LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Lineare Algebra und analytische Geometrie 3 — Lösungsvorschlag —

3.1 Mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen sowie der Tatsache, daß sich die Determinante einer Dreiecksmatrix als Produkt ihrer Hauptdiagonalelemente errechnet, ergibt sich

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{2 aus II, 3 aus III, 4 aus IV, 5 aus V}}{=}$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{II−I, III−I, IV−I, V−I}}{=}$$

$$= 120 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{(((I+II)+III)+IV)+V}}{=}$$

$$= 120 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{Dreiecks-}}{\underset{\text{matrix}}{=}}$$

$$= 120 \cdot 4 \cdot (-1)^4 = 480.$$

3.2 a) Es ist

- $A_1 = (-1)$, also $\det(A_1) = -1$,
- $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, also $\det(A_2) = 1 - 1 = 0$, sowie
- $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, also $\det(A_3) = -1 + 0 + 0 - (0 - 1 - 1) = 1$.

b) Für $n \geq 4$ erhalten wir mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes

$$\det(A_n) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & A_{n-2} & \\ \vdots & \vdots & & & \end{vmatrix} \overset{\text{1. Zeile}}{=}$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & & & \\ 0 & & A_{n-2} & \\ \vdots & & & \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & & & \\ 0 & & A_{n-2} & \\ \vdots & & & \end{vmatrix} =$$

$$= -\det(A_{n-1}) - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & & & \\ 0 & & A_{n-2} & \\ \vdots & & & \end{vmatrix} \overset{\text{1. Spalte}}{=} -\det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2}).$$

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt

$$\det(A_n) = -\det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2})$$

und analog

$$\det(A_{n-1}) = -\det(A_{n-2}) - \det(A_{n-3}),$$

woraus $\det(A_n) = \det(A_{n-3})$ folgt. Damit ergibt sich für alle $k \in \mathbb{N}$

- $\det(A_{3k+1}) = \det(A_1) = -1$,
- $\det(A_{3k+2}) = \det(A_2) = 0$ sowie
- $\det(A_{3k+3}) = \det(A_3) = 1$.

3.3 a) Für die gegebene Matrix

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

erhalten wir für $n > 2$ mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes

$$\det(T_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & \vdots & \vdots \\ & T_{n-2} & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ \dots & \dots & 1 & 2 & 1 \\ \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{n\text{-te}}{\underset{\text{Zeile}}{=}} \quad (-1)^{n+(n-1)} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} & & & \vdots \\ & T_{n-2} & & \vdots \\ & & & 0 \\ \dots & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} + \\
&\qquad\qquad + (-1)^{n+n} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} & & & \vdots \\ & T_{n-2} & & \vdots \\ & & & 1 \\ \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \quad (-1)^{2n-1} \cdot \begin{vmatrix} & & & \vdots \\ & T_{n-2} & & \vdots \\ & & & 0 \\ \dots & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2n} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} & & & \vdots \\ & T_{n-2} & & \vdots \\ & & & 1 \\ \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \quad - \begin{vmatrix} & & & \vdots \\ & T_{n-2} & & \vdots \\ & & & 0 \\ \dots & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \det(T_{n-1}) \\
&\overset{(n-1)\text{-te}}{\underset{\text{Spalte}}{=}} \quad -(-1)^{(n-1)+(n-1)} \cdot 1 \cdot \det(T_{n-2}) + 2 \cdot \det(T_{n-1}) \\
&= \quad -(-1)^{2n-2} \cdot \det(T_{n-2}) + 2 \cdot \det(T_{n-1}) \\
&= \quad 2 \cdot \det(T_{n-1}) - \det(T_{n-2}).
\end{aligned}
$$

b) Für den Induktionsanfang ergibt sich bei „$n = 1$“

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und damit} \qquad \det(T_1) = 1,$$

und für „$n = 2$“

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und damit} \qquad \det(T_2) = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1;$$

für den Induktionsschritt „$n - 1 \to n$“ erhält man unter Verwendung von a)

$$\det(T_n) = 2 \cdot \det(T_{n-1}) - \det(T_{n-2}) = 2 \cdot 1 - 1 = 1.$$

3.4 Für die in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \alpha \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ergibt sich

$$
\begin{aligned}
(M_\alpha \mid E_3) \quad &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{III}-2\mathrm{I}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{II}-\alpha\mathrm{III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{I}+2\mathrm{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 2 & 1+4\alpha & -2\alpha \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{(-1)\cdot\mathrm{II}}{\overset{(-1)\cdot\mathrm{I}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1-4\alpha & 2\alpha \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) = (E_3 \mid M'_\alpha)\,;
\end{aligned}
$$

damit ist M_α invertierbar, und für ihre Inverse gilt

$$
M_\alpha^{-1} = M'_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & -1-4\alpha & 2\alpha \\ -1 & -2\alpha & \alpha \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.
$$

Alternativ läßt sich die Invertierbarkeit der Matrix M_α mit Hilfe ihrer Determinante nachweisen und ihre Inverse M_α^{-1} über die zu M_α komplementäre Matrix $\widetilde{M}_\alpha$ berechnen: wegen

$$
\det(M_\alpha) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & \alpha \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (0+0-4\alpha) - (-4\alpha+0+1) = -1 \neq 0
$$

ist die Matrix M_α für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ invertierbar, und es gilt

$$
\begin{aligned}
M_\alpha^{-1} = \frac{1}{\det(M_\alpha)} \cdot \widetilde{M}_\alpha &= \\
&= \frac{1}{\det(M_\alpha)} \cdot \begin{pmatrix} +\det(M'_{11}) & -\det(M'_{21}) & +\det(M'_{31}) \\ -\det(M'_{12}) & +\det(M'_{22}) & -\det(M'_{32}) \\ +\det(M'_{13}) & -\det(M'_{23}) & +\det(M'_{33}) \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1+4\alpha & -2\alpha \\ 1 & 2\alpha & -\alpha \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1-4\alpha & 2\alpha \\ -1 & -2\alpha & \alpha \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

3.5 Für die in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix

$$
M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}
$$

ergibt sich

$$
\begin{aligned}
(M_\alpha \mid E_3) \quad &= \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\text{III}-\text{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

Damit enthält die zur gegebenen Matrix M_α zeilenäquivalente Matrix

$$
\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}
$$

für $\alpha = 0$ in der ersten Zeile eine Nullzeile sowie für $\alpha = 1$ in der zweiten und dritten Zeile jeweils eine Nullzeile und ist damit in diesen Fällen insbesondere nicht invertierbar; folglich ist aber auch M_α für $\alpha \in \{0,1\}$ nicht invertierbar.

Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ ergibt sich ferner

$$
\begin{aligned}
(M_\alpha \mid E_3) \quad &\sim \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\frac{1}{\alpha-1}\cdot\text{III}}{\overset{\frac{1}{\alpha}\cdot\text{I},\ \frac{1}{1-\alpha}\cdot\text{II}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{\alpha-1} & -\frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{array}\right) \\
&\underset{\text{I}-\text{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{\alpha-1} & -\frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{array}\right) \\
&\underset{\text{II}-\text{III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\alpha-1} & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{array}\right) \quad = \quad (E_3 \mid M'_\alpha)\,;
\end{aligned}
$$

damit ist M_α invertierbar, und für ihre Inverse gilt

$$
M_\alpha^{-1} = M'_\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ \frac{1}{\alpha-1} & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.
$$

Alternativ läßt sich die Invertierbarkeit der Matrix M_α mit Hilfe ihrer Determinante überprüfen und gegebenenfalls ihre Inverse M_α^{-1} über die zu M_α komplementäre Matrix $\widetilde{M_\alpha}$ berechnen: wegen

$$
\det(M_\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} \left(\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2\right) - \left(\alpha^2 + \alpha + \alpha^3\right) =
$$

$$
= 2\,\alpha^2 - \alpha - \alpha^3 = -\alpha\left(\alpha^2 - 2\,\alpha + 1\right) = -\alpha\,(\alpha-1)^2
$$

ist die Matrix M_α genau dann invertierbar, wenn

$$\det(M_\alpha) = -\alpha(\alpha-1)^2 \neq 0, \qquad \text{also} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\},$$

gilt, und in diesem Fall ergibt sich

$$\begin{aligned}
M_\alpha^{-1} &= \frac{1}{\det(M_\alpha)} \cdot \widetilde{M_\alpha} \\
&= \frac{1}{\det(M_\alpha)} \cdot \begin{pmatrix} +\det(M'_{11}) & -\det(M'_{21}) & +\det(M'_{31}) \\ -\det(M'_{12}) & +\det(M'_{22}) & -\det(M'_{32}) \\ +\det(M'_{13}) & -\det(M'_{23}) & +\det(M'_{33}) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{-\alpha(\alpha-1)^2} \cdot \begin{pmatrix} \alpha-1 & -\alpha(\alpha-1) & 0 \\ -\alpha(\alpha-1) & 0 & \alpha(\alpha-1) \\ 0 & \alpha(\alpha-1) & -\alpha(\alpha-1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ \frac{1}{\alpha-1} & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3.6 a) Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (hier für $n=3$) ist genau dann invertierbar, wenn für ihre Determinante $\det(M) \neq 0$ gilt. Wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & s \\ 0 & 1-s & 0 \\ s & s & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{2. Zeile}}{=} (1-s) \cdot \begin{vmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{vmatrix} = \\ = (1-s)\cdot\left(1-s^2\right) = (1-s)^2 \cdot (1+s)$$

und

$$\det(B) = \begin{vmatrix} -s & s & -1 \\ 0 & -1 & s \\ s^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{3. Zeile}}{=} s^2 \cdot \begin{vmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{vmatrix} = \\ = s^2 \cdot \left(s^2-1\right) = s^2 \cdot (s-1) \cdot (s+1)$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ ist

- die Matrix A genau dann invertierbar, wenn $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ gilt, sowie
- die Matrix B genau dann invertierbar, wenn $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$ gilt.

b) Für $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$ sind gemäß a) die beiden Matrizen A und B invertierbar; folglich ist auch ihr Matrixprodukt $A \cdot B$ invertierbar und besitzt damit vollen Rang. In diesem Fall ist also $\mathrm{Rang}(A\cdot B) = 3$, und für die verbleibenden Fälle ergibt sich:

- Für $s = -1$ ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{2}\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-2\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+2\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit $\mathrm{Rang}(A \cdot B) = 1$.

- Für $s = 0$ ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{(-1)\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  und damit $\text{Rang}(A \cdot B) = 2$.

- Für $s = 1$ ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  und damit $\text{Rang}(A \cdot B) = 0$.

3.7 a) Die in Abhängigkeit von den Parametern a, b, $c \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix

$$A_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & c & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

besitzt die Determinante

$$\begin{aligned} \det(A_{a,b,c}) &= \begin{vmatrix} a & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & c & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{II}-3\cdot\text{IV}}{=} \begin{vmatrix} a & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & c-3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{Laplace}}{\underset{\text{2. Zeile}}{=}} (-1)^{2+3} \cdot (c-3) \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{Laplace}}{\underset{\text{3. Zeile}}{=}} -(c-3) \cdot (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(c-3)\cdot(a-1), \end{aligned}$$

und damit gilt

$$\det(A_{a,b,c}) = 0 \iff -(c-3)\cdot(a-1) = 0 \iff$$
$$\iff \big(c - 3 = 0 \;\text{ oder }\; a - 1 = 0\big) \iff \big(c = 3 \;\text{ oder }\; a = 1\big).$$

b) Für alle a, b, $c \in \mathbb{R}$ ergibt sich mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen

$$A_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & c & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{I}\leftrightarrow\text{III}}{\underset{\text{II}\leftrightarrow\text{IV}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & c & 3 \end{pmatrix} \overset{\text{I}-\text{II}}{\underset{\text{III}-b\cdot\text{II},\ \text{IV}-c\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 & 3-c \end{pmatrix} \underset{\text{III}-a\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 & 3-c \end{pmatrix},$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Sei im ersten Fall $a \neq 1$, also $1 - a \neq 0$; wegen

$$A_{a,b,c} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 & 3-c \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & 2-b \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-c \end{pmatrix}$$

  ergibt sich

$$\operatorname{Rang}(A_{a,b,c}) = 3 \iff 3 - c = 0 \iff c = 3.$$

- Sei im zweiten Fall $a = 1$, also

$$A_{a,b,c} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 & 3-c \end{pmatrix};$$

  für $b \neq 2$, also $2 - b \neq 0$, gilt dann

$$A_{a,b,c} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 & 3-c \end{pmatrix} \underset{\mathrm{IV} - \frac{3-c}{2-b} \cdot \mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  und damit $\operatorname{Rang}(A_{a,b,c}) = 3$, und für $b = 2$ gilt

$$A_{a,b,c} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-c \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III} \leftrightarrow \mathrm{IV}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  und damit

$$\operatorname{Rang}(A_{a,b,c}) = 3 \iff 3 - c \neq 0 \iff c \neq 3.$$

Zusammenfassend erhält man demnach

$$\begin{aligned} \operatorname{Rang}(A_{a,b,c}) = 3 \quad \iff \quad & (a \neq 1 \text{ und } c = 3) \quad \text{oder} \\ & (a = 1 \text{ und } b \neq 2) \quad \text{oder} \\ & (a = 1 \text{ und } b = 2 \text{ und } c \neq 3) \end{aligned}$$

3.8 a) Zunächst besitzt das homogene lineare Gleichungssystem $A\,x = 0$ wegen

$$(A \mid 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}-4\mathrm{I}}{\underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{\underset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

genau die Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$ mit $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig sowie

- $x_2 + 2\,x_3 = 0$, also $x_2 = -2\,x_3 = -2\,\lambda$, und
- $x_1 - x_3 = 0$, also $x_1 = x_3 = \lambda$,

folglich also die Lösungsmenge

$$L_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\,\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für eine Matrix $B = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit den Spalten s_1, s_2, $s_3 \in \mathbb{R}^3$ gilt demnach

$$\begin{aligned} AB = O \quad &\iff \quad A\,(s_1, s_2, s_3) = (0,0,0) \\ &\iff \quad (As_1, As_2, As_3) = (0,0,0) \\ &\iff \quad As_1 = 0 \ \text{ und } \ As_2 = 0 \ \text{ und } \ As_3 = 0 \\ &\iff \quad s_1 \in L_0 \ \text{ und } \ s_2 \in L_0 \ \text{ und } \ s_3 \in L_0 \\ &\iff \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ -2\,\alpha & -2\,\beta & -2\,\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \ \text{ mit } \ \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Jede Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $AB = O$ besitzt gemäß a) die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ -2\,\alpha & -2\,\beta & -2\,\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

mit α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$; damit gilt

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ -2\,\alpha & -2\,\beta & -2\,\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha + 4\,\beta + \gamma & 2\,\alpha + 5\,\beta + \gamma & 3\,\alpha + 6\,\beta + \gamma \\ -2\,\alpha - 8\,\beta - 2\,\gamma & -4\,\alpha - 10\,\beta - 2\,\gamma & -6\,\alpha - 12\,\beta - 2\,\gamma \\ \alpha + 4\,\beta + \gamma & 2\,\alpha + 5\,\beta + \gamma & 3\,\alpha + 6\,\beta + \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha + 4\,\beta + \gamma & 2\,\alpha + 5\,\beta + \gamma & 3\,\alpha + 6\,\beta + \gamma \\ -2\,(\alpha + 4\,\beta + \gamma) & -2\,(2\,\alpha + 5\,\beta + \gamma) & -2\,(3\,\alpha + 6\,\beta + \gamma) \\ \alpha + 4\,\beta + \gamma & 2\,\alpha + 5\,\beta + \gamma & 3\,\alpha + 6\,\beta + \gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} BA = O \quad &\iff \quad \left\{ \begin{array}{rrcl} \text{(I)} & \alpha + 4\,\beta + \gamma & = & 0 \\ \text{(II)} & 2\,\alpha + 5\,\beta + \gamma & = & 0 \\ \text{(III)} & 3\,\alpha + 6\,\beta + \gamma & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \end{array} \right) \underset{\text{III}-3\text{I}}{\overset{\text{II}-2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & 0 \end{array} \right) \underset{\text{III}-2\text{II}}{\overset{\text{I}+\frac{4}{3}\text{II}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

können wir etwa

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -1\\ 3\end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad B = \begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ -2 & 2 & -6\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \setminus \{O\}$$

wählen.

3.9 Für die beiden $m \times m$–Matrizen $A = (a_{ij})_{i,j}$ und $B = (b_{jk})_{j,k} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ist das Produkt $A \cdot B = (c_{ik})_{i,k} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ über

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot b_{jk} \qquad \text{für alle} \quad i,k \in \{1,\ldots,m\}$$

erklärt; speziell für

$$M_s = \begin{pmatrix} s & \ldots & s\\ \vdots & & \vdots\\ s & \ldots & s\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad M_t = \begin{pmatrix} t & \ldots & t\\ \vdots & & \vdots\\ t & \ldots & t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m},$$

also $a_{ij} = s$ für alle $i,j \in \{1,\ldots,m\}$ und $b_{jk} = t$ für alle $j,k \in \{1,\ldots,m\}$ ergibt sich

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} s \cdot t = m \cdot s \cdot t \qquad \text{für alle} \quad i,k \in \{1,\ldots,m\}$$

und damit

$$M_s \cdot M_t = \begin{pmatrix} m\,s\,t & \ldots & m\,s\,t\\ \vdots & & \vdots\\ m\,s\,t & \ldots & m\,s\,t\end{pmatrix} = M_{mst} \in \mathbb{R}^{m\times m}.$$

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} M_s^2 = M_s \cdot M_s &= M_{ms^2}\\ M_s^3 = M_s \cdot M_s^2 &= M_s \cdot M_{ms^2} = M_{m^2s^3}\\ M_s^4 = M_s \cdot M_s^3 &= M_s \cdot M_{m^2s^3} = M_{m^3s^4}\end{aligned}$$

wodurch die Vermutung

$$M_s^n = M_{m^{n-1}s^n} \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N}$$

nahegelegt wird; wir weisen diese mit vollständiger Induktion nach:

- für „$n = 1$“ ist $M_s^1 = M_s = M_{m^0s^1}$.
- für „$n \to n+1$“ folgt aus $M_s^n = M_{m^{n-1}s^n}$ dann

$$M_s^{n+1} = M_s \cdot M_s^n = M_s \cdot M_{m^{n-1}s^n} = M_{m\cdot s\cdot m^{n-1}s^n} = M_{m^n s^{n+1}}.$$

3.10 a) Es ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix}$$

und damit

$$
\begin{aligned}
&D \cdot E_2 - S \cdot A + A^2 = \\
&\quad = (ad-bc)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - (a+d)\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix}ad-bc & 0\\ 0 & ad-bc\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a(a+d) & b(a+d)\\ c(a+d) & d(a+d)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix} = \\
&\quad = \begin{pmatrix}ad-bc-a^2-ad+a^2+bc & -ab-bd+ab+bd\\ -ac-cd+ac+cd & ad-bc-ad-d^2+bc+d^2\end{pmatrix} = \\
&\qquad = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 0.
\end{aligned}
$$

b) Für „$\Longleftarrow$“ gilt im Falle $S = 0$ und $D = -1$ mit Hilfe von a)

$$0 = D \cdot E_2 - S \cdot A + A^2 = -E_2 + A^2, \qquad \text{also} \quad A^2 = E_2,$$

und im Falle $b = c = 0$ und $a^2 = d^2 = 1$ gemäß der Rechnung von a)

$$A^2 = \begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = E_2.$$

Für „$\Longrightarrow$“ wird $A^2 = E_2$ vorausgesetzt; im Falle $S = 0$ ergibt sich mit Hilfe von a)

$$0 = D \cdot E_2 - S \cdot A + A^2 = D \cdot E_2 + E_2 = (D+1)\cdot E_2, \qquad \text{also} \quad D = -1,$$

und im Falle $S = a + d \neq 0$ erhält man gemäß der Rechnung von a)

$$\begin{pmatrix}a^2+bc & b(a+d)\\ c(a+d) & bc+d^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

also zunächst $b = c = 0$ in der Nebendiagonale und danach $a^2 = d^2 = 1$ in der Hauptdiagonale.

3.11 Für die gegebene Matrix

$$A = \begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist die zugehörige lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = A \cdot x$, zu betrachten. Ferner ist für die drei gegebenen Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_3 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

die Hilfsmatrix $P = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gemäß

$$\begin{aligned}
(P \mid E_3) \quad &= \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III+I}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{III-II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{I-III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \quad = \quad (E_3 \mid P')
\end{aligned}$$

invertierbar mit $P^{-1} = P'$; insbesondere ist b_1, b_2, b_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

a) Wegen

$$\begin{aligned}
f(b_1) = A \cdot b_1 &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 \\
f(b_2) = A \cdot b_2 &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 \\
f(b_3) = A \cdot b_3 &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 4 \cdot b_3
\end{aligned}$$

ergibt sich die darstellende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3 von $\mathbb{R}^3$.

b) Als n–te Potenz B^n mit $n \in \mathbb{N}$ der Diagonalmatrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ergibt sich

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Gemäß dem Basiswechsel erhält man

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P \qquad \text{bzw.} \qquad A = P \cdot B \cdot P^{-1},$$

woraus über

$$A^2 = A \cdot A = \big(P \cdot B \cdot \underbrace{P^{-1}\big) \cdot \big(P}_{=E_3} \cdot B \cdot P^{-1}\big) = P \cdot B^2 \cdot P^{-1}$$

und

$$A^3 = A^2 \cdot A = \big(P \cdot B^2 \cdot \underbrace{P^{-1}\big) \cdot \big(P}_{=E_3} \cdot B \cdot P^{-1}\big) = P \cdot B^3 \cdot P^{-1}$$

induktiv

$$
\begin{aligned}
A^n &= P \cdot B^n \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2^n & -2^n & 2^n \end{pmatrix} \\
&= 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1+2^n & 1-2^n & -1+2^n \\ 0 & 2 & 0 \\ -1+2^n & 1-2^n & 1+2^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}
\end{aligned}
$$

folgt.

c) Zu den durch die Startwerte $u_0 = 1$, $v_0 = 1$ und $w_0 = 2$ durch

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} &= 3\,u_n - v_n + w_n \\
v_{n+1} &= 2\,v_n \\
w_{n+1} &= u_n - v_n + 3\,w_n
\end{aligned}
$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ rekursiv definierten Folgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(w_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen betrachten wir

$$
x_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N}_0;
$$

damit ist $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sowie

$$
x_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,u_n - v_n + w_n \\ 2\,v_n \\ u_n - v_n + 3\,w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A \cdot x_n
$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Damit erhält man $x_1 = A \cdot x_0$ sowie über

$$
x_2 = A \cdot x_1 = A \cdot (A \cdot x_0) = (A \cdot A) \cdot x_0 = A^2 \cdot x_0
$$

und

$$
x_3 = A \cdot x_2 = A \cdot \left(A^2 \cdot x_0\right) = (A \cdot A^2) \cdot x_0 = A^3 \cdot x_0
$$

induktiv

$$
\begin{aligned}
x_n &= A^n \cdot x_0 = 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1+2^n & 1-2^n & -1+2^n \\ 0 & 2 & 0 \\ -1+2^n & 1-2^n & 1+2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} (1+2^n) + (1-2^n) + 2\,(-1+2^n) \\ 2 \\ (-1+2^n) + (1-2^n) + 2\,(1+2^n) \end{pmatrix} \\
&= 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 2^{n+1} \\ 2 \\ 2+2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{2n} \\ 2^n \\ 2^n + 2^{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^n \\ 2^n \\ 2^n + 4^n \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

also
$$u_n = 4^n, \qquad v_n = 2^n \qquad \text{und} \qquad w_n = 2^n + 4^n$$
für alle $n \in \mathbb{N}$.

3.12 Eine Matrix $A = (s_1, s_2, s_3, s_4) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ ist genau dann orthogonal, wenn ihre Spalten s_1, s_2, s_3, s_4 eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$ bezüglich des Standardskalarprodukts $\circ$ bilden; folglich sind die Matrizen A_1 und A_2 orthogonal, die Matrizen A_3 und A_4 wegen $s_1 \circ s_2 = 1 \neq 0$ aber nicht.

Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\chi_{A_1}(\lambda) = \det(A_1 - \lambda\, E_4) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{1. Zeile}}{=} \\
&= (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{3. Zeile}}{=} \\
&= (-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \\
&= \left(\lambda^2 + 1\right) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \left(\lambda^2 + 1\right) \cdot \left((-\lambda)^2 - (-1)\right) = \left(\lambda^2 + 1\right)^2 > 0;
\end{aligned}$$

damit besitzt A_1 keinen reellen Eigenwert und ist damit insbesondere nicht reell diagonalisierbar; dagegen ist A_2 als symmetrische Matrix (orthogonal) diagonalisierbar. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\chi_{A_3}(\lambda) = \det(A_3 - \lambda\, E_4) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Dreiecks–} \\ \text{matrix}}}{=} \\
&= (1-\lambda) \cdot (2-\lambda) \cdot (3-\lambda) \cdot (4-\lambda);
\end{aligned}$$

damit besitzt A_3 die vier verschiedenen reellen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ und $\lambda_4 = 4$ und ist daher als 4×4–Matrix reell diagonalisierbar. Schließlich gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\chi_{A_4}(\lambda) = \det(A_4 - \lambda\, E_4) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Dreiecks–} \\ \text{matrix}}}{=} (1-\lambda)^4;$$

damit ist $\lambda_0 = 1$ der einzige Eigenwert der Matrix A_4; er besitzt die algebraische Vielfachheit $\alpha_0 = 4$, wegen

$$A_4 - \lambda_0 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aber nur die geometrische Vielfachheit

$$\gamma = 4 - \operatorname{Rang}\left(A_4 - \lambda_0 \cdot E_4\right) = 4 - 3 = 1,$$

weswegen A_4 nicht reell diagonalisierbar ist.

3.13 Die in Abhängigkeit vom reellen Parameter $a \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ 1 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

besitzt zunächst die Determinante

$$\det M_a = \begin{vmatrix} 0 & -a & 0 \\ 1 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (0+0+0) - (0+0-a(a+1)) = a(a+1),$$

und wir erhalten

$$M_a \text{ invertierbar} \iff \det M_a \neq 0 \iff a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}.$$

Ferner besitzt M_a das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \chi_a(\lambda) \quad &= \quad \det(M_a - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -a & 0 \\ 1 & a+1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & a+1-\lambda \end{vmatrix} \\ &\underset{\text{3. Spalte}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} \quad (-1)^{3+3}(a+1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & -a \\ 1 & a+1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \quad (a+1-\lambda) \cdot \big(-\lambda(a+1-\lambda) - (-a)\big) \\ &= \quad (a+1-\lambda) \cdot \big(\lambda^2 - (a+1)\lambda + a\big) \\ &\underset{\text{Vieta}}{=} \quad -(\lambda - (a+1)) \cdot (\lambda - a) \cdot (\lambda - 1) \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit zerfällt $\chi_a(\lambda)$ komplett in Linearfaktoren, und für die Nullstellen

$$\lambda_1 = a+1, \qquad \lambda_2 = a, \qquad \lambda_3 = 1$$

gilt stets $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sowie

$$\lambda_1 = \lambda_3 \iff a = 0 \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 = \lambda_3 \iff a = 1,$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ besitzt M_a die drei (paarweise) verschiedenen Eigenwerte λ_1, λ_2, λ_3 und ist damit als 3×3–Matrix diagonalisierbar.
- Für $a = 0$ besitzt M_0 den Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 2$; wegen

  $$M_0 - 1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  ergibt sich die geometrische Vielfachheit

  $$\gamma_1 = 3 - \operatorname{Rang}(M_0 - 1 \cdot E_3) = 3 - 2 = 1,$$

  und wegen $\gamma_1 \neq \alpha_1$ ist M_0 nicht diagonalisierbar.

- Für $a = 1$ besitzt M_1 den Eigenwert $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_2 = 2$; wegen

  $$M_1 - 1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  ergibt sich die geometrische Vielfachheit

  $$\gamma_2 = 3 - \operatorname{Rang}(M_1 - 1 \cdot E_3) = 3 - 2 = 1,$$

  und wegen $\gamma_2 \neq \alpha_2$ ist M_1 nicht diagonalisierbar.

Zusammenfassend ergibt sich

Matrix M_a		diagonalisierbar	
		ja	nein
invertierbar	ja	$a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$	$a = 1$
	nein	$a = -1$	$a = 0$

3.14 Für $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Diagonalmatrix $D = \lambda \cdot E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zu betrachten.

a) Wir zeigen für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$A \text{ ist zu } D \text{ ähnlich} \iff A = D.$$

Es ist „$\Longleftarrow$“ trivial: jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist mit $P = E_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ über

$$P^{-1}AP = E_n^{-1}AE_n = E_nA = A$$

zu sich selbst ähnlich.
Für „$\Longrightarrow$“ sei A eine zu D ähnliche Matrix; damit gibt es eine invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $A = P^{-1}DP$, und wir erhalten

$$A = P^{-1}\left(\lambda \cdot E_n\right)P \underset{\lambda \in \mathbb{R}}{=} \lambda \cdot (P^{-1}E_nP) = \lambda \cdot (P^{-1}P) = \lambda \cdot E_n = D.$$

b) Wir zeigen für eine obere Dreiecksmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, deren Diagonaleinträge alle gleich λ sind:

$$A \text{ ist diagonalisierbar} \iff A \text{ ist eine Diagonalmatrix.}$$

Es ist „$\Longleftarrow$“ trivial: jede Diagonalmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist zu sich selbst, also zu einer Diagonalmatrix ähnlich, mithin diagonalisierbar.
Für „$\Longrightarrow$“ sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisierbar; damit ist A zur Diagonalmatrix $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ähnlich, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A sind. Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $A - t \cdot E_n$ eine obere Dreiecksmatrix, deren Diagonaleinträge alle gleich $\lambda - t$ sind, und es folgt

$$\chi_A(t) = \det(A - t \cdot E_n) = (\lambda - t)^n;$$

damit ist

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \lambda \qquad \text{und damit} \qquad \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda \cdot E_n,$$

so daß A zur Matrix D ähnlich ist; gemäß a) folgt damit $A = D$.

3.15 a) Für die zu betrachtende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ 15 & -5 & -3 \\ -5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ergibt sich

$$E_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ 15 & -5 & -3 \\ -5 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ -15 & 6 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned}(E_3 - A)^2 &= \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ -15 & 6 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ -15 & 6 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 25-30+5 & -10+12-2 & -5+6-1 \\ 75-90+15 & -30+36-6 & -15+18-3 \\ -25+30-5 & 10-12+2 & 5-6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}(E_3 - A)^2 &= (E_3 - A)\cdot(E_3 - A) = E_3 \cdot (E_3 - A) - A\cdot(E_3 - A) = \\ &= (E_3 - A) - (A\cdot E_3 - A\cdot A) = E_3 - A - A + A^2 = E_3 - 2A + A^2\end{aligned}$$

gilt also $E_3 - 2A + A^2 = 0$ und damit

$$E_3 = 2A - A^2 = (2E_3)\cdot A - A\cdot A = (2E_3 - A)\cdot A;$$

damit ist die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertierbar mit der inversen Matrix

$$A^{-1} = 2E_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ 15 & -5 & -3 \\ -5 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -15 & 7 & 3 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert der Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so gibt es einen Eigenvektor $0 \neq x \in \mathbb{R}^3$ mit $A\cdot x = \lambda \cdot x$, also

$$(E_3 - A)\cdot x = E_3 \cdot x - A\cdot x = x - \lambda\cdot x = (1-\lambda)\cdot x$$

und damit

$$\begin{aligned}(E_3 - A)^2 \cdot x &= \big((E_3 - A)\cdot(E_3 - A)\big)\cdot x = (E_3 - A)\cdot\big((E_3 - A)\cdot x\big) = \\ &= (E_3 - A)\cdot\big((1-\lambda)\cdot x\big) \underset{1-\lambda\in\mathbb{R}}{=} (1-\lambda)\cdot\big((E_3 - A)\cdot x\big) = \\ &= (1-\lambda)\cdot\big((1-\lambda)\cdot x\big) = \big((1-\lambda)\cdot(1-\lambda)\big)\cdot x = (1-\lambda)^2\cdot x.\end{aligned}$$

Wegen $(E_3 - A)^2 = 0$ gilt

$$(1-\lambda)^2 \cdot x = (E_3 - A)^2 \cdot x = 0 \cdot x = 0,$$

woraus wegen $x \neq 0$ schon $(1-\lambda)^2 = 0$, also $1-\lambda = 0$ bzw. $\lambda = 1$, folgt; damit besitzt A höchstens einen Eigenwert, nämlich $\lambda = 1$. Wegen

$$A - 1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 15 & -6 & -3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{III}+\text{I}}{\overset{\text{II}-3\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\operatorname{Rang}(A - 1 \cdot E_3) = 1 < 3$; damit ist $\lambda = 1$ tatsächlich ein Eigenwert der Matrix A mit der geometrischen Vielfachheit $\gamma = 3 - 1 = 2$. Insgesamt besitzt $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ genau einen Eigenwert, und der zugehörige Eigenraum ist von der Dimension $\gamma = 2$; folglich gibt es höchstens zwei linear unabhängige Eigenvektoren von A, insbesondere also keine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A, so daß die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ nicht diagonalierbar ist.

3.16 a) Die Teilmenge $M = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid \det(A) = 0\}$ ist kein Unterraum von $\mathbb{R}^{3\times 3}$; wir weisen dies anhand eines Gegenbeispiels nach: für die beiden Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gilt wegen $\det(A_1) = 0$ und $\det(A_2) = 0$ zwar $A_1 \in M$ und $A_2 \in M$, für ihre Summe

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ergibt sich wegen $\det(A_1 + A_2) = 1 \neq 0$ jedoch $A_1 + A_2 \notin M$; damit ist M bezüglich $+$ nicht abgeschlossen, insbesondere kein Unterraum von $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

Die Teilmenge $N = \left\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A^\top = -A\right\}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^{3\times 3}$; wir weisen dies mit Hilfe des Unterraumkriteriums nach:

- Für die Nullmatrix $O \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt $O^\top = O = -O$; damit ist $O \in N$.
- Für alle $A_1, A_2 \in N$ ist $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A_1^\top = -A_1$ und $A_2^\top = -A_2$, und für $A_1 + A_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ergibt sich

$$(A_1 + A_2)^\top = A_1^\top + A_2^\top = (-A_1) + (-A_2) = -(A_1 + A_2);$$

  damit ist $A_1 + A_2 \in N$.
- Für alle $A \in N$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A^\top = -A$, und für $\lambda \cdot A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ergibt sich

$$(\lambda \cdot A)^\top = \lambda \cdot A^\top = \lambda \cdot (-A) = -(\lambda \cdot A);$$

  damit ist $\lambda \cdot A \in N$.

b) Es ist $N \subseteq M$: für alle $A \in N$ gilt nämlich $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A^\top = -A$, woraus

$$\det(A) = \det(A^\top) = \det(-A) \underset{A \in \mathbb{R}^{3\times 3}}{=} (-1)^3 \cdot \det(A) = -\det(A)$$

und damit $2 \cdot \det(A) = 0$ bzw. $\det(A) = 0$ folgt; damit ist $A \in M$.

Es ist $M \not\subseteq N$: es gilt nämlich für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

zum einen $\det(A) = 0$, also $A \in M$, und zum anderen

$$A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -A,$$

also $A \notin N$.

3.17 a) Nach dem Determinantenmultiplikationssatz gilt $\det(A\,B) = \det(A)\cdot\det(B)$; da nun ein Produkt zweier reeller Zahlen genau dann 0 ist, wenn mindestens einer der beiden Faktoren selbst 0 ist, erhält man damit in

$$\det(AB) = 0 \iff \det(A)\cdot\det(B) = 0 \iff \det(A) = 0 \text{ oder } \det(B) = 0$$

die Behauptung.

b) Die Aussage ist falsch, denn für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt zwar $A \neq 0$ und $B \neq 0$, aber dennoch $AB = 0$.

c) Zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ der Matrix A gibt es einen Eigenvektor $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ mit $A\,x = \lambda\,x$. Damit gilt

$$A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x;$$

damit ist $x \neq 0$ Eigenvektor von A^2 zum Eigenwert λ^2. Weiter gilt

$$A^3x = (AA^2)x = A(A^2x) = A(\lambda^2 x) = \lambda^2(Ax) = \lambda^2(\lambda x) = \lambda^3 x;$$

damit ist $x \neq 0$ Eigenvektor von A^3 zum Eigenwert λ^3. Führt man diese Überlegungen induktiv fort, so erhält man, daß $x \neq 0$ Eigenvektor von A^k zum Eigenwert λ^k für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist.

d) Die Aussage ist falsch, denn für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt zwar $A \neq E$ und $A \neq -E$, aber dennoch $A^2 = E$.

Damit sind die Aussagen a) und c) wahr, die Aussagen b) und d) dagegen falsch.

3.18 Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann symmetrisch, wenn $M^\top = M$ gilt, und genau dann orthogonal, wenn $M^\top \cdot M = E_n$ (oder gleichwertig $M \cdot M^\top = E_n$) ist.

a) Die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

sind (wegen $\det(A) = -1$ und $\det(B) = -1$) invertierbar und symmetrisch, ihr Produkt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist allerdings nicht symmetrisch.

b) Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ besitzt die Gestalt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ mit Koeffizienten a, b, $c \in \mathbb{R}$, und für die zu A inverse Matrix gilt dann

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix};$$

folglich ist auch A^{-1} symmetrisch.

c) Es ist

$$\left(C^\top A C\right)^\top = C^\top A^\top (C^\top)^\top \underset{A^\top = A}{=} C^\top A C;$$

folglich ist $C^\top A C$ eine symmetrische Matrix.

d) Es ist

$$\begin{aligned} (A \cdot B)^\top \cdot (A \cdot B) = \left(B^\top \cdot A^\top\right) \cdot (A \cdot B) = B^\top \cdot \left(A^\top \cdot A\right) \cdot B \underset{A^\top \cdot A = E_2}{=} \\ = B^\top \cdot E_2 \cdot B = B^\top \cdot B = E_2; \end{aligned}$$

damit ist auch $A \cdot B$ eine orthogonale Matrix.

e) Es ist

$$\left(A^{-1}\right)^\top \cdot A^{-1} \underset{A^{-1} = A^\top}{=} \left(A^{-1}\right)^\top \cdot A^\top = \left(A \cdot A^{-1}\right)^\top = E_2^\top = E_2;$$

damit ist auch A^{-1} eine orthogonale Matrix.

f) Die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

sind (wegen $\det(A) = 1$ und $\det(C) = 2$) invertierbar; darüber hinaus ist A (als Einheitsmatrix) sogar orthogonal, aber die Matrix

$$C^\top A C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ist etwa wegen $\det(C^\top A C) = 4$, also $\det(C^\top A C) \neq \pm 1$, nicht orthogonal.

Damit sind die Aussagen a) und f) falsch, die Aussagen b) bis e) dagegen wahr.

3.19 Sind die beiden Matrizen A und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ähnlich, gibt es also eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $B = T^{-1}AT$, so besitzen sie gemäß

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) &= \det\left(B - \lambda\, E_n\right) = \det\left(T^{-1}AT - \lambda\, E_n\right) = \\ &= \det\left(T^{-1}AT - T^{-1}(\lambda\, E_n)T\right) = \det\left(T^{-1}\left(A - \lambda\, E_n\right)T\right) = \\ &= \det(T)^{-1} \cdot \det\left(A - \lambda\, E_n\right) \cdot \det(T) = \det\left(A - \lambda\, E_n\right) = \chi_A(\lambda) \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ insbesondere dasselbe charakteristische Polynom.

Zur Widerlegung der falschen Aussagen wählen wir für $n = 2$ speziell

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

sowie
$$T_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \qquad \text{mit} \qquad T_0^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
und damit
$$B_0 = T_0^{-1} A_0 T_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$
insbesondere sind also die Matrizen A_0 und B_0 zueinander ähnlich.

a) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, so ist $\chi_A(\lambda) = 0$; folglich ist auch $\chi_B(\lambda) = 0$, so daß λ auch ein Eigenwert B ist.

b) Für den Vektor $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gilt $v \neq 0$ mit
$$A_0 \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
und
$$B_0 \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$
damit ist v zwar ein Eigenvektor von A_0, aber nicht von B_0.

c) Ist A invertierbar, so ist $\lambda = 0$ kein Eigenwert von A; gemäß a) ist dann $\lambda = 0$ auch kein Eigenwert von B, weswegen B invertierbar ist.

d) Die Matrix A_0 ist eine Diagonalmatrix, die Matrix B_0 nicht.

e) Ist $A = E_n$ die Einheitsmatrix, so gilt
$$B = T^{-1} E_n T = T^{-1} T = E_n.$$

f) Es ist
$$\det(A) = \chi_A(0) = \chi_B(0) = \det(B).$$

Damit sind die Aussagen a), c), e) und f) wahr, die Aussagen b) und d) dagegen falsch.

3.20 a) Die Aussage ist wahr: so ist etwa
$$v_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 23 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -17 \\ 23 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
wegen
$$\det(v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{vmatrix} 12 & 10 & 0 & 0 \\ -1 & -17 & 0 & 0 \\ 23 & 23 & 1 & 0 \\ 5 & 11 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{4.Spalte}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} \underbrace{(-1)^{4+4} \cdot 1}_{=1} \cdot \begin{vmatrix} 12 & 10 & 0 \\ -1 & -17 & 0 \\ 23 & 23 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$\underset{\text{3.Spalte}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} \underbrace{(-1)^{3+3} \cdot 1}_{=1} \cdot \begin{vmatrix} 12 & 10 \\ -1 & -17 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-17) - (-1) \cdot 10 = -194 \neq 0$$
eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

b) Die Aussage ist falsch: so ist etwa die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gemäß $A^\top = A$ symmetrisch und damit insbesondere diagonalisierbar, wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$$

allerdings nicht invertierbar.

c) Die Aussage ist falsch: so ist etwa die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 1 \neq 0$$

invertierbar; wegen

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, E_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 - 1 \cdot (-1) = \lambda^2 + 1 > 0$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist allerdings A ohne Eigenwert und damit insbesondere nicht diagonalisierbar.

d) Die Aussage ist wahr: sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^3 = A$. Für einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ von A gibt es einen Vektor $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ mit $A \cdot x = \lambda \cdot x$, und es folgt

$$\begin{aligned} A^2 \cdot x = (A \cdot A) \cdot x = A \cdot (A \cdot x) = A \cdot (\lambda \cdot x) = \\ = \lambda \cdot (A \cdot x) = \lambda \cdot (\lambda \cdot x) = (\lambda \cdot \lambda) \cdot x = \lambda^2 \cdot x \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} A^3 \cdot x = (A \cdot A^2) \cdot x = A \cdot (A^2 \cdot x) = A \cdot (\lambda^2 \cdot x) = \\ = \lambda^2 \cdot (A \cdot x) = \lambda \cdot (\lambda^2 \cdot x) = (\lambda \cdot \lambda^2) \cdot x = \lambda^3 \cdot x, \end{aligned}$$

woraus sich wegen $A^3 = A$ zunächst

$$\lambda^3 \cdot x = A^3 \cdot x = A \cdot x = \lambda \cdot x,$$

also

$$(\lambda^3 - \lambda) \cdot x = \lambda^3 \cdot x - \lambda \cdot x = 0,$$

ergibt; wegen $x \neq 0$ folgt

$$0 = \lambda^3 - \lambda = \lambda \cdot (\lambda^2 - 1) = \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 1)$$

und damit $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$.

3.21 a) Die Aussage ist falsch: mit $v \in \mathbb{R}^n$ ist auch $2\,v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, und nicht zum Eigenwert $2\,\lambda$ für $\lambda \neq 0$; im allgemeinen ist $2\,\lambda \in \mathbb{R}$ überhaupt kein Eigenwert der Matrix A.

b) Die Aussage ist wahr: zu einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und ihrem Quadrat $A^2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ betrachten wir die zugehörigen linearen Abbildungen

$$\ell_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \ell_A(x) = A\cdot x, \quad \text{und} \quad \ell_{A^2} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \ell_{A^2}(x) = A^2\cdot x.$$

Für alle $x \in \operatorname{Kern}(\ell_A)$ gilt $A\cdot x = 0$, woraus

$$A^2\cdot x = (A\cdot A)\cdot x = A\cdot(A\cdot x) = A\cdot 0 = 0,$$

also $x \in \operatorname{Kern}(\ell_{A^2})$, folgt; damit gilt $\operatorname{Kern}(\ell_A) \subseteq \operatorname{Kern}(\ell_{A^2})$.

c) Die Aussage ist falsch: wir betrachten als Gegenbeispiel die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, E_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Matrix A ist aber nicht ähnlich zur Einheitsmatrix E_2; denn ansonsten gäbe es eine Matrix $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mit $P^{-1} A\, P = E_2$, woraus

$$A = P\, E_2\, P^{-1} = P\, P^{-1} = E_2,$$

also ein Widerspruch, folgt.

d) Die Aussage ist wahr: wir verwenden die für jede quadratische Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gültige Beziehung

$$(*) \quad M \text{ invertierbar} \iff \det(M) \neq 0$$

und erhalten für alle $A,\, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Hilfe des Determinantenmultiplikationssatzes $(\star)$ dann

$$\begin{aligned} A\cdot B \text{ invertierbar} &\underset{(*)}{\iff} \det(A\cdot B) \neq 0 \underset{(\star)}{\iff} \\ &\iff \det(A)\cdot\det(B) \neq 0 \underset{\text{in } \mathbb{R}}{\iff} \big(\det(A) \neq 0 \text{ und } \det(B) \neq 0\big) \underset{(*)}{\iff} \\ &\iff \big(A \text{ invertierbar und } B \text{ invertierbar}\big). \end{aligned}$$

3.22 a) Für eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ betrachten wir die zugehörige lineare Abbildung

$$\ell_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad \ell_M(x) = M\cdot x;$$

da der Bildraum $\operatorname{Bild}(\ell_M)$ von ℓ_M mit dem Spaltenraum von M übereinstimmt, gilt $\dim \operatorname{Bild}(\ell_M) = \operatorname{Rang}(M)$. Sei nun $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $y \in \operatorname{Bild}(\ell_{A^2})$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$y = \ell_{A^2}(x) = A^2\cdot x = (A\cdot A)\cdot x = A\cdot(A\cdot x) = \ell_A(A\cdot x)$$

mit $A\cdot x \in \mathbb{R}^n$, es ist also $y \in \operatorname{Bild}(\ell_A)$ und damit $\operatorname{Bild}(\ell_{A^2}) \subseteq \operatorname{Bild}(\ell_A)$, und wir erhalten

$$\operatorname{Rang} A^2 = \dim \operatorname{Bild}(\ell_{A^2}) \leq \dim \operatorname{Bild}(\ell_A) = \operatorname{Rang} A.$$

Damit ist die Aussage wahr.

b) Für eine orthogonale Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt nach Definition

$$B \cdot B^\top = E_n = B^\top \cdot B;$$

folglich ist die Matrix B invertierbar, und es gilt $B^{-1} = B^\top$. Damit ist die Aussage wahr.

c) Für die Nullmatrix $C = O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt $C^2 = O^2 = O$ und damit

$$\det C^2 = 0 = \det C,$$

sie ist aber wegen

$$C \cdot C^\top = O \cdot O^\top = O \cdot O = O \neq E_n$$

keine orthogonale Matrix. Damit ist die Aussage falsch.

3.23 a) Für lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gilt stets

$$g \circ f = 0 \iff \operatorname{Bild}(f) \subseteq \operatorname{Kern}(g).$$

- Für „$\Longrightarrow$“ sei $g \circ f = 0$ sowie $y \in \operatorname{Bild}(f)$; damit gibt es ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = y$, und wir erhalten

  $$g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = 0(x) = 0,$$

  also $y \in \operatorname{Kern}(g)$. Folglich gilt $\operatorname{Bild}(f) \subseteq \operatorname{Kern}(g)$.
- Für „$\Longleftarrow$“ sei $\operatorname{Bild}(f) \subseteq \operatorname{Kern}(g)$; für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $f(x) \in \operatorname{Bild}(f)$ und damit nach Voraussetzung $f(x) \in \operatorname{Kern}(g)$, also $g(f(x)) = 0$, so daß $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 0$ folgt. Folglich ist $g \circ f = 0$ die Nullabbildung.

Damit ist die Aussage wahr.

b) Wir betrachten die nichtquadratische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 4};$$

es sind zwar die vier Spaltenvektoren $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \mathbb{R}^5$ linear unabhängig, die fünf Zeilenvektoren $e_1^\top, e_2^\top, e_3^\top, e_4^\top, 0 \in \mathbb{R}^{1\times 4}$ jedoch (schon aus Dimensionsgründen) linear abhängig. Damit ist die Aussage falsch.

c) Für jede invertierbare Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit der inversen Matrix A^{-1} gilt

$$A \cdot A^{-1} = E_n = A^{-1} \cdot A,$$

woraus sich durch Transponierung

$$\left(A \cdot A^{-1}\right)^\top = E_n^\top = \left(A^{-1} \cdot A\right)^\top$$

und folglich

$$\left(A^{-1}\right)^\top \cdot A^\top = E_n = A^\top \cdot \left(A^{-1}\right)^\top$$

ergibt; demnach ist auch $A^\top$ invertierbar mit

$$\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top.$$

Damit ist die Aussage wahr.

d) Für $n = 2$ betrachten wir die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2};$$

es gilt

$$\det(T) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 1,$$

und die beiden Spaltenvektoren sind gemäß

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 0$$

zueinander senkrecht (bezüglich des Standardskalarprodukts), wegen

$$T \cdot T^\top = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \neq E_2$$

ist die Matrix T jedoch nicht orthogonal. Damit ist die Aussage falsch.

3.24 a) Die Aussage ist wahr: Zwei Matrizen A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$ gibt; speziell für $P = E_n$ ergibt sich $B = A$, so daß jede Matrix zu sich selbst ähnlich ist. Damit ist jede Diagonalmatrix zu einer symmetrischen Matrix (nämlich sich selbst) ähnlich.

b) Die Aussage ist falsch: Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ liegen der Spaltenraum $S \subseteq \mathbb{R}^{m\times 1}$ und der Zeilenraum $Z \subseteq \mathbb{R}^{1\times n}$ für $m \neq 1$ oder $n \neq 1$ nicht in einem gemeinsamen Vektorraum, so daß sie keine komplementären Unterräume sein können.

c) Die Aussage ist falsch: Für einen Vektorraum $V \neq \{0_V\}$ wählen wir einen Vektor $v \neq 0_V$ und setzen $v_1 = v_2 = v_3 = v$; damit sind v_1, v_2, v_3 linear abhängig, aber der von ihnen erzeugte Untervektorraum $\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \langle v\rangle$ besitzt die Dimension $1 \neq 2$.

d) Die Aussage ist wahr: Besitzt der Endomorphismus $f : V \to V$ eines Vektorraums V den Eigenwert $\lambda = 0$, so existiert ein zugehöriger Eigenvektor $v \in V$, und es gilt

$$v \neq 0_V \qquad \text{und} \qquad f(v) = \lambda \cdot v = 0 \cdot v = 0_V;$$

demnach ist $v \in \mathrm{Kern}(f)$, damit ist $\mathrm{Kern}(f) \neq \{0_V\}$, also $\dim \mathrm{Kern}(f) > 0$.

e) Die Aussage ist wahr: Gilt für zwei Matrizen A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Beziehung $A \cdot B = E_n$, so ist $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ invertierbar mit $A^{-1} = B$, und damit gilt

$$B \cdot A = A^{-1} \cdot A = E_n;$$

hier wird speziell $n = 3$ betrachtet.

f) Die Aussage ist falsch: für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gilt zwar

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

aber

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

3.25 a) Die Aussage ist (sogar für beliebiges $n \in \mathbb{N}$) wahr: ist nämlich $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ orthogonal, so gilt nach Definition $A^\top A = E_n$, mit dem Determinantenmultiplikationssatz also

$$1 = \det(E_n) = \det(A^\top A) = \det(A^\top)\,\det(A),$$

woraus wegen $\det(A^\top) = \det(A)$ schon

$$1 = \det(A^\top)\,\det(A) = (\det(A))^2$$

und damit $\det(A) = 1$ oder $\det(A) = -1$ folgt.

b) Die Aussage ist (sogar für beliebiges $n \in \mathbb{N}$) wahr: ist nämlich $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ orthogonal, so gilt nach Definition $A^\top A = E_n$; ist nun $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, so gilt

$$A\,x = \lambda\,x \qquad \text{für ein} \quad 0 \neq x \in \mathbb{R}^n,$$

woraus

$$\begin{aligned} x^\top x = x^\top E_n\,x = x^\top \left(A^\top A\right) x = \left(x^\top A^\top\right)(A\,x) &= \\ = (A\,x)^\top (A\,x) = (\lambda\,x)^\top (\lambda\,x) = \lambda^2 \left(x^\top x\right), \end{aligned}$$

wegen $x^\top x > 0$ also $1 = \lambda^2$ und damit $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$ folgt.

c) Die Aussage ist falsch: die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

ist wegen

$$A^\top A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

orthogonal, besitzt aber wegen

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 - (-1)\cdot 1 = \lambda^2 + 1 > 0$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ keinen (reellen) Eigenwert.

d) Die Aussage ist (sogar für beliebiges $n \in \mathbb{N}$) wahr: ist nämlich $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ orthogonal, so gilt nach Definition $A^\top A = E_n$; damit ist A invertierbar mit $A^{-1} = A^\top$.

e) Die Aussage ist falsch: die Matrix $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ von c) ist orthogonal, wegen

$$A^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

aber nicht symmetrisch.

3.26 a) Die Aussage ist falsch: Die obere Dreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

besitzt die beiden verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$, ist also als 2×2–Matrix diagonalisierbar. Wir nehmen zum Widerspruch die Existenz einer orthogonalen Basis v_1, v_2 von $(\mathbb{R}^2, \circ)$ aus Eigenvektoren von A an; dann ist aber $\frac{1}{\|v_1\|} v_1$, $\frac{1}{\|v_2\|} v_2$ eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^2, \circ)$ aus Eigenvektoren von A. Folglich ist A sogar orthogonal diagonalisierbar, mithin symmetrisch, im Widerspruch zu $A^\top \neq A$.

b) Die Aussage ist wahr: Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$A^2 - 2\,A = -E_3 \qquad \text{bzw.} \qquad A^2 - 2\,A + E_3 = O.$$

Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, so gibt es einen Eigenvektor $0 \neq x \in \mathbb{R}^3$ mit $A \cdot x = \lambda \cdot x$, und wegen

$$A^2 \cdot x = A \cdot (A \cdot x) = A \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (A \cdot x) = \lambda \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda^2 \cdot x$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 = O \cdot x = \left(A^2 - 2\,A + E_3\right) \cdot x &= A^2 \cdot x - 2\,A \cdot x + E_3 \cdot x = \\ &= \lambda^2 \cdot x - 2\,\lambda \cdot x + 1 \cdot x = \left(\lambda^2 - 2\,\lambda + 1\right) \cdot x = (\lambda - 1)^2 \cdot x, \end{aligned}$$

wegen $x \neq 0$ also $(\lambda - 1)^2 = 0$ und damit $\lambda = 1$.

c) Die Aussage ist falsch: Ist etwa $B = O \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Nullmatrix, so gilt für jede (nicht notwendigerweise invertierbare) Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ wegen $BA = O$ schon

$$\text{Spaltenraum}(BA) = \{0\} = \text{Spaltenraum}(B);$$

wir können also als Gegenbeispiel etwa $A = O$ wählen.

d) Die Aussage ist falsch: Die Gleichung $x^2 + y^2 + ax + b = 0$ definiert im $\mathbb{R}^2$ etwa für $a = 0$ und $b = 0$ einen Punkt oder für $a = 0$ und $b > 0$ die leere Menge, also nicht immer eine Ellipse.

e) Die Aussage ist wahr: Für a, $b \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung $(*)$ $x^2 + y + ax + b = 0$ im $\mathbb{R}^2$ zu betrachten; wegen

$$\begin{aligned} (*) \quad &\iff \quad \left(x^2 + ax + \frac{a^2}{4}\right) - \frac{a^2}{4} + y + b = 0 \\ &\iff \quad \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + b - \frac{a^2}{4}\right) = 0 \\ &\iff \quad u^2 + v = 0 \qquad \text{mit} \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{a}{2} \\ y + b - \frac{a^2}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

besitzt $(*)$ die affine Normalform $u^2 + v = 0$ und definiert damit eine Parabel.

f) Die Aussage ist wahr: Seien U_1, U_2, U_3 Unterräume des $\mathbb{R}$–Vektorraums V mit $U_2 \subseteq U_3$. Für alle $v \in U_1 + U_2$ existieren $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ mit $v = u_1 + u_2$, und wegen $U_2 \subseteq U_3$ gilt $u_2 \in U_3$ und damit $v = u_1 + u_2 \in U_1 + U_3$; es ist also $U_1 + U_2 \subseteq U_1 + U_3$.