LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN | MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Erwin Schörner

# Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Lineare Algebra und analytische Geometrie 4 — Lösungsvorschlag —

4.1 Der Nachweis, daß die beiden Unterräume $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ und $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ mit

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$ übereinstimmen, kann auf verschiedene Weise erbracht werden:

- Algebraisch gesehen ist $U$ bzw. $V$ die Menge der Linearkombinationen von $u_1$ und $u_2$ bzw. von $v_1$ und $v_2$, was jedoch dem Spaltenraum der Matrix $A_U = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ bzw. $A_V = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ entspricht. Wegen

$$(A_U \mid b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & b_1 \\ 2 & 2 & b_2 \\ 3 & 1 & b_3 \end{array}\right) \underset{\text{III}-3\text{I}}{\overset{\text{II}-2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -4 & b_2 - 2\,b_1 \\ 0 & -8 & b_3 - 3\,b_1 \end{array}\right) \underset{\text{III}-2\text{II}}{\rightsquigarrow}$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -4 & b_2 - 2\,b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - 2\,b_2 + b_1 \end{array}\right)$$

für alle $b \in \mathbb{R}^3$ ist also

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid b_1 - 2\,b_2 + b_3 = 0 \right\},$$

und wegen

$$(A_V \mid b) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & b_1 \\ 5 & 5 & b_2 \\ 6 & 4 & b_3 \end{array}\right) \underset{\text{III}\cdot 2}{\overset{\text{II}\cdot 4}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & b_1 \\ 20 & 20 & 4\,b_2 \\ 12 & 8 & 2\,b_3 \end{array}\right) \underset{\text{III}-3\text{I}}{\overset{\text{II}-5\text{I}}{\rightsquigarrow}}$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & b_1 \\ 0 & -10 & 4\,b_2 - 5\,b_1 \\ 0 & -10 & 2\,b_3 - 3\,b_1 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & b_1 \\ 0 & -10 & 4\,b_2 - 5\,b_1 \\ 0 & 0 & 2\,b_3 - 4\,b_2 + 2\,b_1 \end{array}\right)$$

für alle $b \in \mathbb{R}^3$ ist also

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid b_1 - 2\,b_2 + b_3 = 0 \right\};$$

folglich stimmen $U$ und $V$ überein.

- Geometrisch gesehen ist $U$ bzw. $V$ die von den beiden (offensichtlich linear unabhängigen) Vektoren $u_1$ und $u_2$ bzw. von $v_1$ und $v_2$ aufgespannte Ursprungsebene in $\mathbb{R}^3$. Wegen

$$u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = (-4) \cdot \widetilde{u} \qquad \text{mit} \qquad \widetilde{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

besitzt $U$ den Normalenvektor $\widetilde{u}$ und damit die Gleichung

$$\widetilde{u} \circ x = 0, \qquad \text{also} \qquad x_1 - 2\,x_2 + x_3 = 0,$$

und wegen

$$v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \\ -10 \end{pmatrix} = (-10) \cdot \widetilde{v} \qquad \text{mit} \qquad \widetilde{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

besitzt $V$ den Normalenvektor $\widetilde{v}$ und damit die Gleichung

$$\widetilde{v} \circ x = 0, \qquad \text{also} \qquad x_1 - 2\,x_2 + x_3 = 0;$$

folglich stimmen $U$ und $V$ überein.

4.2 Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ liegt genau dann im Durchschnitt $U \cap V$ der beiden Unterräume $U = \operatorname{span}\{u_1, u_2\}$ und $V = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$ mit

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wenn er sowohl Linearkombination von $u_1$, $u_2$ als auch Linearkombination von $v_1$, $v_2$ ist, wenn es also Koeffizienten $\lambda_1$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\mu_1$, $\mu_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2}_{x \in U} = x = \underbrace{\mu_1 \cdot v_1 + \mu_2 \cdot v_2}_{x \in V}$$

gibt; dies führt aber zur Beziehung

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \mu_1 \cdot (-v_1) + \mu_2 \cdot (-v_2) = 0,$$

also zum linearen Gleichungssystem

$$A \cdot x = 0 \qquad \text{mit} \qquad A = (u_1, u_2, -v_1, -v_2) \in \mathbb{R}^{3 \times 4}.$$

Wegen

$$(A|0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}-3\text{I}}{\overset{\text{II}-2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{II}\cdot(-1)}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}+2\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

erhält man die Lösungen

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5}{3}\,\alpha\\ 0\\ \frac{2}{3}\,\alpha\\ \alpha\end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$, woraus sich

$$\underbrace{\frac{5}{3}\,\alpha \cdot u_1 + 0 \cdot u_2}_{x\in U} = x = \underbrace{\frac{2}{3}\,\alpha \cdot v_1 + \alpha \cdot v_2}_{x\in W}, \qquad \text{also} \qquad x = \frac{5}{3}\,\alpha \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},$$

ergibt. Damit ist

$$U \cap V = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},$$

weswegen der Vektor $u_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ eine Basis von $U \cap V$ bildet.

4.3 Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ liegt genau dann im Durchschnitt $U \cap V$ der beiden Unterräume $U = \langle u_1, u_2\rangle$ und $V = \langle v_1, v_2\rangle$ mit

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},$$

wenn er sowohl Linearkombination von $u_1$, $u_2$ als auch Linearkombination von $v_1$, $v_2$ ist, wenn es also Koeffizienten $\lambda_1$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\mu_1$, $\mu_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2}_{x\in U} = x = \underbrace{\mu_1 \cdot v_1 + \mu_2 \cdot v_2}_{x\in V}$$

gibt; dies führt aber zur Beziehung

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \mu_1 \cdot (-v_1) + \mu_2 \cdot (-v_2) = 0,$$

also zum linearen Gleichungssystem

$$A \cdot x = 0 \qquad \text{mit} \qquad A = (u_1, u_2, -v_1, -v_2) \in \mathbb{R}^{3\times 4}.$$

Wegen

$$(A|0) = \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & -2 & 1 & 0\end{array}\right) \underset{\text{III}-3\text{I}}{\overset{\text{II}-2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -3 & 1 & 4 & 0\end{array}\right) \underset{\text{II}\cdot(-1)}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0\\ 0 & -3 & 1 & 4 & 0\end{array}\right) \underset{\text{III}+3\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0\end{array}\right)$$

erhält man die Lösungen

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$, woraus sich

$$\underbrace{(-\alpha) \cdot u_1 + \alpha \cdot u_2}_{x \in U} = x = \underbrace{(-\alpha) \cdot v_1 + \alpha \cdot v_2}_{x \in V}, \qquad \text{also} \qquad x = (-\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

ergibt. Damit ist $U \cap V = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, weswegen etwa der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine Basis von $U \cap V$ bildet.

4.4 Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $B \cdot x = v$ mit

$$B = (v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Wegen

$$(B|v) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{III}-3\text{I, IV}-4\text{I}}{\overset{\text{II}-2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -7 & -1 & -3 & -11 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-7\text{II}}{\overset{\text{III}-2\text{II}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -4 \end{array}\right) \underset{\text{III} \leftrightarrow \frac{1}{4}\text{IV}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ist das lineare Gleichungssystem $B \cdot x = v$ lösbar, also der Vektor $v$ eine Linearkombination der Spalten $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ der Matrix $B$; genauer erhält man etwa mit der Lösung

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

die Linearkombination

$$v = (-1) \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + 1 \cdot v_4 \in \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = V.$$

Der Spaltenraum $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ der Matrix $B = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ besitzt ferner die Dimension

$$\dim V = \operatorname{Rang} B = 3.$$

4.5 a) Es ist $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ der kleinste Unterraum von $\mathbb{R}^4$, der die vier Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

enthält; wir weisen nach, daß $U \subsetneq \mathbb{R}^4$ ein echter Unterraum von $\mathbb{R}^4$ ist. Sei dazu $A = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Wegen

$$(A|0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{I}+\text{II}}{\underset{\text{IV}-\text{II}}{\rightsquigarrow}}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{I}+4\text{III},\ \text{II}+\text{III}}{\underset{\text{IV}-3\text{III}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -\lambda \\ -\lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$; damit sind

$$(-\lambda) \cdot v_1 + (-\lambda) \cdot v_2 + \lambda \cdot v_3 + \lambda \cdot v_4 = 0$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$ alle Darstellungen des Nullvektors 0 als Linearkombination von $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$. Etwa für $\lambda = 1$ erhalten wir

$$-v_1 - v_2 + v_3 + v_4 = 0, \qquad \text{also} \qquad v_4 = v_1 + v_2 - v_3,$$

weswegen $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ bereits durch die drei Vektoren $v_1$, $v_2$, $v_3$ erzeugt wird; damit ist $\dim(U) \leq 3$, insbesondere also $U \subsetneq \mathbb{R}^4$. Genauer ergibt sich mit Hilfe der Matrix $A' = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ wegen

$$(A'|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $v_1$, $v_2$, $v_3$; damit bilden diese bereits eine Basis von $U$, und es ist $\dim(U) = 3$.

b) Ein Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ liegt genau dann im Unterraum $U$, wenn er Linearkombination der Vektoren $v_1$, $v_2$, $v_3$ ist, also das lineare Gleichungssystem $A' \cdot x = b$

lösbar ist. Wegen

$$(A'|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & b_2 \\ 1 & 1 & 2 & b_3 \\ 0 & -1 & -2 & b_4 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & -1 & b_3 - b_1 \\ 0 & -1 & -2 & b_4 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-\text{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & -1 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & -3 & b_4 - b_2 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-3\text{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & -1 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 - b_2 - 3\,(b_3 - b_1) \end{array}\right)$$

ist

$$U = \left\{ b \in \mathbb{R}^4 \mid 3\,b_1 - b_2 - 3\,b_3 + b_4 = 0 \right\}.$$

4.6 a) Der von den in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ gegebenen Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

erzeugte Untervektorraum $U_a = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ stimmt mit dem Spaltenraum der Matrix $A_a = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^{5\times 4}$ überein; da es dabei auf die Reihenfolge der Vektoren nicht ankommt, können wir den parameterabhängigen Vektor an die letzte Position setzen. Wegen

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & a \end{pmatrix} \overset{\text{II}+\text{I}}{\underset{\text{V}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & a-1 \end{pmatrix} \overset{\text{II}\leftrightarrow\text{IV}}{\underset{\text{III}\leftrightarrow\text{V}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & a-1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{IV}-2\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & a-1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{3}\cdot\text{III}\leftrightarrow\text{IV}}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{IV}+\text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$\dim(U_a) = \operatorname{Rang}(A_a) = \begin{cases} 3, & \text{für } a = 0, \\ 4, & \text{für } a \neq 0; \end{cases}$$

genauer gilt:

- für $a = 0$ sind $v_1$, $v_2$, $v_3$ linear unabhängig, und wegen $\dim(U_0) = 3$ bilden $v_1$, $v_2$, $v_3$ eine Basis von $U_0$.
- für $a \neq 0$ sind $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ linear unabhängig, und wegen $\dim(U_a) = 4$ bilden $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ eine Basis von $U_a$.

b) Für $a \neq 0$ sind die Vektoren $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ gemäß a) linear unabhängig und können nach dem Basisergänzungssatz durch jeden Vektor $v_5 \in \mathbb{R}^5$ mit $v_5 \notin U_a$ zu einer Basis $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$, $v_5$ von $\mathbb{R}^5$ ergänzt werden. Da der dritte Eintrag von $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ stets Null ist, wählen wir für $v_5 = e_3$; die Matrix $B = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ ist wegen

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & a & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{5. Spalte}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} (-1)^{3+5} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & a \end{vmatrix} \underset{\text{IV}-\text{I}}{\overset{\text{II}+\text{I}}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & a-1 \end{vmatrix} \underset{\text{1. Spalte}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & a-1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=}$$

$$= \big(0 + 0 + (-1)\big) - \big(0 + 2 + 3\,(a-1)\big) = -3\,a \neq 0$$

invertierbar, also bilden ihre Spalten $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$, $v_5$ eine Basis von $\mathbb{R}^5$. Damit ergibt sich:

- Für $a = 0$ können wir die Basis $v_1$, $v_2$, $v_3$ von $U_0$ aus a) durch $v_4$ (mit $a \neq 0$) und $v_5$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$ ergänzen.
- Für $a \neq 0$ können die Basis $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ von $U_a$ aus a) durch $v_5$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$ ergänzen.

4.7 a) Für die Hilfsmatrix $A_1 = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ gilt

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{2}\cdot\text{II}}{\overset{\text{III}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{I},\ \text{IV}-\text{II}}{\overset{\text{I}+\text{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

damit sind $u_1$, $u_2$ linear unabhängig mit $u_3 = 2 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2$. Folglich ist $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$, und $u_1$, $u_2$ ist eine Basis von $U$. Ferner ist $W$ der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \underset{\text{I}\leftrightarrow\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \underset{\text{I}+2\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix};$$

über die beiden freien Variablen $x_3$ und $x_4$ ergibt sich für $W$ die Basis

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^4$ gilt

$$\begin{aligned} v \in U \cap W \quad &\Longleftrightarrow \quad v \in U \ \text{ und } \ v \in W \\ &\Longleftrightarrow \quad v \in \langle u_1, u_2 \rangle \ \text{ und } \ A_2 \cdot v = 0; \end{aligned}$$

für $v \in \langle u_1, u_2 \rangle$ gibt es $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$v = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 \\ 2\,\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix},$$

und wegen

$$A_2 \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 \\ 2\,\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\,\lambda_2 - \lambda_1 \\ \lambda_1 - 9\,\lambda_2 \end{pmatrix}$$

gilt

$$A_2 \cdot v = 0 \iff \lambda_1 = 9\,\lambda_2,$$

insgesamt also

$$v = \begin{pmatrix} 9\,\lambda_2 - \lambda_2 \\ 2\,\lambda_2 \\ 9\,\lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 \cdot v_0 \qquad \text{mit} \qquad v_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist $U \cap W = \mathbb{R} \cdot v_0$, und wegen $v_0 \neq 0$ ist $v_0$ eine Basis von $U \cap W$, also $\dim(U \cap W) = 1$; gemäß a) ist ferner $\dim U = 2$ und $\dim W = 2$, so daß sich mit Hilfe der Dimensionsformel für Unterräume dann

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$$

ergibt.

c) Es ist $w_1 \notin U \cap W$, woraus wegen $w_1 \in W$ schon $w_1 \notin U = \langle u_1, u_2 \rangle$ folgt; damit sind aber $u_1$, $u_2$, $w_1$ drei linear unabhängige Vektoren in $U + W$, wegen $\dim(U + W) = 3$ also schon eine Basis von $U + W$.

4.8 Wir verwenden das Unterraumkriterium, wonach eine Teilmenge $U$ eines Vektorraums $V$ genau dann ein Untervektorraum (linearer Unterraum) von $V$ ist, wenn die folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

- Es ist $U \neq \emptyset$; insbesondere muß $0_V \in U$ gelten.
- Für alle $u,\ w \in U$ gilt $u + w \in U$.
- Für alle $u \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda \cdot u \in U$.

Für die gegebenen Teilmengen im Vektorraum $V$ der reellen Polynome gilt:

- Die Teilmenge

$$U_1 = \big\{ P \in V \mid P(x) = a\,x^2 + b\,x + c \ \text{ mit } \ a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \big\}$$

aller reellen Polynome $P$ mit $\operatorname{Grad}(P) \leq 2$ enthält das Nullpolynom

$$P_0 \equiv 0, \qquad \text{also} \qquad P_0(x) = a\,x^2 + b\,x + c \quad \text{mit} \quad a = b = c = 0;$$

ferner gilt für alle $P$ und $Q \in U_1$ mit

$$P(x) = a\,x^2 + b\,x + c \qquad \text{und} \qquad Q(x) = a'\,x^2 + b'\,x + c'$$

mit $a,\, b,\, c \in \mathbb{R}$ und $a',\, b',\, c' \in \mathbb{R}$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ zum einen

$$\begin{aligned} (P+Q)(x) &= P(x) + Q(x) \\ &= \big(a\,x^2 + b\,x + c\big) + \big(a'\,x^2 + b'\,x + c'\big) \\ &= \big(a\,x^2 + a'\,x^2\big) + (b\,x + b'\,x) + (c + c') \\ &= (a + a')\,x^2 + (b + b')\,x + (c + c') \end{aligned}$$

mit $a + a',\, b + b',\, c + c' \in \mathbb{R}$, also $P + Q \in U_1$, und zum anderen

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot P)(x) &= \lambda \cdot P(x) \\ &= \lambda \cdot \big(a\,x^2 + b\,x + c\big) \\ &= \lambda \cdot \big(a\,x^2\big) + \lambda \cdot (b\,x) + \lambda \cdot c \\ &= (\lambda \cdot a)\,x^2 + (\lambda \cdot b)\,x + (\lambda \cdot c) \end{aligned}$$

mit $\lambda \cdot a,\, \lambda \cdot b,\, \lambda \cdot c \in \mathbb{R}$, also $\lambda \cdot P \in U_1$. Damit ist $U_1$ ein Unterraum von $V$.

- Die Teilmenge

$$U_2 = \big\{ P \in V \mid P(x) = a\,x^2 + b\,x \ \text{ mit } \ a,\, b \in \mathbb{R} \big\}$$

aller reellen Polynome $P$ mit $\operatorname{Grad}(P) \leq 2$ und konstantem Glied $c = 0$ enthält das Nullpolynom

$$P_0 \equiv 0, \qquad \text{also} \qquad P_0(x) = a\,x^2 + b\,x \quad \text{mit} \quad a = b = 0;$$

ferner gilt für alle $P$ und $Q \in U_2$ mit

$$P(x) = a\,x^2 + b\,x \qquad \text{und} \qquad Q(x) = a'\,x^2 + b'\,x$$

mit $a,\, b \in \mathbb{R}$ und $a',\, b' \in \mathbb{R}$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ zum einen

$$\begin{aligned} (P+Q)(x) &= P(x) + Q(x) \\ &= \big(a\,x^2 + b\,x\big) + \big(a'\,x^2 + b'\,x\big) \\ &= \big(a\,x^2 + a'\,x^2\big) + (b\,x + b'\,x) \\ &= (a + a')\,x^2 + (b + b')\,x \end{aligned}$$

mit $a + a',\, b + b' \in \mathbb{R}$, also $P + Q \in U_2$, und zum anderen

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot P)(x) &= \lambda \cdot P(x) \\ &= \lambda \cdot \big(a\,x^2 + b\,x\big) \\ &= \lambda \cdot \big(a\,x^2\big) + \lambda \cdot (b\,x) \\ &= (\lambda \cdot a)\,x^2 + (\lambda \cdot b)\,x \end{aligned}$$

mit $\lambda \cdot a,\, \lambda \cdot b \in \mathbb{R}$, also $\lambda \cdot P \in U_2$. Damit ist $U_2$ ein Unterraum von $V$.

- Die Teilmenge

$$U_3 = \{P \in V \mid P(x) \equiv 0 \;\text{ oder }\; \mathrm{Grad}(P) \geq 2\}$$

enthält neben dem Nullpolynom $P_0 \equiv 0$ alle reellen Polynome $P$ vom $\mathrm{Grad}(P) \geq 2$, insbesondere also auch die beiden Polynome $P_1$ und $P_2$ mit

$$P_1(x) = -x^2 + x \qquad \text{und} \qquad P_2(x) = x^2 + 1,$$

wegen

$$(P_1 + P_2)(x) = P_1(x) + P_2(x) = \left(-x^2 + x\right) + \left(x^2 + 1\right) = x + 1$$

mit $\mathrm{Grad}(P_1 + P_2) = 1$ aber nicht deren Summe $P_1 + P_2$. Damit ist $U_3$ kein Unterraum von $V$.

- Die Teilmenge

$$U_4 = \left\{P \in V \mid P(x) = a\,x^2 + b\,x + c \;\text{ mit }\; a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \;\text{ und }\; c \neq 0\right\}$$

aller reellen Polynome $P$ mit $\mathrm{Grad}(P) \leq 2$ und konstantem Glied $c \neq 0$ enthält insbesondere nicht das Nullpolynom $P_0$ mit $P_0 \equiv 0$. Damit ist $U_4$ kein Unterraum von $V$.

4.9 a) Für ein Polynom $p \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ vom $\mathrm{Grad}(p) \leq 2$ ist

$$p(X) = a_0 + a_1\,X + a_2\,X^2 \qquad \text{mit} \qquad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

und damit

$$\begin{aligned}
p(1 - X) &= a_0 + a_1\,(1 - X) + a_2\,(1 - X)^2 \\
&= a_0 + a_1\,(1 - X) + a_2\left(1 - 2\,X + X^2\right) \\
&= a_0 + (a_1 - a_1\,X) + \left(a_2 - 2a_2\,X + a_2\,X^2\right) \\
&= (a_0 + a_1 + a_2) + (-a_1 - 2a_2)\,X + a_2\,X^2;
\end{aligned}$$

damit ergibt sich durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned}
&p \in U \iff p(X) = p(1 - X) \iff \\
&\quad a_0 + a_1\,X + a_2\,X^2 = (a_0 + a_1 + a_2) + (-a_1 - 2a_2)\,X + a_2\,X^2 \\
&\qquad \iff a_0 = a_0 + a_1 + a_2 \;\text{ und }\; a_1 = -a_1 - 2a_2 \iff a_2 = -a_1.
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
U &= \left\{a_0 + a_1\,X + a_2\,X^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \;\text{ mit }\; a_2 = -a_1\right\} \\
&= \left\{a_0 + a_1\,X + (-a_1)\,X^2 \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot \left(X - X^2\right) \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \langle 1,\, X - X^2\rangle
\end{aligned}$$

der von den beiden Polynomen 1 und $X - X^2$ erzeugte Unterraum in $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$; da aber 1 und $X - X^2$ keine skalaren Vielfachen voneinander sind, sind sie zudem linear unabhängig, insgesamt also eine Basis von $U$.

b) Es ist $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) = 3$, und wir können die beiden linear unabhängigen Polynome $1$ und $X - X^2$ durch jedes $p \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ mit $p \notin U$ zu einer Basis von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ ergänzen; gemäß der in a) ermittelten Charakterisierung der Elemente von $U$ ist etwa $1$, $X - X^2$, $X$ oder $1$, $X - X^2$, $X^2$ eine Basis von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$.

4.10 Im reellen Vektorraum

$$\begin{aligned} P_3 &= \{p \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Grad}(p) \leq 3\} \\ &= \left\{a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \mid a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

aller Polynome $p \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{Grad}(p) \leq 3$ ist die Teilmenge

$$U = \{p \in P_3 \mid p(1) = 0\}$$

zu betrachten.

a) Der Nachweis, daß $U$ ein Untervektorraum von $P_3$ ist, erfolgt über das Unterraumkriterium:

- Für das Nullpolynom $p_0 \in P_3$ gilt $p_0(1) = 0$; damit ist $p_0 \in U$, also $U \neq \emptyset$.
- Für alle $p$, $q \in P_3$ gilt $p(1) = 0$ und $q(1) = 0$; damit ist $p + q \in P_3$ mit

  $$(p + q)(1) = p(1) + q(1) = 0 + 0 = 0,$$

  also $p + q \in U$.
- Für alle $p \in P_3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $p(1) = 0$; damit ist $\lambda \cdot p \in P_3$ mit

  $$(\lambda \cdot p)(1) = \lambda \cdot p(1) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

  also $\lambda \cdot p \in U$.

b) Für alle $p = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in P_3$ mit $a_3$, $a_2$, $a_1$, $a_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} p \in U &\iff p(1) = 0 \iff a_3 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1 + a_0 = 0 \\ &\iff a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0 \iff a_0 = -\left(a_3 + a_2 + a_1\right) \\ &\iff p = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X - (a_3 + a_2 + a_1) \\ &\iff p = a_1(X - 1) + a_2(X^2 - 1) + a_3(X^3 - 1); \end{aligned}$$

damit ist $U$ genau die Menge der Linearkombinationen von $X - 1$, $X^2 - 1$ und $X^3 - 1$, so daß diese Polynome ein Erzeugendensystem von $U$ bilden. Zum Nachweis ihrer linearen Unabhängigkeit seien $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1(X - 1) + \lambda_2(X^2 - 1) + \lambda_3(X^3 - 1) = 0;$$

damit gilt

$$\lambda_3X^3 + \lambda_2X^2 + \lambda_1X - (\lambda_3 + \lambda_2 + \lambda_1) = 0,$$

und der Koeffizientenvergleich liefert $\lambda_3 = 0$ (bei $X^3$), $\lambda_2 = 0$ (bei $X^2$) und $\lambda_1 = 0$ (bei $X$). Folglich ist $X - 1$, $X^2 - 1$, $X^3 - 1$ eine Basis von $U$.

c) Der durch die Basis $\mathcal{B}$ aus b) gegebene Vektorraumisomorphismus ist

$$\varphi_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^3 \to U, \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mapsto a_1(X-1) + a_2(X^2-1) + a_3(X^3-1),$$

also mit

$$\varphi_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X - (a_3 + a_2 + a_1)\,.$$

4.11 Es ist $V = \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$. Für ein Polynom $p = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ betrachte man den Koordinatenvektor $q(p) = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ bezüglich der Standardbasis $X^3$, $X^2$, $X$, $1$ von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$; für die gegebenen Vektoren

$$p_1 = X^3 - X^2, \quad p_2 = X^3 - X, \quad p_3 = X^2 - X \quad \text{und} \quad p_4 = X^3 - 1$$

ergibt sich also

$$q(p_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ q(p_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ q(p_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \ \text{und}\ \ q(p_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Sei $p \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ mit dem Koordinatenvektor $q(p) \in \mathbb{R}^4$; mit der Hilfsmatrix $A = (q(p_1), q(p_2), q(p_3), q(p_4)) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ erhält man

$$\begin{aligned}
(A \mid q(p)) \quad &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & a_3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_0 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{II+I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & a_2 + a_3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_0 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{III+II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_1 + a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_0 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{IV+III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_1 + a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \end{array}\right),
\end{aligned}$$

und es ist

$$p(1) = a_3 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 = a_3 + a_2 + a_1 + a_0.$$

Folglich ergibt sich:

$$\begin{aligned}
p \in U \quad &\iff \quad p \in \langle p_1, p_2, p_3, p_4 \rangle \\
&\iff \quad q(p) \in \langle q(p_1), q(p_2), q(p_3), q(p_4) \rangle \\
&\iff \quad \text{Das lineare Gleichungssystem } (A \mid q(p)) \text{ ist lösbar.} \\
&\iff \quad a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \iff p(1) = 0
\end{aligned}$$

Damit ist $U$ die Menge aller Polynome $p \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ mit Nullstelle 1.

b) Gemäß der Rechnung von a) ist

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{I}-\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit Pivots in der ersten, zweiten und vierten Spalte; damit sind aber $q(p_1)$, $q(p_2)$, $q(p_4)$ linear unabhängig mit $q(p_3) = -q(p_1) + q(p_2)$. Folglich sind auch $p_1$, $p_2$, $p_4$ linear unabhängig mit $p_3 = -p_1 + p_2$, mithin eine Basis von $U = \langle p_1, p_2, p_3, p_4 \rangle$.

Wegen $\dim \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) = 4$ lassen sich die drei Basisvektoren $p_1$, $p_2$, $p_4$ von $U$ durch jeden Vektor $p \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ mit $p \notin U$, also $p(1) \neq 0$ gemäß a), zu einer Basis $p_1$, $p_2$, $p_4$, $p$ von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ ergänzen; wir können etwa $p = X^3$ wählen.

4.12 Wir betrachten den $\mathbb{R}$–Vektorraum $V_0$ aller Polynome mit reellen Koeffizienten vom Höchstgrad 3; für einen Vektor

$$v = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in V_0 \qquad \text{sei} \qquad p(v) = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

sein Koordinatenvektor bezüglich der Standardbasis $X^3$, $X^2$, $X$, 1. Damit ergibt sich für das Erzeugendensystem $u_1$, $u_2$, $u_3$ von $U$ dann

$$p(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(u_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie für das Erzeugendensystem $w_1$, $w_2$ von $W$ dann

$$p(w_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(w_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für $v \in V_0$ gilt damit

$$\begin{aligned}
v \in U \cap W \quad &\iff \quad v \in \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \ \text{ und } \ v \in \langle w_1, w_2 \rangle \\
&\iff \quad p(v) \in \langle p(u_1), p(u_2), p(u_3) \rangle \ \text{ und } \ p(v) \in \langle p(w_1), p(w_2) \rangle \\
&\iff \quad \alpha_1 p(u_1) + \alpha_2 p(u_2) + \alpha_3 p(u_3) = p(v) = \beta_1 p(w_1) + \beta_2 p(w_2)
\end{aligned}$$

mit geeigneten Koeffizienten $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\beta_1$, $\beta_2 \in \mathbb{R}$. Dies führt über

$$\alpha_1 p(u_1) + \alpha_2 p(u_2) + \alpha_3 p(u_3) + \beta_1(-p(w_1)) + \beta_2(-p(w_2)) = 0$$

auf das homogene lineare Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix

$$(p(u_1), p(u_2), p(u_3), -p(w_1), -p(w_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{I}}{\leadsto}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{II}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}-\text{III}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

und damit den Lösungen

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Folglich ist

$$v \in U \cap W \iff v = \lambda w_1 + \lambda w_2 = \lambda \left(X^3 + 1\right) \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

damit ist $U \cap W = \mathbb{R} \cdot (X^3 + 1)$, also $X^3 + 1$ eine Basis von $U \cap W$.

4.13 a) Wir weisen anhand des Unterraumkriteriums nach, daß die Teilmenge

$$U = \left\{ A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A^\top = A \ \text{ und } \ \mathrm{Spur}(A) = 0 \right\}$$

ein Unterraum des $\mathbb{R}$–Vektorraums $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ist:

- Wegen $0^\top = 0$ und $\mathrm{Spur}(0) = 0$ ist $0 \in U$.
- Für alle $A$, $B \in U$ gilt $A^\top = A$ und $\mathrm{Spur}(A) = 0$ sowie $B^\top = B$ und $\mathrm{Spur}(B) = 0$. Dann gilt $(A+B)^\top = A^\top + B^\top = A + B$ und $\mathrm{Spur}(A+B) = \mathrm{Spur}(A) + \mathrm{Spur}(B) = 0 + 0 = 0$, also ist $A + B \in U$.
- Für alle $A \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $A^\top = A$ und $\mathrm{Spur}(A) = 0$; damit gilt $(\lambda \cdot A)^\top = \lambda \cdot A^\top = \lambda \cdot A$ und $\mathrm{Spur}(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \mathrm{Spur}(A) = \lambda \cdot 0 = 0$, also ist $\lambda \cdot A \in U$.

Insgesamt ist damit $U$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

b) Für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt

$$\begin{aligned} A \in U \quad &\iff \quad A = A^\top \quad \text{und} \quad \mathrm{Spur}(A) = 0 \\ &\iff \quad a_{12} = a_{21},\ a_{13} = a_{31},\ a_{23} = a_{32} \quad \text{und} \quad a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0. \end{aligned}$$

Damit besteht $U$ genau aus den Matrizen $A$ der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & -a_{11}-a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=B_1} + a_{12} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=B_2} +$$

$$+ a_{13} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=B_3} + a_{22} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=B_4} + a_{23} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=B_5};$$

damit bilden $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$ aber ein Erzeugendensystem von $U$. Für alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \cdot B_1 + \lambda_2 \cdot B_2 + \lambda_3 \cdot B_3 + \lambda_4 \cdot B_4 + \lambda_5 \cdot B_5 = 0$ gilt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \lambda_3 & \lambda_5 & -\lambda_1-\lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$. Damit sind $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$ linear unabhängig, insgesamt also eine Basis von $U$. Folglich ist $\dim(U) = 5$.

c) Es ist $A_1 = B_1 - B_4 \in U$ und $A_2 = -B_2 + B_3 \in U$; für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2 = 0$ gilt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & -\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, damit sind $A_1$ und $A_2$ linear unabhängig. Wir zeigen nun, daß die Vektoren $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $B_5$ linear unabhängig sind, und damit wegen $\dim(U) = 5$ schon eine Basis von $U$ sind. Für alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2 + \lambda_3 \cdot B_1 + \lambda_4 \cdot B_2 + \lambda_5 \cdot B_5 = 0$ gilt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1+\lambda_3 & -\lambda_2+\lambda_4 & \lambda_2 \\ -\lambda_2+\lambda_4 & -\lambda_1 & \lambda_5 \\ \lambda_2 & \lambda_5 & -\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\lambda_1 + \lambda_3 = -\lambda_2 + \lambda_4 = \lambda_2 = -\lambda_1 = \lambda_5 = -\lambda_3 = 0$, und folglich $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$. Damit sind $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $B_5$ Basis von $U$.

4.14 a) Die Dimensionsformel für Summe $W_1 + W_2$ und Durchschnitt $W_1 \cap W_2$ zweier Untervektorräume $W_1$ und $W_2$ eines reellen Vektorraums $V$ lautet

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2.$$

b) Für $V = \mathbb{R}^5$ und Untervektorräume $W_1$ und $W_2$ von $V$ der Dimensionen $\dim W_1 = 3$ und $\dim W_2 = 3$ gilt wegen $W_1 \cap W_2 \subseteq W_1$ zum einen

$$\dim(W_1 \cap W_2) \leq \dim W_1 = 3$$

sowie wegen $W_1 + W_2 \subseteq \mathbb{R}^5$ zum anderen

$$\dim(W_1 + W_2) \leq \dim \mathbb{R}^5 = 5,$$

so daß sich unter Verwendung der Dimensionsformel dann

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \underbrace{\dim W_1}_{=3} + \underbrace{\dim W_2}_{=3} - \underbrace{\dim(W_1 + W_2)}_{\leq 5} \geq 3 + 3 - 5 = 1$$

ergibt. Zusammenfassend erhalten wir also

$$\dim(W_1 \cap W_2) \in \{1,\ 2,\ 3\}$$

und haben diese drei möglichen Werte noch zu belegen:

- Für $W_1 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ und $W_2 = \langle e_3, e_4, e_5 \rangle$ ist $W_1 \cap W_2 = \langle e_3 \rangle$ und damit $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$.
- Für $W_1 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ und $W_2 = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle$ ist $W_1 \cap W_2 = \langle e_2, e_3 \rangle$ und damit $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$.
- Für $W_1 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ und $W_2 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ ist $W_1 \cap W_2 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ und damit $\dim(W_1 \cap W_2) = 3$.

4.15 Sei $V$ ein Vektorraum der Dimension $\dim(V) = 6$ sowie $U$ und $W$ Unterräume von $V$ der Dimensionen $\dim(U) = 3$ und $\dim(W) = 4$. Wegen $U \cap W \subseteq U$ gilt zunächst

$$\dim(U \cap W) \leq \dim(U) = 3;$$

wegen $U + W \subseteq V$ ist

$$\dim(U + W) \leq \dim(V) = 6,$$

und unter Verwendung der Dimensionsformel ergibt sich dann

$$\dim(U \cap W) = \underbrace{\dim(U)}_{=3} + \underbrace{\dim(W)}_{=4} - \underbrace{\dim(U + W)}_{\leq 6} \geq 3 + 4 - 6 = 1.$$

Zusammenfassend erhalten wir also

$$\dim(U \cap W) \in \{1,\ 2,\ 3\}$$

und haben noch nachzuweisen, daß diese drei Möglichkeiten auch tatsächlich eintreten. Sei dazu $b_1, \ldots, b_6$ eine Basis von $V$:

- Für $U = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ und $W = \langle b_3, b_4, b_5, b_6 \rangle$ ist $U \cap W = \langle b_3 \rangle$ und damit $\dim(U \cap W) = 1$.
- Für $U = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ und $W = \langle b_2, b_3, b_4, b_5 \rangle$ ist $U \cap W = \langle b_2, b_3 \rangle$ und damit $\dim(U \cap W) = 2$.
- Für $U = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ und $W = \langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle$ ist $U \cap W = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ und damit $\dim(U \cap W) = 3$.

4.16 Sei $U = \langle v, w \rangle$ der von den beiden Vektoren $v$ und $w$ erzeugte Unterraum von $V$; da $v$ und $w$ als linear unabhängig vorausgesetzt sind, bilden sie sogar eine Basis von $U$. Für die Vektoren

$$x = \alpha \cdot v + \beta \cdot w \qquad \text{und} \qquad y = \beta \cdot v + \alpha \cdot w \in U$$

betrachten wir nun ihre Koordinatenvektoren $p(x)$ und $p(y)$ bezüglich der Basis $v$ und $w$, es ist also

$$p(x) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad p(y) = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Damit sind die Vektoren $x$ und $y$ genau dann linear abhängig, wenn ihre Koordinatenvektoren $p(x)$ und $p(y)$ linear abhängig sind; dies ist genau dann der Fall, wenn die Matrix

$$A = (p(x),\ p(y)) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

nicht invertierbar ist, also $\det(A) = 0$ gilt. Wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)\,(\alpha + \beta)$$

sind die Vektoren $x$ und $y$ genau dann linear abhängig, wenn $\alpha - \beta = 0$, also $\alpha = \beta$, oder $\alpha + \beta = 0$, also $\alpha = -\beta$, gilt.

4.17 Für einen Vektor $v \in V$ betrachten wir seinen Koordinatenvektor $p(v) \in \mathbb{R}^4$ bezüglich der Basis $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ von $V$. Damit bilden die Vektoren

$$a_1 = b_1 + \beta_1 \cdot b_3, \quad a_2 = b_2 + \beta_2 \cdot b_4, \quad a_3 = \beta_3 \cdot b_1 + b_3, \quad a_4 = \beta_4 \cdot b_2 + b_4$$

genau dann eine Basis von $V$, wenn ihre Koordinatenvektoren

$$p(a_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(a_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \quad p(a_3) = \begin{pmatrix} \beta_3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(a_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden; dies ist aber genau dann der Fall, wenn die Matrix

$$A = (p(a_1),\ p(a_2),\ p(a_3),\ p(a_4)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_4 \\ \beta_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

invertierbar ist, also $\det(A) \neq 0$ gilt. Wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_4 \\ \beta_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{III}-\beta_1\text{I}}{\underset{\text{IV}-\beta_2\text{II}}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_4 \\ 0 & 0 & 1 - \beta_1\,\beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \beta_2\,\beta_4 \end{vmatrix} \overset{\text{Dreiecks-}}{\underset{\text{matrix}}{=}} (1 - \beta_1\,\beta_3)\,(1 - \beta_2\,\beta_4)$$

sind also die Vektoren $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ genau dann eine Basis von $V$, wenn

$$(1 - \beta_1\,\beta_3)\,(1 - \beta_2\,\beta_4) \neq 0$$

gilt.

4.18 Für einen Vektor $v \in V$ betrachten wir seinen Koordinatenvektor $p(v) \in \mathbb{R}^4$ bezüglich der Basis $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ von $V$, es ist also

$$p(a_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(a_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p(a_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p(x) = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Für die Hilfsmatrix $M = (p(a_1), p(a_2), p(a_3)) \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ und einen Spaltenvektor $z \in \mathbb{R}^4$ ergibt sich

$$(M|z) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & z_1 \\ -1 & 1 & 0 & z_2 \\ 0 & 1 & 1 & z_3 \\ 0 & 1 & -1 & z_4 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{2}\cdot \mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}z_1 \\ -1 & 1 & 0 & z_2 \\ 0 & 1 & 1 & z_3 \\ 0 & 1 & -1 & z_4 \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}z_1 \\ 0 & 1 & 0 & z_2 + \frac{1}{2}z_1 \\ 0 & 1 & 1 & z_3 \\ 0 & 1 & -1 & z_4 \end{array}\right)$$

$$\underset{\mathrm{IV}-\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}z_1 \\ 0 & 1 & 0 & z_2 + \frac{1}{2}z_1 \\ 0 & 0 & 1 & z_3 - z_2 - \frac{1}{2}z_1 \\ 0 & 0 & -1 & z_4 - z_2 - \frac{1}{2}z_1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{IV}+\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}z_1 \\ 0 & 1 & 0 & z_2 + \frac{1}{2}z_1 \\ 0 & 0 & 1 & z_3 - z_2 - \frac{1}{2}z_1 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 + z_3 - 2z_2 - z_1 \end{array}\right);$$

mit dieser Rechnung lassen sich nun alle drei Teilaufgaben bearbeiten.

a) Das homogene lineare Gleichungssystem $(M|0)$, also mit $z = 0$, ist ohne freie Variable und besitzt demnach nur die triviale Lösung; folglich sind die Koordinatenvektoren $p(a_1)$, $p(a_2)$, $p(a_3)$ linear unabhängig, weswegen auch die Vektoren $a_1$, $a_2$, $a_3$ linear unabhängig sind. Gemäß der Definition von $U = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ sind $a_1$, $a_2$, $a_3$ auch ein Erzeugendensystem von $U$, insgesamt also eine Basis von $U$.

b) Für $z = p(x) \in \mathbb{R}^4$ ergibt sich gemäß obiger Rechnung

$$(M \mid p(x)) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

damit ist das lineare Gleichungssystem $(M \,|\, p(x))$ lösbar, also $p(x)$ eine Linearkombination von $p(a_1)$, $p(a_2)$, $p(a_3)$, wobei deren Koeffizienten durch die Lösung gegeben werden. Wegen

$$p(x) = 3 \cdot p(a_1) + (-2) \cdot p(a_2) + 2 \cdot p(a_3)$$

ergibt sich entsprechend

$$x = 3 \cdot a_1 + (-2) \cdot a_2 + 2 \cdot a_3 \in \langle a_1, a_2, a_3\rangle = U,$$

und $x$ besitzt bezüglich der Basis $a_1$, $a_2$, $a_3$ von $U$ die Koordinaten 3, $-2$, 2.

c) Die gemäß a) linear unabhängigen Vektoren $a_1$, $a_2$, $a_3$ können mit jedem Vektor $a_4 \in V$ mit $a_4 \notin \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ zu einer Basis von $V$ ergänzt werden; dies ist aber zu $p(a_4) \notin \langle p(a_1), p(a_2), p(a_3)\rangle$ gleichwertig. Gemäß obiger Rechnung ist also

$$p(a_4) = z \qquad \text{mit} \qquad z_4 + z_3 - 2z_2 - z_1 \neq 0$$

zu wählen; damit ist etwa $p(a_4) = e_1$ und damit $a_4 = b_1$ geeignet.

4.19 Es sei $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ der von den linear unabhängigen Vektoren $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ aufgespannte Vektorraum sowie $p : V \to \mathbb{R}^4$ die bijektive lineare Abbildung, die jedem Vektor $v \in V$ seinen Koordinatenvektor $p(v) \in \mathbb{R}^4$ bezüglich der Basis $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ zuordnet; damit ist also

$$p(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p(u_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$p(w_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p(w_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix $A = (p(u_1), p(u_2), p(u_3)) \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{II}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}-\text{III}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit $\text{Rang}(A) = 3$; damit sind ihre Spalten $p(u_1)$, $p(u_2)$, $p(u_2)$ linear unabhängig. Folglich sind auch die Vektoren $u_1$, $u_2$, $u_3$ linear unabhängig und damit eine Basis des Unterraums $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$; somit ist $\dim(U) = 3$.

Offensichtlich sind $p(w_1)$, $p(w_2)$ linear unabhängig; folglich sind auch die Vektoren $w_1$, $w_2$ linear unabhängig und damit eine Basis des Unterraums $W = \langle w_1, w_2 \rangle$, so daß man $\dim(W) = 2$ erhält.

Ferner liegt $v \in V$ genau dann im Durchschnitt $U \cap W$, wenn es $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ und $\mu_1$, $\mu_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot u_3}_{v \in U} = v = \underbrace{\mu_1 \cdot w_1 + \mu_2 \cdot w_2}_{v \in W},$$

also

$$\lambda_1 \cdot p(u_1) + \lambda_2 \cdot p(u_2) + \lambda_3 \cdot p(u_3) = p(v) = \mu_1 \cdot p(w_1) + \mu_2 \cdot p(w_2),$$

was auf das lineare Gleichungssystem $B \cdot x = 0$ mit der Koeffizientenmatrix

$$B = (p(u_1), p(u_2), p(u_3), -p(w_1), -p(w_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5}$$

führt. Wegen

$$(B|0) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-\text{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{IV}\cdot\frac{1}{2}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{I+IV, II}-2\text{IV, III+2IV}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

ergeben sich die Lösungen

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{für ein} \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

damit erhält man

$$p(v) = \alpha \cdot p(u_1) - \alpha \cdot p(u_2) + 0 \cdot p(u_3) = \alpha \cdot p(w_1) + \alpha \cdot p(w_2) = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und folglich $v = \alpha \cdot (v_1 - v_3)$. Es ergibt sich also

$$U \cap W = \mathbb{R} \cdot (v_1 - v_3)\,,$$

und wegen $v_1 - v_3 \neq 0$ bildet $v_1 - v_3$ schon eine Basis von $U \cap W$; damit ist aber $\dim(U \cap W) = 1$.

4.20 Es sei $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ der von den vier Vektoren

$$v_1 = a + b + c + d, \quad v_2 = b + c, \quad v_3 = c + d, \quad v_4 = a + b$$

aufgespannte Unterraum in einem reellen Vektorraum $V$; dabei sind die Vektoren $a$, $b$, $c$, $d$ als linear unabhängig vorausgesetzt. Wegen

$$v_1 = (a + b) + (c + d) = v_4 + v_3 \in \langle v_2, v_3, v_4 \rangle$$

wird der Unterraum $U$ bereits durch die drei Vektoren $v_2$, $v_3$, $v_4$ erzeugt; zum Nachweis ihrer linearen Unabhängigkeit seien $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot v_2 + \lambda_2 \cdot v_3 + \lambda_3 \cdot v_4 = 0_V,$$

also
$$\lambda_1 \cdot (b+c) + \lambda_2 \cdot (c+d) + \lambda_3 \cdot (a+b) = 0_V$$
und damit
$$\lambda_3 \cdot a + (\lambda_1 + \lambda_3) \cdot b + (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot c + \lambda_2 \cdot d = 0_V.$$
Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von $a$, $b$, $c$, $d$ folgt daraus
$$\lambda_3 = 0, \qquad \lambda_1 + \lambda_3 = 0, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_2 = 0,$$
insgesamt also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$; folglich sind $v_2$, $v_3$, $v_4$ auch linear unabhängig und somit eine Basis von $U$. Für die Dimension von $U$ ergibt sich demnach $\dim(U) = 3$.

4.21 Für einen Vektor $v \in V$ betrachten wir seinen Koordinatenvektor $p(v) \in \mathbb{R}^4$ bezüglich der Basis $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ von $V$, also
$$p(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad p(u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad p(u_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$
und
$$p(w_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad p(w_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad p(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Der Vektor $x \in V$ liegt genau dann in $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \subseteq V$, wenn sein Koordinatenvektor $p(x) \in \mathbb{R}^4$ in $\langle p(u_1), p(u_2), p(u_3) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ liegt. Wegen
$$(p(u_1),\ p(u_2),\ p(u_3) \mid p(x)) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{III+I, IV+I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}}$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\frac{3}{2}\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \underset{\text{IV}+\frac{3}{4}\text{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{array}\right)$$
ist $p(x)$ nicht Linearkombination von $p(u_1)$, $p(u_2)$, $p(u_3)$, es ergibt sich also $p(x) \notin \langle p(u_1), p(u_2), p(u_3) \rangle$ und damit auch $x \notin \langle u_1, u_2, u_3 \rangle = U$.

b) Der Vektor $v \in V$ genau dann im Durchschnitt $U \cap W$, wenn es $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ und $\mu_1$, $\mu_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit
$$\underbrace{\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot u_3}_{v \in U} = v = \underbrace{\mu_1 \cdot w_1 + \mu_2 \cdot w_2}_{v \in W},$$
also
$$\lambda_1 \cdot p(u_1) + \lambda_2 \cdot p(u_2) + \lambda_3 \cdot p(u_3) = p(v) = \mu_1 \cdot p(w_1) + \mu_2 \cdot p(w_2),$$

was auf das homogene lineare Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ mit der Koeffizientenmatrix $A = (p(u_1), p(u_2), p(u_3), -p(w_1), -p(w_2))$, also

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5}$$

führt. Wegen

$$(A|0) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III+I,\ IV+I}}{\overset{\mathrm{II-I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III-3II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{-\frac{1}{4}\cdot\mathrm{III}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{II-III,\ IV-3III}}{\overset{\mathrm{I+III}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{2\cdot\mathrm{IV}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}+\frac{1}{2}\mathrm{IV},\ \mathrm{III}+\frac{1}{2}\mathrm{IV}}{\overset{\mathrm{I}+\frac{1}{2}\mathrm{IV}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

ergeben sich die Lösungen

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ 3\alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{für ein} \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

damit erhält man

$$3\alpha \cdot p(u_1) + \alpha \cdot p(u_2) + \alpha \cdot p(u_3) = p(v) = 3\alpha \cdot p(w_1) + (-\alpha) \cdot p(w_2),$$

durch Einsetzen der Koordinatenvektoren also

$$p(v) = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und folglich $v = \alpha \cdot (2v_1 + 6v_2 + v_4)$. Es ergibt sich also

$$U \cap W = \mathbb{R} \cdot (2v_1 + 6v_2 + v_4),$$

und wegen $2v_1 + 6v_2 + v_4 \neq 0$ bildet $2v_1 + 6v_2 + v_4$ eine Basis von $U \cap W$.

4.22 a) Sei $U = \langle a, b, c\rangle \subseteq V$ der von den drei (nicht notwendigerweise linear unabhängigen) Vektoren $a$, $b$, $c$ aufgespannte Unterraum des reellen Vektorraums $V$. Damit ist $U = \{0\}$ der Nullraum, oder es läßt sich nach dem Basisauswahlsatz aus dem Erzeugendensystem $a$, $b$, $c$ von $U$ eine Basis von $U$ auswählen; auf jeden Fall gilt aber

$$d := \dim(U) \leq 3.$$

Da nun höchstens $d$ Vektoren aus $U$ linear unabhängig sein können, sind die vier Vektoren

$$v_1 = a + b + c, \qquad v_2 = a + 2\,b + 3\,c,$$

$$v_3 = 2\,a + 3\,b + c \qquad \text{und} \qquad v_4 = 3\,a + b + 2\,c,$$

die als Linearkombinationen von $a$, $b$, $c$ in $U$ liegen, sicher linear abhängig.

b) Sei $p : V \to \mathbb{R}^3$ die bijektive Abbildung, die jedem Vektor $v \in V$ seinen Koordinatenvektor $p(v) \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis $a$, $b$, $c$ von $V$ zuordnet; damit ist

$$p(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad p(v_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit $A = (p(v_1),\ p(v_2),\ p(v_3)) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (2 + 3 + 6) - (4 + 9 + 1) = -3 \neq 0;$$

damit sind die Koordinatenvektoren $p(v_1)$, $p(v_2)$, $p(v_3) \in \mathbb{R}^3$ und folglich auch die Vektoren $v_1$, $v_2$, $v_3 \in V$ linear unabhängig.

Alternativ läßt sich die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $v_1$, $v_2$, $v_3 \in V$ auch gemäß der Definition, also ohne Rückgriff auf die Koordinatenvektoren $p(v_1)$, $p(v_2)$, $p(v_3) \in \mathbb{R}^3$ zeigen: seien dazu $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0_V,$$

also

$$\lambda_1 \cdot (a + b + c) + \lambda_2 \cdot (a + 2\,b + 3\,c) + \lambda_3 \cdot (2\,a + 3\,b + c) = 0_V$$

und damit

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\,\lambda_3) \cdot a + (\lambda_1 + 2\,\lambda_2 + 3\,\lambda_3) \cdot b + (\lambda_1 + 3\,\lambda_2 + \lambda_3) \cdot c = 0_V.$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von $a$, $b$, $c$ folgt daraus

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 2\,\lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 + 2\,\lambda_2 + 3\,\lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 + 3\,\lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

damit $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ und $2\,\lambda_2 - \lambda_3 = 0$, also $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 0$ und somit auch $\lambda_1 = 0$. Damit sind die Vektoren $v_1$, $v_2$, $v_3$ linear unabhängig.

4.23 Es seien $s_1, \ldots, s_n$ die Spalten der gegebenen Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$; damit ist

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid M \cdot x = 0\}$$

sowie

$$S = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle = \{M \cdot x \mid x \in \mathbb{R}^n\}.$$

a) Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ erhält man mit $x = v - M \cdot v \in \mathbb{R}^n$ dann

$$\begin{aligned} M \cdot x = M \cdot (v - M \cdot v) &= M \cdot v - M \cdot (M \cdot v) = \\ &= M \cdot v - M^2 \cdot v \underset{M^2=M}{=} M \cdot v - M \cdot v = 0 \end{aligned}$$

und damit $x = v - M \cdot v \in U$.

b) Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$v = \underbrace{(v - M \cdot v)}_{\in U} + \underbrace{M \cdot v}_{\in S},$$

weswegen $\mathbb{R}^n = U + S$ zunächst die Summe von $U$ und $S$ ist. Damit gilt

$$\dim(U + S) = \dim(\mathbb{R}^n) = n,$$

und wegen

$$\dim U = n - \operatorname{Rang}(M) \qquad \text{und} \qquad \dim S = \operatorname{Rang}(M)$$

ergibt sich ferner mit Hilfe der Dimensionsformel

$$\begin{aligned} \dim(U \cap S) &= \dim U + \dim S - \dim(U + S) = \\ &= (n - \operatorname{Rang}(M)) + \operatorname{Rang}(M) - n = 0, \end{aligned}$$

also $U \cap S = \{0\}$, weswegen $\mathbb{R}^n = U \oplus S$ sogar die direkte Summe von $U$ und $S$ ist.

4.24 a) Wir entwickeln die Determinante von $A$ nach der 1. Zeile und erhalten

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{\underset{\text{Dreiecksmatrix}}{=} 1^{n-1}} +$$

$$+ (-1)^{1+n} \cdot a \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\underset{\text{Dreiecksmatrix}}{=} 1^{n-1}} = 1 + (-1)^{n+1}\, a.$$

b) Für einen Vektor $v \in V$ betrachten wir den Koordinatenvektor $p(v) \in \mathbb{R}^n$ bezüglich der Basis $b_1, \ldots, b_n$ von $V$; folglich sind

$$p(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad p(v_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die ersten $n-1$ Spalten der in a) betrachteten Matrix $A$; ferner ist

$$p(v_n) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die letzte Spalte von $A$ für $a = 1$ bzw. $a = 0$.

- Für $a = 0$ ist die Matrix $A$ wegen $\det(A) = 1 \neq 0$ invertierbar, so daß ihre Spalten $p(v_1), \ldots, p(v_{n-1}), e_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ sind; insbesondere sind $p(v_1), \ldots, p(v_{n-1})$ und folglich auch $v_1, \ldots, v_{n-1}$ linear unabhängig.
- Für $a = 1$ ist $p(v_n)$ die $n$–te Spalte der Matrix $A$; damit sind $v_1, \ldots, v_n$ genau dann eine Basis von $V$, wenn $p(v_1), \ldots, p(v_n)$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ sind, also die Matrix $A$ invertierbar ist; wegen

$$\det(A) = 0 \iff 1 + (-1)^{n+1} = 0 \iff 1 = (-1)^n \iff n \text{ gerade}$$

  ist dies genau dann der Fall, wenn $n$ ungerade ist.

4.25 Für die $n-1$ fest gewählten Vektoren $s_1, \ldots, s_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir den davon erzeugten Untervektorraum $U = \langle s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$ sowie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \det(s_1, \ldots, s_{n-1}, x)$.

a) Zum Nachweis von $U \subseteq \mathrm{Kern}(f)$ sei $x \in U$.

- Wegen $x \in \langle s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle$ gilt

$$\langle s_1, \ldots, s_{n-1}, x \rangle = \langle s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle = U,$$

  und wegen $\dim U \leq n-1$ ist $U \subsetneq \mathbb{R}^n$; folglich ist $s_1, \ldots, s_{n-1}, x$ kein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$.
- Wegen $x \in \langle s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle$ gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ mit

$$x = \lambda_1 \cdot s_1 + \ldots + \lambda_{n-1} \cdot s_{n-1};$$

  folglich sind $s_1, \ldots, s_{n-1}, x$ linear abhängig.

Jedes der beiden Argumente zeigt für sich, daß $s_1, \ldots, s_{n-1}, x$ keine Basis von $\mathbb{R}^n$ ist; folglich ist die Matrix $(s_1, \ldots, s_{n-1}, x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nicht invertierbar, und wir erhalten

$$f(x) = \det(s_1, \ldots, s_{n-1}, x) = 0,$$

also $x \in \mathrm{Kern}(f)$.

b) Wir treffen hinsichtlich der Dimension des Unterraums $U = \langle s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle$ mit $\dim(U) \leq n-1$ die folgende Fallunterscheidung:

- Im Falle $\dim(U) < n-1$ sind die $n-1$ Vektoren $s_1, \ldots, s_{n-1}$ linear abhängig. Damit sind für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ auch die $n$ Vektoren $s_1, \ldots, s_{n-1}, x$ linear abhängig, insbesondere keine Basis von $\mathbb{R}^n$; folglich ist die Matrix $(s_1, \ldots, s_{n-1}, x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nicht invertierbar, und wir erhalten
$$f(x) = \det(s_1, \ldots, s_{n-1}, x) = 0,$$
also $x \in \operatorname{Kern}(f)$. Somit ist $\operatorname{Kern}(f) = \mathbb{R}^n$, also $\dim \operatorname{Kern}(f) = n$.
- Im Falle $\dim(U) = n-1$ sind die $n-1$ Vektoren $s_1, \ldots, s_{n-1}$ linear unabhängig. Damit sind für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \notin U$ auch die $n$ Vektoren $s_1, \ldots, s_{n-1}, x$ linear unabhängig, wegen $\dim \mathbb{R}^n = n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$; folglich ist die Matrix $(s_1, \ldots, s_{n-1}, x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, und wir erhalten
$$f(x) = \det(s_1, \ldots, s_{n-1}, x) \neq 0,$$
also $x \notin \operatorname{Kern}(f)$. Somit ist $\operatorname{Kern}(f) \subseteq U$, wegen $U \subseteq \operatorname{Kern}(f)$ gemäß a) also $\operatorname{Kern}(f) = U$, und damit $\dim \operatorname{Kern}(f) = n-1$.