ auch ein Eigenwert von $B^\top$. Nach a) ist $\lambda - \lambda = 0$ ein Eigenwert von f, und damit gibt es eine Matrix $O \neq C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$f(C) = 0 \cdot C = O,$$

also

$$A \cdot C - C \cdot B = O \qquad \text{bzw.} \qquad A \cdot C = C \cdot B.$$

5.24 Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

ist die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^{3\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \Phi(X) = A \cdot X,$$

zu betrachten.

a) Wir weisen die Linearität von Φ anhand der Definition nach:
   - Für alle X, $Y \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ gilt

   $$\Phi(X + Y) = A \cdot (X + Y) = A \cdot X + A \cdot Y = \Phi(X) + \Phi(Y);$$

   damit ist Φ additiv.
   - Für alle $X \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

   $$\Phi(\lambda \cdot X) = A \cdot (\lambda \cdot X) = \lambda \cdot (A \cdot X) = \lambda \cdot \Phi(X);$$

   damit ist Φ homogen.

b) Zum Nachweis der Surjektivität von Φ sei $B = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$; dabei bezeichnen b_1, $b_2 \in \mathbb{R}^2$ die beiden Spalten der Matrix B. Wegen $\text{Rang}(A) = 2$ ist die lineare Abbildung

$$\ell_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \ell_A(x) = A \cdot x,$$

surjektiv; damit gibt es aber s_1, $s_2 \in \mathbb{R}^3$ mit $\ell_A(s_1) = b_1$ und $\ell_A(s_2) = b_2$. Für die Matrix $X = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ gilt damit

$$\Phi(X) = A \cdot (s_1, s_2) = (A \cdot s_1, A \cdot s_2) = (\ell_A(s_1), \ell_A(s_2)) = (b_1, b_2) = B;$$

folglich ist Φ surjektiv.

c) Für alle Matrizen $X = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ mit den Spalten b_1, $b_2 \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\begin{aligned} A \cdot X = E_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad A \cdot (b_1, b_2) = (e_1, e_2) \\ &\Longleftrightarrow \quad (A \cdot b_1, A \cdot b_2) = (e_1, e_2) \\ &\Longleftrightarrow \quad A \cdot b_1 = e_1 \ \text{ und } \ A \cdot b_2 = e_2. \end{aligned}$$

Wegen

$$(A \mid e_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{4}\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}-2\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 \end{array}\right)$$

ist

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\,\lambda \\ -\frac{5}{4}\,\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

und wegen

$$(A \mid e_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{4}\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}-2\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

ist

$$b_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mu \\ \frac{1}{4} - \frac{5}{4}\,\mu \\ \mu \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \mu \in \mathbb{R},$$

insgesamt also

$$B = (b_1, b_2) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\,\lambda & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mu \\ -\frac{5}{4}\,\lambda & \frac{1}{4} - \frac{5}{4}\,\mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

5.25 a) Der gegebene Endomorphismus

$$\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \varphi(A) = A + A^\top,$$

des Vektorraums $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aller 2×2–Matrizen besitzt bezüglich der Basis

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ wegen

$$\varphi(B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot B_1 + 0 \cdot B_2 + 0 \cdot B_3 + 0 \cdot B_4$$

$$\varphi(B_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot B_1 + 1 \cdot B_2 + 1 \cdot B_3 + 0 \cdot B_4$$

$$\varphi(B_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot B_1 + 1 \cdot B_2 + 1 \cdot B_3 + 0 \cdot B_4$$

$$\varphi(B_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot B_1 + 0 \cdot B_2 + 0 \cdot B_3 + 2 \cdot B_4$$

die darstellende Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

b) Die darstellende Matrix $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ von φ ist gemäß $M^\top = M$ symmetrisch und damit insbesondere diagonalisierbar; folglich ist auch der Endomorphismus φ diagonalisierbar. Genauer gilt: wegen

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda \cdot E_4) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{1. Zeile}}{=}$$

$$= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{3. Zeile}}{=} (2-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)^2 \cdot \left[(1-\lambda)^2 - 1^2\right] = (2-\lambda)^2 \cdot \left[(2-\lambda) \cdot (-\lambda)\right] = -\lambda \cdot (2-\lambda)^3$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt M den dreifachen Eigenwert $\lambda_1 = 3$ und den einfachen Eigenwert $\lambda_2 = 0$; wegen

$$M - \lambda_1 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Eigenraums $\operatorname{Eig}(M, \lambda_1)$, und wegen

$$M - \lambda_2 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Eigenraums $\operatorname{Eig}(M, \lambda_2)$. Folglich sind u_1, u_2, u_3, u_4 eine Basis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von M, so daß

$$\begin{aligned} 1 \cdot B_1 + 0 \cdot B_2 + 0 \cdot B_3 + 0 \cdot B_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot B_1 + 1 \cdot B_2 + 1 \cdot B_3 + 0 \cdot B_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot B_1 + 0 \cdot B_2 + 0 \cdot B_3 + 1 \cdot B_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot B_1 + (-1) \cdot B_2 + 1 \cdot B_3 + 0 \cdot B_4 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aus Eigenvektoren von φ ist.

5.26 a) Der gegebene Endomorphismus $F : V \to V$ des Vektorraums $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ besitzt wegen

$$F(A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 + 0 \cdot A_4$$

$$F(A_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 + 0 \cdot A_4$$

$$F(A_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 1 \cdot A_3 + 1 \cdot A_4$$

$$F(A_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 + 1 \cdot A_4$$

bezüglich der Basis A_1, A_2, A_3, A_4 von $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ die darstellende Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

b) Wegen

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda\, E_4) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks–}}{=}} (1-\lambda)^4$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt genau einen Eigenwert, nämlich $\lambda_1 = 1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 4$, und wegen

$$M - \lambda_1\, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich für die geometrische Vielfachheit

$$\gamma_1 = 4 - \mathrm{Rang}(M - \lambda_1\, E_4) = 4 - 2 = 2.$$

Wegen $\gamma_1 < \alpha_1$ ist die darstellende Matrix M und folglich auch der Endomorphismus F nicht diagonalisierbar.

5.27 Gegeben ist die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \Phi(A) = B \cdot A, \qquad \text{mit} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

a) Wir weisen die Linearität von Φ anhand der Definition nach:

- Für alle A_1, $A_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

$$\Phi(A_1 + A_2) = B \cdot (A_1 + A_2) = B \cdot A_1 + B \cdot A_2 = \Phi(A_1) + \Phi(A_2);$$

  damit ist Φ additiv.

- Für alle $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\Phi(\lambda \cdot A) = B \cdot (\lambda \cdot A) = \lambda \cdot (B \cdot A) = \lambda \cdot \Phi(A);$$

  damit ist Φ homogen.

b) Der Endomorphismus Φ von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ besitzt bezüglich der Standardbasis

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ wegen

$$\Phi(A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 + 0 \cdot A_4$$

$$\Phi(A_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 + 0 \cdot A_4$$

$$\Phi(A_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 3 \cdot A_3 + 0 \cdot A_4$$

$$\Phi(A_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot A_1 + 2 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 + 3 \cdot A_4$$

die darstellende Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Damit gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ zum einen

$$\begin{aligned} \chi_M(\lambda) &= \det(M - \lambda \cdot E_4) = \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{Dreiecks-}}{\underset{\text{matrix}}{=}} (1-\lambda)^2(3-\lambda)^2 \end{aligned}$$

und zum anderen

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda \cdot E_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{Dreiecks-}}{\underset{\text{matrix}}{=}} (1-\lambda)(3-\lambda),$$

insgesamt also

$$\chi_\Phi(\lambda) = \chi_M(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)^2 = ((1-\lambda)(3-\lambda))^2 = (\chi_B(\lambda))^2.$$

c) Die darstellende Matrix $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ von Φ besitzt gemäß b) die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$; wegen

$$M - \lambda_1 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(M, \lambda_1)$, und wegen

$$M - \lambda_2 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(M, \lambda_2)$. Folglich sind u_1, u_2, u_3, u_4 eine Basis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von M, so daß

$$\begin{aligned} 1 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 + 0 \cdot A_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 + 0 \cdot A_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 1 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 1 \cdot A_3 + 0 \cdot A_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 + 1 \cdot A_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aus Eigenvektoren von Φ ist; insbesondere ist damit der Endomorphismus Φ diagonalisierbar.

5.28 a) Für alle X, $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$\begin{aligned} f(X+Y) &= a\,(X+Y) + b\,(X+Y)^\top \\ &= a\,(X+Y) + b\,(X^\top + Y^\top) \\ &= (a\,X + a\,Y) + (b\,X^\top + b\,Y^\top) \\ &= (a\,X + b\,X^\top) + (a\,Y + b\,Y^\top) \\ &= f(X) + f(Y); \end{aligned}$$

damit ist f additiv. Für alle $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(\lambda\,X) &= a\,(\lambda\,X) + b\,(\lambda\,X)^\top \\ &= a\,(\lambda\,X) + b\,(\lambda\,X^\top) \\ &= \lambda\,(a\,X) + \lambda\,(b\,X^\top) \\ &= \lambda\,(a\,X + b\,X^\top) \\ &= \lambda\,f(X); \end{aligned}$$

damit ist f homogen. Insgesamt ist also f eine lineare Abbildung.

b) Für alle $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$f(X) = (a+b)\,X \iff a\,X + b\,X^\top = a\,X + b\,X \iff$$
$$\iff b\,X^\top = b\,X \iff b\,(X^\top - X) = 0;$$

speziell für $X = E_n$ gilt $X \neq 0$ mit $X^\top = X$, also $X^\top - X = 0$ und damit $f(X) = (a+b)\,X$, so daß X ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $a+b$ ist. Für alle $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$f(Y) = (a-b)\,Y \iff a\,Y + b\,Y^\top = a\,Y - b\,Y \iff$$
$$\iff b\,Y^\top = -b\,Y \iff b\,(Y^\top + Y) = 0;$$

speziell für $Y = (y_{ij})_{ij}$ mit

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{für } i = 1 \text{ und } j = 2, \\ -1, & \text{für } i = 2 \text{ und } j = 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

gilt $Y \neq 0$ mit $Y^\top = -Y$, also $Y^\top + Y = 0$ und damit $f(Y) = (a-b)\,Y$, so daß Y ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $a-b$ ist.

c) Wir zeigen die Äquivalenz

$$f \text{ ist bijektiv} \iff a^2 \neq b^2$$

durch den Nachweis von zwei Implikationen:

- Für „$\Longrightarrow$“ sei f bijektiv; damit ist f insbesondere injektiv, und 0 ist kein Eigenwert von f. Gemäß b) folgt $a+b \neq 0$ und $a-b \neq 0$, also

  $$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b) \neq 0,$$

  und damit $a^2 \neq b^2$.
- Für „$\Longleftarrow$“ sei $a^2 \neq b^2$; sei $X \in \operatorname{Kern}(f)$. Damit gilt

  $$f(X) = a\,X + b\cdot X^\top = 0, \quad \text{also} \quad a\,X = -b\,X^\top,$$

  woraus sich

  $$a\,X^\top = (a\,X)^\top = (-b\,X^\top)^\top = -b\,(X^\top)^\top = -b\,X$$

  und somit

  $$(a^2-b^2)\,X = a^2\,X - b^2\,X = a\,(a\,X) + b\,(-b\,X) =$$
  $$= a\,(-b\,X^\top) + b\,(a\,X^\top) = -a\,b\,X^\top + a\,b\,X^\top = 0$$

  ergibt; wegen $a^2 \neq b^2$ ist $a^2 - b^2 \neq 0$, und es folgt $X = 0$. Damit ist $\operatorname{Kern}(f) = \{0\}$, also f injektiv, so daß f als Endomorphismus von $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\dim \mathbb{R}^{n\times n} < \infty$ schon bijektiv ist.

5.29 Für den reellen Vektorraum

$$V = \left\{a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \mid a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$$

aller reellen Polynomen $p \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{Grad}(p) \leq 3$ betrachten wir bei einem fest vorgegebenem $c \in \mathbb{R}$ die Abbildung

$$\varphi_c : V \to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(p) = p(c);$$

für ein Polynom

$$p = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in V$$

ist also

$$\varphi_c(p) = a_3c^3 + a_2c^2 + a_1c + a_0 \in \mathbb{R}.$$

a) Für alle p, $q \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$p = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \quad \text{und} \quad q = b_3X^3 + b_2X^2 + b_1X + b_0$$

gilt zum einen

$$p + q = (a_3 + b_3)\,X^3 + (a_2 + b_2)\,X^2 + (a_1 + b_1)\,X + (a_0 + b_0)$$

und damit

$$\begin{aligned}\varphi_c(p+q) &= (a_3 + b_3)\,c^3 + (a_2 + b_2)\,c^2 + (a_1 + b_1)\,c + (a_0 + b_0)\\ &= \left(a_3c^3 + a_2c^2 + a_1c + a_0\right) + \left(b_3c^3 + b_2c^2 + b_1c + b_0\right)\\ &= \varphi_c(p) + \varphi_c(q),\end{aligned}$$

also ist φ_c additiv, sowie zum anderen

$$\lambda \cdot p = (\lambda \cdot a_3)\,X^3 + (\lambda \cdot a_2)\,X^2 + (\lambda \cdot a_1)\,X + (\lambda \cdot a_0)$$

und damit

$$\begin{aligned}\varphi_c(\lambda \cdot p) &= (\lambda \cdot a_3)\,c^3 + (\lambda \cdot a_2)\,c^2 + (\lambda \cdot a_1)\,c + (\lambda \cdot a_0)\\ &= \lambda \cdot \left(a_3c^3 + a_2c^2 + a_1c + a_0\right)\\ &= \lambda \cdot \varphi_c(p),\end{aligned}$$

also ist φ_c homogen; insgesamt ist damit φ_c linear.

b) Es ist

$$U_c = \{p \in V \mid p(c) = 0\} = \{p \in V \mid \varphi_c(p) = 0\} = \mathrm{Kern}(\varphi_c).$$

Es ist zudem $\mathrm{Bild}(\varphi_c) \subseteq \mathbb{R}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}$, und etwa wegen $\varphi_c(1) = 1 \neq 0$ gilt $\mathrm{Bild}(\varphi_c) \neq \{0\}$, weswegen schon $\mathrm{Bild}(\varphi_c) = \mathbb{R}$ mit $\dim(\mathrm{Bild}(\varphi_c)) = 1$ folgt; ferner gilt $\dim(V) = 4$, nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen

$$\dim(\mathrm{Bild}(\varphi_c)) + \dim(\mathrm{Kern}(\varphi_c)) = \dim(V)$$

und damit

$$\dim(\mathrm{Kern}(\varphi_c)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Bild}(\varphi_c)) = 4 - 1 = 3.$$

c) Für ein Polynom

$$p = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in V$$

gilt

$$\begin{aligned} p \in U_0 \quad &\iff \quad a_3 \cdot 0^3 + a_2 \cdot 0^2 + a_1 \cdot 0 + a_0 = 0 \\ &\iff \quad a_0 = 0 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} p \in U_1 \quad &\iff \quad a_3 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 = 0 \\ &\iff \quad a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0, \end{aligned}$$

zusammen also

$$\begin{aligned} p \in U_0 \cap U_1 \quad &\iff \quad \big(a_0 = 0 \;\text{ und }\; a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0\big) \\ &\iff \quad \big(a_0 = 0 \;\text{ und }\; a_3 + a_2 + a_1 = 0\big) \\ &\iff \quad \big(a_0 = 0 \;\text{ und }\; a_1 = -a_3 - a_2\big) \\ &\iff \quad p = a_3X^3 + a_2X^2 + (-a_3 - a_2)\,X \\ &\iff \quad p = a_3\left(X^3 - X\right) + a_2\left(X^2 - X\right); \end{aligned}$$

wegen

$$U_0 \cap U_1 = \langle X^3 - X,\; X^2 - X\rangle$$

sind $p_1 = X^3 - X$, $p_2 = X^2 - X$ zunächst ein Erzeugendensystem von $U_0 \cap U_1$. Ferner sind p_1, p_2 etwa wegen $\mathrm{Grad}(p_1) = 3 > 2 = \mathrm{Grad}(p_2)$ keine skalaren Vielfachen voneinander, mithin linear unabhängig, und folglich schon eine Basis von $U_0 \cap U_1$; wir erhalten also $\dim(U_0 \cap U_1) = 2$.

5.30 Zu betrachten ist der reelle Vektorraum

$$P_2 = \{p \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Grad}(p) \leq 2\} = \left\{a_2X^2 + a_1X + a_0 \mid a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\right\}$$

zusammen mit der Abbildung

$$L : P_2 \to \mathbb{R}^2, \quad p \mapsto \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) - p(-1) \end{pmatrix};$$

für $p = a_2X^2 + a_1X + a_0 \in P_2$ mit a_2, a_1, $a_0 \in \mathbb{R}$ gilt wegen

$$p(0) = a_2 \cdot 0^2 + a_1 \cdot 0 + a_0 = a_0$$

sowie

$$p(1) = a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 = a_2 + a_1 + a_0$$

und

$$p(-1) = a_2 \cdot (-1)^2 + a_1 \cdot (-1) + a_0 = a_2 - a_1 + a_0,$$

also

$$p(1) - p(-1) = (a_2 + a_1 + a_0) - (a_2 - a_1 + a_0) = 2\,a_1,$$

demnach

$$L(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) - p(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ 2\,a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

a) Wir weisen die Linearität der Abbildung L anhand der Definition nach:

- Für alle $p = a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \in P_2$ und $q = b_2 X^2 + b_1 X + b_0 \in P_2$ gilt

$$p + q = (a_2 + b_2) X^2 + (a_1 + b_1) X + (a_0 + b_0) \in P_2$$

mit

$$L(p+q) = \begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ 2\,(a_1 + b_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ 2\,a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ 2\,b_1 \end{pmatrix} = L(p) + L(q);$$

damit ist die Abbildung L additiv.

- Für alle $p = a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \in P_2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lambda \cdot p = (\lambda\, a_2) X^2 + (\lambda\, a_1) X + (\lambda\, a_0) \in P_2$$

mit

$$L(\lambda \cdot q) = \begin{pmatrix} \lambda\, a_0 \\ 2\,(\lambda\, a_1) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ 2\,a_1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot L(p);$$

damit ist die Abbildung L homogen.

b) Für jedes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir $p = a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \in P_2$ mit

$$a_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}, \quad a_1 = \frac{y}{2} \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad a_0 = x \in \mathbb{R},$$

und es gilt

$$L(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ 2\,a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \cdot \frac{y}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

damit ist L surjektiv, es ist also $\operatorname{Bild}(L) = \mathbb{R}^2$. Mit Hilfe der Dimensionsformel für Untervektorräume ergibt sich folglich

$$\dim \operatorname{Kern}(L) = \dim P_2 - \dim \operatorname{Bild}(L) = 3 - 2 = 1.$$

c) Für alle $p = a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \in P_2$ mit $a_2,\ a_1,\ a_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$p \in \operatorname{Kern}(L) \iff L(p) = 0 \iff \begin{pmatrix} a_0 \\ 2\,a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$
$$\iff \big(a_0 = 0 \text{ und } 2\,a_1 = 0\big) \iff a_0 = a_1 = 0 \iff p = a_2 X^2;$$

damit ist

$$\operatorname{Kern}(L) = \left\{ a_2 X^2 \mid a_2 \in \mathbb{R} \right\} = \langle X^2 \rangle,$$

und wegen $X^2 \neq 0$ ist X^2 eine Basis von $\operatorname{Kern}(L)$.

d) Wegen

$$\begin{aligned}
L(1) \underset{a_2=0,\, a_1=0,\, a_0=1}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
L(X) \underset{a_2=0,\, a_1=1,\, a_0=0}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} &= 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
L(X^2) \underset{a_2=1,\, a_1=0,\, a_0=0}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ergibt sich als darstellende Matrix von L bezüglich der Basis 1, X, X^2 von P_2 und der Standardbasis e_1, e_2 von $\mathbb{R}^2$ dann

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

5.31 Für jedes $d \in \mathbb{N}$ ist die Teilmenge

$$V_d = \{f \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Grad}(f) \leq d\}$$

des Vektorraums $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ aller Polynome ein Unterraum mit $\dim(V_d) = d+1$; ferner ist die Teilmenge

$$U_{d+1} = \{f \cdot (X-1) \mid f \in V_d\} \subseteq \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$$

zu betrachten.

a) Für jedes $p \in U_{d+1}$ gibt es ein $f \in V_d$ mit $p = f \cdot (X-1)$; damit ergibt sich:
   - für $f = 0$ ist $p = f \cdot (X-1) = 0$, also $p \in V_{d+1}$;
   - für $f \neq 0$ ist $0 \leq \mathrm{Grad}(f) \leq d$ und damit

     $$\mathrm{Grad}(p) = \mathrm{Grad}(f \cdot (X-1)) = \underbrace{\mathrm{Grad}(f)}_{\leq d} + \underbrace{\mathrm{Grad}(X-1)}_{=1} \leq d+1,$$

     also $p \in V_{d+1}$.

   Folglich ist $U_{d+1} \subseteq V_{d+1}$.

b) Für die Abbildung

$$\alpha_d : V_d \to V_{d+1}, \quad \alpha_d(f) = f \cdot (X-1),$$

   ergibt sich:
   - für alle f, $g \in V_d$ gilt

     $$\alpha_d(f+g) = (f+g)\cdot(X-1) = f\cdot(X-1) + g\cdot(X-1) = \alpha_d(f) + \alpha_d(g);$$

     damit ist α_d additiv.
   - für alle $f \in V_d$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

     $$\alpha_d(\lambda \cdot f) = (\lambda \cdot f) \cdot (X-1) = \lambda \cdot (f \cdot (X-1)) = \lambda \cdot \alpha_d(f);$$

     damit ist α_d homogen.

   Folglich ist α_d linear.
   - Für alle $f \in \mathrm{Kern}(\alpha_d)$ gilt $\alpha_d(f) = 0$, also $f \cdot (X-1) = 0$, woraus sich wegen $X - 1 \neq 0$ schon $f = 0$ ergibt; damit gilt $\mathrm{Kern}(\alpha_d) = \{0\}$.
   - Es ist

     $$\mathrm{Bild}(\alpha_d) = \{\alpha_d(f) \mid f \in V_d\} = \{f \cdot (X-1) \mid f \in V_d\} = U_{d+1}.$$

c) Gemäß b) ist $\operatorname{Kern}(\alpha_d) = \{0\}$ und $\operatorname{Bild}(\alpha_d) = U_{d+1}$, und mit Hilfe der Dimensionsformel für lineare Abbildungen erhält man

$$\dim U_{d+1} = \dim \operatorname{Bild}(\alpha_d) = \underbrace{\dim V_d}_{=d+1} - \underbrace{\dim \operatorname{Kern}(\alpha_d)}_{=0} = d + 1.$$

5.32 a) Für ein Polynom

$$p(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \in \operatorname{Pol}_3(\mathbb{R})$$

ist

$$p(X+1) = a_0 + a_1(X+1) + a_2(X+1)^2 + a_3(X+1)^3 \in \operatorname{Pol}_3(\mathbb{R})$$

sowie

$$p(X-1) = a_0 + a_1(X-1) + a_2(X-1)^2 + a_3(X-1)^3 \in \operatorname{Pol}_3(\mathbb{R});$$

die Unbestimmte X wird also durch $X+1$ bzw. $X-1$ ersetzt; für die lineare Abbildung

$$f : \operatorname{Pol}_3(\mathbb{R}) \to \operatorname{Pol}_3(\mathbb{R}), \quad p(X) \mapsto \frac{1}{2}\big(p(X+1) + p(X-1)\big),$$

ergibt sich damit für $p(X) = 1$, also mit $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, dann

$$f(1) = \frac{1}{2}\big(1+1\big) = 1,$$

für $p(X) = X$, also mit $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, dann

$$f(X) = \frac{1}{2}\big((X+1) + (X-1)\big) = X,$$

für $p(X) = X^2$, also mit $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, dann

$$f(X^2) = \frac{1}{2}\big((X+1)^2 + (X-1)^2\big) = X^2 + 1$$

und für $p(X) = X^3$, also $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, dann

$$f(X^3) = \frac{1}{2}\big((X+1)^3 + (X-1)^3\big) = X^3 + 3\,X.$$

Wegen

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3 \\ f(X) &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3 \\ f(X^2) &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot X + 1 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3 \\ f(X^3) &= 0 \cdot 1 + 3 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 1 \cdot X^3 \end{aligned}$$

ergibt sich damit für die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis 1, X, X^2, X^3 damit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

b) Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte und die Eigenvektoren der darstellenden Matrix $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ des Endomorphismus $f : \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$. Wegen

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda \cdot E_4) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks–}}{=}} (1-\lambda)^4$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt M nur den Eigenwert $\lambda = 1$, und wegen

$$M - 1 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bilden

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(M; \lambda = 1)$. Dementsprechend besitzt auch f nur den einen Eigenwert $\lambda = 1$, und

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3 &= 1, \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3 &= X \end{aligned}$$

bilden eine Basis von $\mathrm{Eig}(f; \lambda = 1)$; die Eigenvektoren von f sind also genau die vom Nullpolynom verschiedenen Polynome $p \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{Grad}(p) \leq 1$.

5.33 a) Für alle p, $q \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned} f(p+q) &= (p+q)' - (X+1) \cdot (p+q)'' \\ &= (p' + q') - (X+1) \cdot (p'' + q'') \\ &= (p' + q') - ((X+1) \cdot p'' + (X+1) \cdot q'') \\ &= (p' - (X+1) \cdot p'') + (q' - (X+1) \cdot q'') \\ &= f(p) + f(q); \end{aligned}$$

damit ist f additiv; ferner gilt für alle $p \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot p) &= (\lambda \cdot p)' - (X+1) \cdot (\lambda \cdot p)'' \\ &= \lambda \cdot p' - (X+1) \cdot (\lambda \cdot p'') \\ &= \lambda \cdot (p' - (X+1) \cdot p'') \\ &= \lambda \cdot f(p); \end{aligned}$$

damit ist f auch homogen, insgesamt also linear.

b) Wegen

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 - (X+1) \cdot 0 &&= 0 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 \\ f(X) &= 1 - (X+1) \cdot 0 &&= 1 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 \\ f(X^2) &= 2X - (X+1) \cdot 2 &&= (-2) \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 \\ f(X^3) &= 3X^2 - (X+1) \cdot 6X &&= 0 \cdot 1 + (-6) \cdot X + (-3) \cdot X^2 \end{aligned}$$

ist

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen 1, X, X^2, X^3 von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ und 1, X, X^2 von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$.

c) Wegen

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{6}\cdot \mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+3\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

eine Basis von $\mathrm{Kern}\,(\ell_M)$ sowie

$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad s_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

eine Basis von $\mathrm{Bild}\,(\ell_M)$; damit ist

$$\begin{aligned} 1\cdot 1 + 0\cdot X + 0\cdot X^2 + 0\cdot X^3 &= 1, \\ 0\cdot 1 + 2\cdot X + 1\cdot X^2 + 0\cdot X^3 &= 2X + X^2 \end{aligned}$$

eine Basis von $\mathrm{Kern}(f) \subseteq \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ sowie

$$\begin{aligned} 1\cdot 1 + 0\cdot X + 0\cdot X^2 &= 1, \\ 0\cdot 1 - 6\cdot X - 3\cdot X^2 &= -6X - 3X^2 \end{aligned}$$

eine Basis von $\mathrm{Bild}(f) \subseteq \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$.

5.34 a) Für jedes

$$p = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$$

ist

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= Xp' + \alpha\, p \\ &= X\,(a_1 + 2a_2 X) + \alpha\left(a_0 + a_1 X + a_2 X^2\right) \\ &= \alpha a_0 + (a_1 + \alpha a_1)\, X + (2a_2 + \alpha a_2)\, X^2 \end{aligned}$$

mit $\varphi(p) \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$; des weiteren gilt

$$\begin{aligned} \varphi\,(p_1 + p_2) &= X\,(p_1 + p_2)' + \alpha\,(p_1 + p_2) = \\ &= X\,(p_1' + p_2') + \alpha\,(p_1 + p_2) = (Xp_1' + Xp_2') + (\alpha\, p_1 + \alpha\, p_2) = \\ &= (Xp_1' + \alpha\, p_1) + (Xp_2' + \alpha\, p_2) = \varphi(p_1) + \varphi(p_2), \end{aligned}$$

für alle p_1, $p_2 \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$, weswegen φ additiv ist, sowie

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda \cdot p) = X(\lambda \cdot p)' + \alpha(\lambda \cdot p) = X(\lambda \cdot p') + \alpha(\lambda \cdot p) = \\ = \lambda \cdot (Xp') + \lambda \cdot (\alpha\, p) = \lambda \cdot (Xp' + \alpha\, p) = \lambda \cdot \varphi(p),\end{aligned}$$

für alle $p \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, weswegen φ homogen ist. Folglich ist φ insgesamt ein Endomorphismus von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$.

b) Wir bestimmen zunächst die darstellende Matrix M der linearen Abbildung φ bezüglich der Standardbasis 1, X, X^2 von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$; wegen

$$\begin{array}{ccccccc}\varphi(1) & \underset{a_0=1,a_1=0,a_2=0}{=} & \alpha & = & \alpha \cdot 1+ & 0 \cdot X+ & 0 \cdot X^2 \\ \varphi(X) & \underset{a_0=0,a_1=1,a_2=0}{=} & (1+\alpha)X & = & 0 \cdot 1+ & (1+\alpha) \cdot X+ & 0 \cdot X^2 \\ \varphi(X^2) & \underset{a_0=0,a_1=0,a_2=1}{=} & (2+\alpha)X^2 & = & 0 \cdot 1+ & 0 \cdot X+ & (2+\alpha) \cdot X^2\end{array}$$

ist

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2+\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Der Endomorphismus φ ist nun genau dann bijektiv, also ein Isomorphismus, wenn die darstellende Matrix M invertierbar ist, also $\det(M) \neq 0$ gilt; wegen

$$\det(M) = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2+\alpha \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Diagonal–}}{=}} \alpha\,(1+\alpha)\,(2+\alpha)$$

ist dies genau für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}$ der Fall.

5.35 a) Für ein Polynom

$$p(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$$

ist

$$p(X+1) = a_0 + a_1(X+1) + a_2(X+1)^2 + a_3(X+1)^3 \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R});$$

die Unbestimmte X wird also durch $X+1$ ersetzt; für die lineare Abbildung

$$f : \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}), \quad p(X) \mapsto p(X+1) - p(X),$$

ergibt sich damit für $p(X) = 1$, also mit $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, dann

$$f(1) = 1 - 1 = 0,$$

für $p(X) = X$, also mit $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, dann

$$f(X) = (X+1) - X = 1,$$

für $p(X) = X^2$, also mit $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, dann

$$f(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$$

und für $p(X) = X^3$, also $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, dann

$$f(X^3) = (X+1)^3 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1.$$

Wegen

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3 \\ f(X) &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3 \\ f(X^2) &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3 \\ f(X^3) &= 1 \cdot 1 + 3 \cdot X + 3 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3 \end{aligned}$$

ergibt sich damit für die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis 1, X, X^2, X^3 damit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

b) Für das konstante Polynom 1 gilt gemäß a) $f(1) = 0$, für das Nullpolynom 0 gilt ebenfalls $f(0) = 0$; wegen $f(0) = f(1)$ mit $0 \neq 1$ ist f nicht injektiv. Damit kann f als Endomorphismus des endlich–dimensionalen Vektorraums $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ auch nicht surjektiv sein; insbesondere ist f nicht bijektiv.

c) Die darstellende Matrix M liegt bereits in Zeilenstufenform vor, und wir können $\mathrm{Rang}(M) = 3$ ablesen; damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Kern}(f) = \dim \mathrm{Kern}(\ell_M) &= 4 - \mathrm{Rang}(M) = 4 - 3 = 1 \\ \dim \mathrm{Bild}(f) = \dim \mathrm{Bild}(\ell_M) &= \mathrm{Rang}(M) = 3. \end{aligned}$$

Genauer ergibt sich:

- Es ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(\ell_M)$ und damit

  $$1 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3 = 1$$

  eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$; es ist also $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Pol}_0(\mathbb{R})$.

- Es ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(\ell_M)$ und damit

  $$\begin{aligned} 1 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3 &= 1, \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3 &= 1 + 2X, \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot X + 3 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3 &= 1 + 3X + 3X^2 \end{aligned}$$

  eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$; man erhält also $\mathrm{Bild}(f) \subseteq \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$, woraus sich wegen $\dim \mathrm{Bild}(f) = 3 = \dim \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ schon $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ ergibt.

5.36 Die Elemente (also Vektoren) des $\mathbb{R}$–Vektorraums V aller reellen Polynome vom Grad ≤ 2 besitzen die Gestalt

$$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \qquad \text{mit} \quad a_0,\, a_1,\, a_2 \in \mathbb{R};$$

damit ist

$$p(x+1) = a_0 + a_1 \cdot (x+1) + a_2 \cdot (x+1)^2$$

und folglich

$$\begin{aligned} x\,p(x+1) - x\,p(x) &= x \cdot \big(p(x+1) - p(x)\big) = \\ &= x \cdot \big(\big(a_0 + a_1 \cdot (x+1) + a_2 \cdot (x+1)^2\big) - \big(a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2\big)\big) = \\ &= x \cdot \big(a_1 + a_2 \cdot \big((x+1)^2 - x^2\big)\big) = x \cdot (a_1 + a_2 \cdot (2\,x+1)) = \\ &= x \cdot ((a_1 + a_2) + 2\,a_2 \cdot x) = (a_1 + a_2) \cdot x + 2\,a_2 \cdot x^2. \end{aligned}$$

Die gegebene lineare Abbildung ist demnach

$$F : V \to V, \quad a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \;\mapsto\; (a_1 + a_2) \cdot x + 2\,a_2 \cdot x^2.$$

a) Wegen

$$\begin{aligned} F(1) &\underset{a_0=1,\, a_1=0,\, a_2=0}{=} 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ F(x) &\underset{a_0=0,\, a_1=1,\, a_2=0}{=} 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ F(x^2) &\underset{a_0=0,\, a_1=0,\, a_2=1}{=} 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 2 \cdot x^2 \end{aligned}$$

ist

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

die darstellende Matrix von F bezüglich der Basis $1,\, x,\, x^2$.

b) Wegen

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks–}}{=}} -\lambda\,(1-\lambda)\,(2-\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt die Matrix M die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ und ist damit als 3×3–Matrix diagonalisierbar; folglich ist auch der Endomorphismus F von V diagonalisierbar.

5.37 Der gegebene Endomorphismus $\varphi : V \to V$ des Vektorraums V besitzt wegen

$$\begin{array}{lllllllll} \varphi(v_1) & = & v_2 & = & 0 \cdot v_1 & + & 1 \cdot v_2 & + & 0 \cdot v_3 & + & 0 \cdot v_4 \\ \varphi(v_2) & = & v_3 & = & 0 \cdot v_1 & + & 0 \cdot v_2 & + & 1 \cdot v_3 & + & 0 \cdot v_4 \\ \varphi(v_3) & = & v_4 & = & 0 \cdot v_1 & + & 0 \cdot v_2 & + & 0 \cdot v_3 & + & 1 \cdot v_4 \\ \varphi(v_4) & = & v_1 & = & 1 \cdot v_1 & + & 0 \cdot v_2 & + & 0 \cdot v_3 & + & 0 \cdot v_4 \end{array}$$

bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3, v_4 von V die darstellende Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4};$$

dabei ist ein Vektor

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 + \alpha_4 \cdot v_4 \in V$$

genau dann ein Eigenvektor des Endomorphismus φ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, wenn sein Koordinatenvektor

$$p(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3, v_4 ein Eigenvektor der darstellenden Matrix M zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ ist. Wegen

$$\begin{aligned} \chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda\, E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{1. Zeile}}{=} \\ = (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{Dreiecks–}}{\underset{\text{matrizen}}{=}} \\ = (-\lambda) \cdot (-\lambda)^3 - 1 \cdot 1^3 = \lambda^4 - 1 = (\lambda - 1)\,(\lambda + 1)\,\left(\lambda^2 + 1\right) \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt M genau zwei Eigenwerte, nämlich $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$; wegen

$$\begin{aligned} M - \lambda_1\, E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{II+I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{III+II}}{\leadsto} \\ \leadsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{IV+III}}{\leadsto} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist der Koordinatenvektor

$$p\,(b_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

eine Basis für den Eigenraum $\operatorname{Eig}(M;\lambda_1)$ der Matrix M zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, und wegen

$$M - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{II}}{\rightsquigarrow}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}-\text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist der Koordinatenvektor

$$p\,(b_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

eine Basis für den Eigenraum $\operatorname{Eig}(M;\lambda_2)$ der Matrix M zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$.

Folglich besitzt auch der Endomorphismus $\varphi : V \to V$ genau die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$, und für die beiden Eigenräume ergibt sich

$$\operatorname{Eig}(\varphi;\lambda_1) = \mathbb{R} \cdot b_1 \qquad \text{mit der Basis} \qquad b_1 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$$

und

$$\operatorname{Eig}(\varphi;\lambda_2) = \mathbb{R} \cdot b_2 \qquad \text{mit der Basis} \qquad b_2 = -v_1 + v_2 - v_3 + v_4.$$

Damit gibt es nur zwei linear unabhängige Eigenvektoren von φ, insbesondere also keine Basis des 4–dimensionalen Vektorraums V aus Eigenvektoren von φ; damit ist φ nicht diagonalisierbar.

5.38 Wir betrachten für den $\mathbb{R}$–Vektorraum V einen Endomorphismus $f : V \to V$ mit der Eigenschaft $f \circ f = \mathrm{id}_V$.

a) Wir zeigen, dass $U = \{u \in V \mid f(u) = u\}$ ein Untervektorraum von V ist, anhand des Unterraumkriteriums:

- Es ist $0_V \in V$ mit $f(0_V) = 0_V$; damit ist $0_V \in U$.
- Für alle $u_1,\, u_2 \in U$ gilt $u_1 + u_2 \in V$ mit

$$f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = u_1 + u_2;$$

  damit ist $u_1 + u_2 \in U$.
- Für alle $u \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda \cdot u \in V$ mit

$$f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u) = \lambda \cdot u;$$

  damit ist $\lambda \cdot u \in U$.

Damit ist U ein Unterraum von V, und für alle $v \in V$ gilt $u = v + f(v) \in V$ mit

$$\begin{aligned} f(u) = f(v + f(v)) &= f(v) + f(f(v)) = \\ &\underset{f \circ f = \mathrm{id}_V}{=} f(v) + v = v + f(v) = u \end{aligned}$$

und damit $u = v + f(v) \in U$.

Entsprechend weisen wir anhand des Unterraumkriteriums nach, dass auch $W = \{w \in V \mid f(w) = -w\}$ ein Untervektorraum von V ist:

- Es ist $0_V \in V$ mit $f(0_V) = 0_V = -0_V$; damit ist $0_V \in W$.
- Für alle w_1, $w_2 \in W$ gilt $w_1 + w_2 \in V$ mit

  $$f(w_1 + w_2) = f(w_1) + f(w_2) = (-w_1) + (-w_2) = -(w_1 + w_2);$$

  damit ist $w_1 + w_2 \in W$.
- Für alle $w \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda \cdot w \in V$ mit

  $$f(\lambda \cdot w) = \lambda \cdot f(w) = \lambda \cdot (-w) = -(\lambda \cdot w);$$

  damit ist $\lambda \cdot w \in W$.

Damit ist W ein Unterraum von V, und für alle $v \in V$ gilt $w = v - f(v) \in V$ mit

$$\begin{aligned} f(w) = f(v - f(v)) &= f(v) - f(f(v)) = \\ &\underset{f \circ f = \mathrm{id}_V}{=} f(v) - v = -(v - f(v)) = -w \end{aligned}$$

und damit $w = v - f(v) \in W$.

b) Es ist $U + W \subseteq V$, und für „$\supseteq$“ sei $v \in V$; gemäß Teilaufgabe a) ist

$$v + f(v) \in U \qquad \text{und} \qquad v - f(v) \in W,$$

also

$$\begin{aligned} v = \tfrac{1}{2}(2\,v) = \tfrac{1}{2}((v + f(v)) + (v - f(v))) &= \\ &= \tfrac{1}{2}(v + f(v)) + \tfrac{1}{2}(v - f(v)) \in U + W, \end{aligned}$$

woraus sich insgesamt $U + W = V$ ergibt.

Es ist $U \cap W \supseteq \{0_V\}$, und für „$\subseteq$“ sei $v \in U \cap W$; wegen $v \in U$ ist $f(v) = v$, und wegen $v \in W$ ist $f(v) = -v$, zusammen $v = f(v) = -v$ und damit $v = 0_V$, woraus sich insgesamt $U \cap W = \{0_V\}$ ergibt.

c) Für $U \neq \{0_V\}$ ist

$$U = \{v \in V \mid f(v) = v\} = \{v \in V \mid f(v) = 1 \cdot v\}$$

der Eigenraum von f zum Eigenwert 1; wir wählen eine Basis $u_1, \ldots, u_r$ von U. Für $W \neq \{0_V\}$ ist ferner

$$W = \{v \in V \mid f(v) = -v\} = \{v \in V \mid f(v) = (-1) \cdot v\}$$

der Eigenraum von f zum Eigenwert -1; wir wählen eine Basis $w_1, \ldots, w_s$ von W. Gemäß Teilaufgabe b) gilt $U \oplus W = V$, so dass $u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s$ eine Basis von V aus Eigenvektoren von f bilden; folglich ist der Endomorphismus $f : V \to V$ diagonalisierbar.

5.39 Für einen $\mathbb{R}$–Vektorraum V der Dimension $\dim V = n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist die lineare Abbildung $f : V \to V$ mit der Eigenschaft

$$(*) \qquad \mathrm{Bild}(f) \cap \mathrm{Kern}(f) = \{0_V\}$$

zu betrachten; damit gilt gemäß der Dimensionsformel für Unterräume

$$\dim\left(\mathrm{Kern}(f) + \mathrm{Bild}(f)\right) = \dim \mathrm{Kern}(f) + \dim \mathrm{Bild}(f) - \underbrace{\dim\left(\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f)\right)}_{=0 \text{ gemäß } (*)}$$

und gemäß der Dimensionsformel für lineare Abbildungen demnach

$$\dim\left(\mathrm{Kern}(f) + \mathrm{Bild}(f)\right) = \dim \mathrm{Kern}(f) + \dim \mathrm{Bild}(f) = \dim V,$$

woraus wegen $\mathrm{Kern}(f) + \mathrm{Bild}(f) \subseteq V$ schon

$$(\star) \qquad \mathrm{Kern}(f) + \mathrm{Bild}(f) = V$$

folgt. Es ist $\dim \mathrm{Kern}(f) = m \geq 1$ vorausgesetzt; damit ist $\dim \mathrm{Bild}(f) = n - m$, wobei wir, um Trivialfälle auszuschließen, $k = n - m \geq 1$ annehmen können.

a) Bei der gegebenen linearen Abbildung $f : V \to V$ läßt sich zunächst der Zielraum V auf $\mathrm{Bild}(f)$ und danach der Quellraum V auf $\mathrm{Bild}(f)$ einschränken, und wir erhalten die lineare Abbildung

$$f|_{\mathrm{Bild}(f)} : \mathrm{Bild}(f) \to \mathrm{Bild}(f), \quad v \mapsto f(v);$$

es ist die Bijektivität von $f|_{\mathrm{Bild}(f)}$ nachzuweisen:

- Für jedes $v \in \mathrm{Kern}\left(f|_{\mathrm{Bild}(f)}\right)$ gilt $v \in \mathrm{Bild}(f)$ mit $f|_{\mathrm{Bild}(f)}(v) = 0$, also $f(v) = 0$ und damit $v \in \mathrm{Kern}(f)$, woraus wegen $(*)$ schon $v = 0_V$ folgt; damit ist $\mathrm{Kern}\left(f|_{\mathrm{Bild}(f)}\right) = \{0_V\}$, mithin $f|_{\mathrm{Bild}(f)}$ injektiv.
- Es ist $\mathrm{Bild}\left(f|_{\mathrm{Bild}(f)}\right) \subseteq \mathrm{Bild}(f)$; die Dimensionsformel für lineare Abbildungen, angewendet auf den Endomorphismus $f|_{\mathrm{Bild}(f)}$ von $\mathrm{Bild}(f)$, liefert

$$\dim \mathrm{Bild}(f) = \underbrace{\dim \mathrm{Kern}\left(f|_{\mathrm{Bild}(f)}\right)}_{=0} + \dim \mathrm{Bild}\left(f|_{\mathrm{Bild}(f)}\right),$$

  also $\dim \mathrm{Bild}\left(f|_{\mathrm{Bild}(f)}\right) = \dim \mathrm{Bild}(f)$. Insgesamt ergibt sich damit $\mathrm{Bild}\left(f|_{\mathrm{Bild}(f)}\right) = \mathrm{Bild}(f)$, mithin ist $f|_{\mathrm{Bild}(f)}$ surjektiv.

b) Für jeden Vektor $v \in V$ existieren gemäß $(\star)$ Vektoren $v_1 \in \mathrm{Kern}(f)$ und $v_2 \in \mathrm{Bild}(f)$ mit $v = v_1 + v_2$; sind auch $v_1' \in \mathrm{Kern}(f)$ und $v_2' \in \mathrm{Bild}(f)$ mit $v = v_1' + v_2'$, so ergibt sich

$$v_1 + v_2 = v = v_1' + v_2', \qquad \text{also} \qquad \underbrace{v_1 - v_1'}_{\in \mathrm{Kern}(f)} = \underbrace{v_2' - v_2}_{\in \mathrm{Bild}(f)},$$

woraus wegen $(*)$ dann

$$v_1 - v_1' = 0_V = v_2' - v_2 \qquad \text{bzw.} \qquad v_1 = v_1' \;\text{ und }\; v_2 = v_2'$$

folgt.

c) Wir wählen zum einen eine Basis $b_1, \ldots, b_m$ von $\mathrm{Kern}(f)$ und zum anderen eine Basis $c_1, \ldots, c_k$ von $\mathrm{Bild}(f)$; damit sind $b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_k$ wegen $(*)$ linear unabhängig und wegen $(\star)$ ein Erzeugendensystem von V, also eine Basis von V.

(Alternativ kann auch aus nur einer der beiden Eigenschaften „lineare Unabhängigkeit" bzw. „Erzeugendensystem von V" wegen $m+k=n=\dim V$ auf die Eigenschaft „Basis von V" geschlossen werden.)

Für alle $v \in V$ ist $f(v) \in \mathrm{Bild}(f)$, also $f(v) \in \langle c_1, \ldots, c_k \rangle$; damit ergibt sich

$$\begin{array}{cccccccccc}
f(b_1) & = 0_V = & 0 \cdot b_1 & + \ldots + & 0 \cdot b_m & + & 0 \cdot c_1 & + \ldots + & 0 \cdot c_k \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
f(b_m) & = 0_V = & 0 \cdot b_1 & + \ldots + & 0 \cdot b_m & + & 0 \cdot c_1 & + \ldots + & 0 \cdot c_k \\
f(c_1) & = & 0 \cdot b_1 & + \ldots + & 0 \cdot b_m & + & \alpha_{11} \cdot c_1 & + \ldots + & \alpha_{k1} \cdot c_k \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
f(c_k) & = & 0 \cdot b_1 & + \ldots + & 0 \cdot b_m & + & \alpha_{1k} \cdot c_1 & + \ldots + & \alpha_{kk} \cdot c_k
\end{array}$$

so daß die darstellende Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$ bezüglich der Basis $b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_k$ von V die Gestalt

$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc}
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\hline
0 & \ldots & 0 & \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1k} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & \alpha_{k1} & \ldots & \alpha_{kk}
\end{array}\right) \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

also

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \qquad \text{mit} \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \ldots & \alpha_{kk} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

besitzt. Gemäß Konstruktion ist $B \in \mathbb{R}^{k \times k}$ die darstellende Matrix des Endomorphismus $f|_{\mathrm{Bild}(f)} : \mathrm{Bild}(f) \to \mathrm{Bild}(f)$ bezüglich der Basis $c_1, \ldots, c_k$ von $\mathrm{Bild}(f)$; da $f|_{\mathrm{Bild}(f)}$ gemäß a) bijektiv ist, ist $B \in \mathbb{R}^{k \times k}$ invertierbar.

5.40 a) Es ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix, es gilt also $A^\top \cdot A = E_n$. Für jeden Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^n$ von A zum Eigenwert $\lambda = 1$ gilt also $v \neq 0$ und $A \cdot v = 1 \cdot v = v$, und wir erhalten

$$A^\top \cdot v = A^\top \cdot (A \cdot v) = \left(A^\top \cdot A\right) \cdot v = E_n \cdot v = v = 1 \cdot v;$$

damit ist $v \neq 0$ auch Eigenvektor von $A^\top$ zum Eigenwert $\lambda = 1$.

b) Wir betrachten zum einen den Eigenraum der Matrix A zum Eigenwert $\lambda = 1$, also

$$\mathrm{Eig}(A; 1) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot v = v\},$$

und zum anderen den Bildraum der linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad f(x) = (A - E_n) \cdot x,$$

also

$$\operatorname{Bild}(f) = \{(A - E_n) \cdot x \mid x \in \mathbb{R}^n\}\,.$$

Für jedes $v \in \operatorname{Eig}(A;1)$ gilt gemäß a) auch $A^\top \cdot v = v$, und für jedes $w \in \operatorname{Bild}(f)$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $(A - E_n) \cdot x = w$, so daß sich

$$\begin{aligned} w \circ v = w^\top \cdot v &= ((A - E_n) \cdot x)^\top \cdot v = \\ &= \Big(x^\top \cdot (A - E_n)^\top\Big) \cdot v = x^\top \cdot \Big(\big(A^\top - E_n^\top\big) \cdot v\Big) = \\ &= x^\top \cdot \Big(A^\top \cdot v - E_n \cdot v\Big) = x^\top \cdot (v - v) = x^\top \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

und damit $v \perp w$ ergibt; folglich sind $\operatorname{Eig}(A;1)$ und $\operatorname{Bild}(f)$ orthogonal.

5.41 a) Wir betrachten eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit der Eigenschaft $M \cdot M = M$ und erhalten für $M' = E_n - M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch direktes Nachrechnen

$$\begin{aligned} M' \cdot M' &= (E_n - M) \cdot (E_n - M) \\ &= E_n \cdot (E_n - M) - M \cdot (E_n - M) \\ &= E_n^2 - E_n \cdot M - M \cdot E_n + M \cdot M \\ &= E_n - M - M + M \\ &= E_n - M = M'. \end{aligned}$$

b) Wir betrachten nun die beiden linearen Abbildungen

$$\ell_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \ell_M(x) = M \cdot x, \quad \text{und} \quad \ell_{M'} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \ell_{M'}(x) = M' \cdot x,$$

und zeigen zunächst die Beziehung $\operatorname{Bild}(\ell_M) = \operatorname{Kern}(\ell_{M'})$; es ist dabei

$$\operatorname{Bild}(\ell_M) = \{M \cdot x \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

sowie

$$\begin{aligned} \operatorname{Kern}(\ell_{M'}) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid M' \cdot x = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (E_n - M) \cdot x = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x - M \cdot x = 0\}\,. \end{aligned}$$

- Für „$\subseteq$“ sei $y \in \operatorname{Bild}(\ell_M)$, also $y = M \cdot x$ für ein $x \in \mathbb{R}^n$; wegen

  $$y - M \cdot y = M \cdot x - M \cdot (M \cdot x) = M \cdot x - (M \cdot M) \cdot x \underset{M\cdot M = M}{=} 0$$

  ist folglich $y \in \operatorname{Kern}(\ell_{M'})$.
- Für „$\supseteq$“ sei $x \in \operatorname{Kern}(\ell_{M'})$, also $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x - M \cdot x = 0$; damit ergibt sich $x = M \cdot x$, und folglich ist $x \in \operatorname{Bild}(\ell_M)$.

Ferner zeigen wir nun die Beziehung $\operatorname{Bild}(\ell_{M'}) = \operatorname{Kern}(\ell_M)$; es ist dabei

$$\begin{aligned} \operatorname{Bild}(\ell_{M'}) &= \{M' \cdot x \mid x \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{(E_n - M) \cdot x \mid x \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{x - M \cdot x \mid x \in \mathbb{R}^n\} \end{aligned}$$

sowie

$$\operatorname{Kern}(\ell_M) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid M \cdot x = 0\}\,.$$

- Für „$\subseteq$“ sei $y \in \text{Bild}(\ell_{M'})$, also $y = x - M \cdot x$ für ein $x \in \mathbb{R}^n$; wegen

$$M \cdot y = M \cdot (x - M \cdot x) = M \cdot x - (M \cdot M) \cdot x \underset{M \cdot M = M}{=} 0$$

ist $y \in \text{Kern}(\ell_M)$.
- Für „$\supseteq$“ sei $x \in \text{Kern}(\ell_M)$, also $x \in \mathbb{R}^n$ mit $M \cdot x = 0$; damit ergibt sich $x = x - M \cdot x$, und folglich ist $x \in \text{Bild}(\ell_{M'})$.

c) Wir zeigen für die lineare Abbildung $\ell_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\ell_M(x) = M \cdot x$, die geforderte Beziehung $\text{Kern}(\ell_M) \oplus \text{Bild}(\ell_M) = \mathbb{R}^n$ anhand der Definition, also

$$\text{Kern}(\ell_M) \cap \text{Bild}(\ell_M) = \{0\} \quad \text{und} \quad \text{Kern}(\ell_M) + \text{Bild}(\ell_M) = \mathbb{R}^n.$$

Für jedes $x \in \text{Kern}(\ell_M) \cap \text{Bild}(\ell_M)$ gilt sowohl $x \in \text{Kern}(\ell_M)$, also $M \cdot x = 0$, als auch $x \in \text{Bild}(\ell_M)$, also $x = M \cdot x_0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$, und es ergibt sich

$$0 = M \cdot x = M \cdot (M \cdot x_0) = (M \cdot M) \cdot x_0 = M \cdot x_0 \underset{M \cdot M = M}{=} x$$

und damit $\text{Kern}(\ell_M) \cap \text{Bild}(\ell_M) = \{0\}$. Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt ferner

$$x - M \cdot x \in \text{Bild}(\ell_{M'}) = \text{Kern}(\ell_M) \qquad \text{und} \qquad M \cdot x \in \text{Bild}(\ell_M),$$

also

$$x = (x - M \cdot x) + M \cdot x \in \text{Kern}(\ell_M) + \text{Bild}(\ell_M),$$

und damit $\text{Kern}(\ell_M) + \text{Bild}(\ell_M) = \mathbb{R}^n$.
Alternativ können wir für $\text{Kern}(\ell_M) \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\text{Bild}(\ell_M) \subseteq \mathbb{R}^n$ auch mit Hilfe der Dimensionsformel für Unterräume $(*)$ sowie der Dimensionsformel für lineare Abbildungen $(\Diamond)$ argumentieren; wegen

$$\begin{aligned} &\dim(\text{Kern}(\ell_M) + \text{Bild}(\ell_M)) + \dim(\text{Kern}(\ell_M) \cap \text{Bild}(\ell_M)) \underset{(*)}{=} \\ &\qquad = \dim(\text{Kern}(\ell_M)) + \dim(\text{Bild}(\ell_M)) \underset{(\Diamond)}{=} \dim(\mathbb{R}^n) = n \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} &\text{Kern}(\ell_M) + \text{Bild}(\ell_M) = \mathbb{R}^n \iff \dim(\text{Kern}(\ell_M) + \text{Bild}(\ell_M)) = n \iff \\ &\iff \dim(\text{Kern}(\ell_M) \cap \text{Bild}(\ell_M)) = 0 \iff \text{Kern}(\ell_M) \cap \text{Bild}(\ell_M) = \{0\} \end{aligned}$$

genügt bereits eine der beiden oben nachgewiesenen Eigenschaften, um die geforderte Beziehung $\mathbb{R}^n = \text{Kern}(\ell_M) \oplus \text{Bild}(\ell_M)$ zu zeigen.

5.42 a) Für den $\mathbb{R}$–Vektorraum V mit $\dim V < \infty$ betrachten wir den Endomorphismus $\varphi : V \to V$ mit den Unterräumen $U = \text{Kern}(\varphi)$ und $W = \text{Bild}(\varphi)$ von V. Wir erhalten zum einen mit der Dimensionsformel für Unterräume

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$$

und zum anderen mit der Dimensionformel für lineare Abbildungen

$$\dim \text{Kern}(\varphi) + \dim \text{Bild}(\varphi) = \dim V,$$

woraus sich wegen

$$\operatorname{Kern}(\varphi) \cap \operatorname{Bild}(\varphi) = \{0\}, \qquad \text{also} \qquad \dim(U \cap W) = 0,$$

zusammen dann

$$\begin{aligned}\dim V = \dim \operatorname{Kern}(\varphi) + \dim \operatorname{Bild}(\varphi) = \dim U + \dim W = \\ = \dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim(U+W)\end{aligned}$$

ergibt; wegen $U + W \subseteq V$ folgt daraus schon

$$V = U + W, \qquad \text{also} \qquad V = \operatorname{Kern}(\varphi) + \operatorname{Bild}(\varphi),$$

mit der Voraussetzung $\operatorname{Kern}(\varphi) \cap \operatorname{Bild}(\varphi) = \{0\}$ also $V = \operatorname{Kern}(\varphi) \oplus \operatorname{Bild}(\varphi)$.

b) Für einen Endomorphismus $\varphi : V \to V$ mit $\varphi \circ \varphi = \varphi$ betrachten wir den Bildraum

$$\operatorname{Bild}(\varphi) = \{\varphi(v) \mid v \in V\}$$

sowie die Menge $\operatorname{Fix}(\varphi)$ der Fixpunkte von φ, also

$$\operatorname{Fix}(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = v\},$$

und haben $\operatorname{Bild}(\varphi) = \operatorname{Fix}(\varphi)$ zu zeigen:

- Für „$\subseteq$“ sei $v \in \operatorname{Bild}(\varphi)$, es gibt also ein $u \in V$ mit $v = \varphi(u)$; wegen

$$\varphi(v) = \varphi(\varphi(u)) = (\varphi \circ \varphi)(u) = \varphi(u) = v$$

  ergibt sich damit $v \in \operatorname{Fix}(\varphi)$.
- Für „$\supseteq$“ sei $v \in \operatorname{Fix}(\varphi)$; es ergibt sich direkt $v = \varphi(v) \in \operatorname{Bild}(\varphi)$.

Für jedes $v \in \operatorname{Kern}(\varphi) \cap \operatorname{Bild}(\varphi)$ gilt

- zum einen $v \in \operatorname{Bild}(\varphi)$, also $v \in \operatorname{Fix}(\varphi)$, und damit $\varphi(v) = v$,
- zum anderen $v \in \operatorname{Kern}(\varphi)$ und damit $\varphi(v) = 0_V$,

zusammen also $v = \varphi(v) = 0_V$; demnach ist $\operatorname{Kern}(\varphi) \cap \operatorname{Bild}(\varphi) = \{0\}$, woraus gemäß a) dann $V = \operatorname{Kern}(\varphi) \oplus \operatorname{Bild}(\varphi)$ folgt.

5.43 Wir zeigen, daß die Eigenschaften (i), (iii) und (v) zueinander äquivalent sind:

„(i) $\Longrightarrow$ (v)“: Ist f injektiv, so gilt $\operatorname{Kern}(f) = \{0\}$ und damit

$$\dim \operatorname{Kern}(f) = 0.$$

„(v) $\Longrightarrow$ (iii)“: Nach der Dimensionsformel gilt

$$\dim V = \dim \operatorname{Kern}(f) + \dim \operatorname{Bild}(f) = \dim \operatorname{Bild}(f).$$

„(iii) $\Longrightarrow$ (i)“: Aus der Dimensionsformel ergibt sich auch

$$\dim \operatorname{Kern}(f) = \dim V - \dim \operatorname{Bild}(f) = 0,$$

also $\operatorname{Kern}(f) = \{0\}$, und folglich ist f injektiv.

Wir zeigen ferner, daß die Eigenschaften (ii), (iv) und (vi) jeweils zueinander äquivalent sind:

„(ii) $\Longrightarrow$ (iv)“: Ist f surjektiv, so gilt $\mathrm{Bild}(f) = W$ und damit

$$\dim \mathrm{Bild}(f) = \dim W.$$

„(iv) $\Longrightarrow$ (vi)“: Wie oben ergibt sich aus der Dimensionsformel

$$\dim \mathrm{Kern}(f) = \dim V - \dim \mathrm{Bild}(f) = \dim V - \dim W.$$

„(vi) $\Longrightarrow$ (ii)“: Aus der Dimensionsformel ergibt sich auch

$$\dim \mathrm{Bild}(f) = \dim V - \dim \mathrm{Kern}(f) = \dim V - (\dim V - \dim W) = \dim W,$$

woraus wegen $\mathrm{Bild}(f) \subseteq W$ schon $\mathrm{Bild}(f) = W$ folgt; damit ist f surjektiv.

5.44 a) Für die linearen Abbildungen $\varphi : W \to U$ und $\psi : V \to W$ betrachten wir die Verknüpfung $\varphi \circ \psi : V \to U$:

- Für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt

$$(\varphi \circ \psi)(v_1 + v_2) = \varphi(\psi(v_1 + v_2)) \underset{\psi \text{ additiv}}{=} \varphi(\psi(v_1) + \psi(v_2)) = \\ \underset{\varphi \text{ additiv}}{=} \varphi(\psi(v_1)) + \varphi(\psi(v_2)) = (\varphi \circ \psi)(v_1) + (\varphi \circ \psi)(v_2);$$

  damit ist $\varphi \circ \psi$ additiv.

- Für alle $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$(\varphi \circ \psi)(\lambda \cdot v) = \varphi(\psi(\lambda \cdot v)) \underset{\psi \text{ homogen}}{=} \varphi(\lambda \cdot \psi(v)) = \\ \underset{\varphi \text{ homogen}}{=} \lambda \cdot \varphi(\psi(v)) = \lambda \cdot (\varphi \circ \psi)(v);$$

  damit ist $\varphi \circ \psi$ homogen.

Folglich ist $\varphi \circ \psi$ eine lineare Abbildung.

b) Die Aussagen i) und iv) sind für beliebige (nicht notwendigerweise lineare) Abbildungen wahr:

i) Sei $\varphi \circ \psi$ injektiv. Für alle $v_1, v_2 \in V$ mit $\psi(v_1) = \psi(v_2)$ gilt

$$(\varphi \circ \psi)(v_1) = \varphi(\psi(v_1)) = \varphi(\psi(v_2)) = (\varphi \circ \psi)(v_2),$$

woraus wegen der Injektivität von $\varphi \circ \psi$ schon $v_1 = v_2$ folgt; demnach ist ψ injektiv.

iv) Sei $\varphi \circ \psi$ surjektiv. Für jedes $u \in U$ gibt es wegen der Surjektivität von $\varphi \circ \psi$ ein $v \in V$ mit $(\varphi \circ \psi)(v) = u$, und für $w = \psi(v) \in W$ gilt

$$\varphi(w) = \varphi(\psi(v)) = (\varphi \circ \psi)(v) = u;$$

demnach ist φ surjektiv.

Die Aussagen ii) und iii) sind für beliebige wie auch für lineare Abbildungen falsch; wir geben hierfür ein gemeinsames Gegenbeispiel an. Für die linearen Abbildungen

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(x) = A \cdot x, \qquad \text{und} \qquad \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \psi(x) = B \cdot x,$$

mit den Abbildungsmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

ergibt sich

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x)) = A \cdot (B \cdot x) = (A \cdot B) \cdot x = E_2 \cdot x = x$$

für alle $x \in \mathbb{R}^2$, also $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Damit ist $\varphi \circ \psi$ insbesondere bijektiv, also injektiv wie surjektiv; aber φ ist wegen $e_3 \in \mathrm{Kern}(\varphi)$ nicht injektiv, und ψ ist wegen $e_3 \notin \mathrm{Bild}(\psi)$ nicht surjektiv.

5.45 Für einen $\mathbb{R}$–Vektorraum V mit der Basis $v_1,\ v_2$ ist in Abhängigkeit von $a,\ b \in \mathbb{R}$ der Endomorphismus $\varphi : V \to V$ mit

$$\begin{array}{rcrcr} \varphi(v_1) & = & a\,v_1 & + & b\,v_2 \\ \varphi(v_2) & = & -b\,v_1 & + & a\,v_2 \end{array}$$

zu betrachten; damit ist

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

die darstellende Matrix von φ bezüglich der Basis $v_1,\ v_2$ von V.

a) Bezüglich der Basis $v_1,\ v_2$ von V besitzt zum einen der Endomorphismus $\mathrm{id}_V : V \to V,\ \mathrm{id}_V(v) = v$, die darstellende Matrix

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

und zum anderen der Endomorphismus $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi : V \to V$, die darstellende Matrix

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -2\,a\,b \\ 2\,a\,b & a^2 - b^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Wegen

$$2\,a \cdot M = 2\,a \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,a^2 & -2\,a\,b \\ 2\,a\,b & 2\,a^2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -2\,a\,b \\ 2\,a\,b & a^2 - b^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = M^2 + (a^2 + b^2) \cdot E_2$$

ist

$$M^2 = -(a^2 + b^2) \cdot E_2 + 2\,a \cdot M,$$

also

$$\varphi^2 = -(a^2 + b^2) \cdot \mathrm{id}_V + 2\,a \cdot \varphi,$$

und damit sind $\mathrm{id}_V,\ \varphi,\ \varphi^2$ als Endomorphismen von V linear abhängig.

b) Der Endomorphismus $\varphi : V \to V$ ist genau invertierbar, wenn seine darstellende Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertierbar ist; dies gilt genau dann, wenn ihre Determinante $\det(M) \neq 0$ ist. Wir erhalten somit

$$\varphi \text{ ist invertierbar} \iff \det(M) \neq 0 \iff \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \neq 0 \iff a^2 + b^2 \neq 0.$$

c) Im Falle $a^2 + b^2 = 1$ ist der Endomorphismus $\varphi : V \to V$ gemäß b) invertierbar, und der inverse Endomorphismus $\varphi^{-1} : V \to V$ besitzt bezüglich der Basis v_1, v_2 von V die darstellende Matrix

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \underset{a^2+b^2=1}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2};$$

damit erhalten wir für die Vektoren $\varphi^{-1}(v_1)$, $\varphi^{-1}(v_2) \in V$ die Darstellung

$$\varphi^{-1}(v_1) = a\, v_1 - b\, v_2 \qquad \text{und} \qquad \varphi^{-1}(v_2) = b\, v_1 + a\, v_2$$

als Linearkombinationen der Basisvektoren v_1, v_2 von V.

5.46 a) Die Aussage ist falsch: für jede $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(1) = 2$ gilt aufgrund ihrer Homogenität

$$f(r) = f(r \cdot 1) = r \cdot f(1) = r \cdot 2 = 2\,r$$

für alle $r \in \mathbb{R}$; damit gibt es nur eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(1) = 2$, nämlich $f(x) = 2\,x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Die Aussage ist falsch: die drei Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

sind zwar paarweise linear unabhängig, da sie keine skalaren Vielfachen voneinander sind; sie sind aber wegen $v_3 = v_1 + v_2$ linear abhängig.

c) Die Aussage ist falsch: für jede $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gilt

$$\operatorname{Bild}(f) \subseteq \mathbb{R}^2, \qquad \text{also} \qquad \dim \operatorname{Bild}(f) \leq \dim \mathbb{R}^2 = 2,$$

woraus sich mit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen

$$\dim \operatorname{Kern}(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Bild}(f) \geq 3 - 2 = 1$$

ergibt; folglich ist $\operatorname{Kern}(f) \neq \{0\}$ und damit die lineare Abbildung f nicht injektiv.