Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Lineare Algebra und analytische Geometrie 2
— Lösungsvorschlag —

2.1 a) Es ist

$$A - \lambda \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}+2\cdot\mathrm{I}}{\underset{\mathrm{III}+\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\mathrm{Rang}(A - \lambda \cdot E_3) = 1 < 3;$$

damit ist $\lambda = 3$ ein Eigenwert von A, und für den Eigenraum ergibt sich

$$\mathrm{Eig}(A;\lambda) = \mathbb{R} \cdot u_1 + \mathbb{R} \cdot u_2 \qquad \text{mit} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Es ist $x \neq 0$ mit

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

damit ist $x \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\mu = 7$.

c) Gemäß a) sind u_1 und u_2 linear unabhängige Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda = 3$, und gemäß b) ist x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\mu = 7$; damit sind u_1, u_2, x linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^3$, wegen $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ also schon eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren der Matrix A. Folglich ist A reell diagonalisierbar, und mit der invertierbaren Matrix

$$P = (u_1, u_2, x) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \mathrm{diag}\,(\lambda, \lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ergibt sich die Beziehung $P^{-1}AP = D$.

2.2 a) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{2. Spalte}}{=}$$

$$= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot \big[(1-\lambda)\cdot(3-\lambda) - 1 \cdot (-1)\big] =$$

$$= (2-\lambda) \cdot \big(3 - 4\,\lambda + \lambda^2 + 1\big) = (2-\lambda) \cdot \big(4 - 4\,\lambda + \lambda^2\big) = (2-\lambda)^3;$$

wegen

$$\chi_M(\lambda) = 0 \iff (2-\lambda)^3 = 0 \iff \lambda = 2$$

ist $\lambda = 2$ der einzige Eigenwert der Matrix M. Wegen

$$M - \lambda\, E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(M; \lambda)$ der Matrix M zum Eigenwert $\lambda = 2$; die Eigenvektoren sind damit alle vom Nullvektor verschiedenen Linearkombinationen von v_1 und v_2, also alle Vektoren

$$v = \mu_1 \cdot v_1 + \mu_2 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad (\mu_1, \mu_2) \neq (0,0).$$

b) Gemäß a) sind höchstens zwei Eigenvektoren der Matrix M linear unabhängig; damit existiert keine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von M, und folglich ist die Matrix M nicht diagonalisierbar, also nicht ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

Alternativ läßt sich auch unter Verwendung des Hauptsatzes über diagonalisierbare Matrizen wie folgt argumentieren: Da $\lambda = 2$ eine dreifache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_M(\lambda)$ ist, ergibt sich für den Eigenwert $\lambda = 2$ die algebraische Vielfachheit $\alpha = 3$, und wegen $\mathrm{Rang}(M - \lambda\, E_3) = 1$ ist die geometrische Vielfachheit $\gamma = 3 - 1 = 2$; wegen $\gamma < \alpha$ ist die Matrix M nicht diagonalisierbar, also nicht ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

2.3 Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{1. Zeile}}{=}$$

$$= (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot \big[(1-\lambda)^2 - 1^2\big] =$$

$$= (1-\lambda) \cdot \big[-\lambda \cdot (2-\lambda)\big] = -\lambda\,(1-\lambda)\,(2-\lambda);$$

wegen

$$\chi_M(\lambda) = 0 \iff \lambda = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda = 1 \quad \text{oder} \quad \lambda = 2$$

besitzt M genau die drei einfachen Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$. Wegen

$$M - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\operatorname{Eig}(M; \lambda_1)$ der Matrix M zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$, wegen

$$M - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\operatorname{Eig}(M; \lambda_2)$ der Matrix M zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, und wegen

$$M - \lambda_3 E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\operatorname{Eig}(M; \lambda_3)$ der Matrix M zum Eigenwert $\lambda_3 = 2$. Damit ist v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren der Matrix M zu den Eigenwerten λ_1, λ_2, λ_3, so daß sich mit der invertierbaren Matrix

$$T = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

die Beziehung $D = T^{-1} M T$ ergibt.

2.4 a) Wegen

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda E_3) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 & 5 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & -4 & -5-\lambda \end{pmatrix} \underset{\text{III+I}}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 & 5 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -\lambda & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \underset{(-\lambda)\text{ aus III}}{=} (-\lambda) \cdot \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 & 5 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=}$$

$$= -\lambda \cdot [((2-\lambda)(1-\lambda) + 4 + 0) - (5\,(1-\lambda) + 0 + 0)] =$$

$$= -\lambda\left[\lambda^2 - 3\lambda + 2 + 4 - 5 + 5\lambda\right] = -\lambda\left(\lambda^2 + 2\lambda + 1\right);$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$\chi_M(\lambda) = -\lambda^3 - 2\,\lambda^2 - \lambda$$

das charakteristische Polynom der gegebenen Matrix M.

b) Wegen

$$\chi_M(\lambda) = -\lambda\left(\lambda^2 + 2\lambda + 1\right) = -\lambda\,(\lambda+1)^2$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt die Matrix M die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -1$.

- Da $\lambda_1 = 0$ die algebraische Vielfachheit $\alpha_1 = 1$ besitzt, ist auch die geometrische Vielfachheit $\gamma_1 = 1$ und damit der Eigenraum $\mathrm{Eig}(M, \lambda_1)$ eindimensional.
- Da $\lambda_2 = -1$ die algebraische Vielfachheit $\alpha_2 = 2$ besitzt, kommt für die geometrische Vielfachheit $\gamma_2 = 1$ oder $\gamma_2 = 2$ in Frage; wegen

$$M - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+\frac{2}{3}\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+\frac{2}{3}\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  ist

$$\gamma_2 = 3 - \mathrm{Rang}\,(M - \lambda_2 E_3) = 3 - 2 = 1;$$

  damit ist auch der Eigenraum $\mathrm{Eig}(M, \lambda_2)$ eindimensional.

Folglich sind höchstens zwei Eigenvektoren der Matrix M, nämlich ein Eigenvektor v_1 zum Eigenwert λ_1 und ein Eigenvektor v_2 zum Eigenwert λ_2, linear unabhängig; damit existiert keine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von M, und folglich ist die Matrix M nicht diagonalisierbar.

Alternativ läßt sich auch unter Verwendung des Hauptsatzes über diagonalisierbare Matrizen wie folgt argumentieren: Da für den Eigenwert $\lambda_2 = -1$ die algebraische Vielfachheit $\alpha_2 = 2$ nicht mit der geometrischen Vielfachheit $\gamma_2 = 1$ übereinstimmt, ist die Matrix M nicht diagonalisierbar.

2.5 a) Die Eigenwerte der gegebenen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

stimmen mit den Nullstellen ihres charakteristischen Polynoms überein; für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 & -3 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{Spalten}}{\underset{\mathrm{I}+\mathrm{III},\ \mathrm{II}-\mathrm{III}}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 1-\lambda & -2+\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{Zeilen}}{\underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{=}} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -2+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{Zeilen}}{\underset{\mathrm{III}+\mathrm{II}}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{Dreiecks-}}{\underset{\text{matrix}}{=}} (1-\lambda)^2 \cdot (2-\lambda)$$

mit

$$\chi_A(\lambda) = 0 \iff \big(\lambda = 1 \text{ oder } \lambda = 2\big),$$

so daß die Matrix A genau die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ besitzt.

b) Als doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda)$ besitzt der Eigenwert $\lambda_1 = 1$ die algebraische Vielfachheit $\alpha_1 = 2$; wegen

$$A - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{3}\cdot \mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-2\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $r_1 = \mathrm{Rang}(A - \lambda_1 E_3) = 2$, so daß $\lambda_1 = 1$ die geometrische Vielfachheit $\gamma_1 = 3 - r_1 = 1$ besitzt. Wegen $\gamma_1 < \alpha_1$ kann die Matrix A nicht diagonalisierbar sein.

2.6 Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) \quad &= \quad \det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 & 1 \\ -18 & 8-\lambda & 3 \\ 6 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\mathrm{I}+\mathrm{III}}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2-\lambda \\ -18 & 8-\lambda & 3 \\ 6 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{aus I}}{\overset{2-\lambda}{=}} (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -18 & 8-\lambda & 3 \\ 6 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\mathrm{II}+3\mathrm{III}}{=} (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 6-3\lambda \\ 6 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{aus II}}{\overset{2-\lambda}{=}} (2-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{Sarrus}}{=} (2-\lambda)^2 \cdot (1-\lambda) = -(\lambda-2)^2 \cdot (\lambda - 1);
\end{aligned}$$

damit besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 2$ und $\lambda_2 = 1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_2 = 1$ (und damit auch der geometrischen Vielfachheit $\gamma_2 = 1$). Wegen

$$A - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ -18 & 6 & 3 \\ 6 & -2 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-3\mathrm{III}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist auch die geometrische Vielfachheit $\gamma_1 = 2$, und $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine Basis von $\mathrm{Eig}(A; \lambda_1)$; ferner ist wegen

$$A - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ -18 & 7 & 3 \\ 6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}+3\mathrm{III}}{\overset{\mathrm{I}+\mathrm{III}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+2\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{III}-6\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(A; \lambda_2)$. Insgesamt ist A reell diagonalisierbar, und v_1, v_2 und v_3 ist eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A.

2.7 a) Die gegebene Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 6 & -1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

besitzt wegen

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda \cdot E_3) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 & -3 \\ 6 & -1-\lambda & 6 \\ 6 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{2. Spalte}}{=} (-1)^{2+2}(-1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -4-\lambda & -3 \\ 6 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(\lambda+1) \cdot \left[(-4-\lambda)\cdot(5-\lambda) - (-3)\cdot 6\right] \\
&= -(\lambda+1) \cdot \left[\lambda^2 - \lambda - 2\right] = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)
\end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ genau die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$.

b) Gemäß a) sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$ die beiden Eigenwerte von A. Wegen

$$A - \lambda_1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 6 & 0 & 6 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \underset{\text{III}+2\text{I}}{\overset{\text{II}+2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A, \lambda_1)$; wegen

$$A - \lambda_2 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -3 \\ 6 & -3 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}+\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -6 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A, \lambda_2)$. Folglich ist

$$\mathrm{Eig}(A, \lambda_1) = \mathbb{R} \cdot u_1 + \mathbb{R} \cdot u_2 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Eig}(A, \lambda_2) = \mathbb{R} \cdot u_3.$$

c) Gemäß b) sind u_1, u_2 eine Basis von $\mathrm{Eig}(A, \lambda_1)$ und u_3 eine Basis von $\mathrm{Eig}(A, \lambda_2)$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$; damit sind u_1, u_2, u_3 drei linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^3$, wegen $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ also schon eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A. Folglich ist A diagonalisierbar.

d) Eine Basis v_1, v_2, v_3 von $\mathbb{R}^3$, bezüglich der sowohl $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ als auch

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Diagonalform haben, muß aus lauter Eigenvektoren sowohl von A als auch von B bestehen. Wegen $\dim(\mathrm{Eig}(A, \lambda_1)) = 2$ und $\dim(\mathrm{Eig}(A, \lambda_2)) = 1$ sind damit zwei dieser Basisvektoren aus $\operatorname{Eig}(A, \lambda_1)$ und der dritte Basisvektor aus $\operatorname{Eig}(A, \lambda_2)$; dieser besitzt also die Gestalt $\alpha \cdot u_3$ für ein $\alpha \neq 0$. Wegen

$$B \cdot u_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist aber u_3 und damit auch $\alpha \cdot u_3$ kein Eigenvektor von B. Folglich kann es keine Basis von $\mathbb{R}^3$ mit der gewünschten Eigenschaft geben.

2.8 a) Es ist

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & -4 & -2 & -3 \end{vmatrix} \underset{\text{III}+2\cdot\text{II},\ \text{IV}-2\cdot\text{II}}{\overset{\text{I}-2\cdot\text{II}}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\text{1. Spalte}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 6 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{vmatrix} \underset{\text{3 aus I, II, III}}{=} -3^3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\text{Sarrus}}{=} -27 \cdot \big((0+0+0) - (-6+0+2)\big) = -27 \cdot 4 = -108.$$

b) Wegen

$$M - 3 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & 2 & 6 \\ 2 & -4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-2\cdot\text{I},\ \text{IV}+2\cdot\text{I}}{\overset{\text{II}+\text{I}}{=}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$\operatorname{Rang}(M - 3 \cdot E_4) = 1 < 4;$$

folglich ist $\lambda = 3$ ein Eigenwert der Matrix M, und für den Eigenraum $\operatorname{Eig}(M, \lambda = 3)$ ergibt sich

$$\dim \operatorname{Eig}(M, \lambda = 3) = 4 - \operatorname{Rang}(M - 3 \cdot E_4) = 4 - 1 = 3.$$

c) Gemäß b) besitzt M den Eigenwert $\lambda = 3$ der geometrischen Vielfachheit $\gamma = 3$; für die algebraische Vielfachheit gilt demnach $\alpha \geq 3$, und das charakteristische Polynom $\chi_M(t)$ besitzt die Gestalt

$$\chi_M(t) = (t-3)^3 \cdot (t - \mu)$$

für ein $\mu \in \mathbb{R}$. Damit gilt

$$\det(M) = \chi_M(0) = (0-3)^3 \cdot (0 - \mu) = 27 \cdot \mu,$$

unter Verwendung von a) also

$$27 \cdot \mu = -108 \qquad \text{bzw.} \qquad \mu = -4;$$

damit besitzt M einen weiteren Eigenwert, nämlich $\mu = -4$.
Mit einer Basis b_1, b_2, b_3 von $\operatorname{Eig}(M, \lambda = 3)$ und einem Eigenvektor b_4 von M zum Eigenwert $\mu = -4$ erhält man eine Basis b_1, b_2, b_3, b_4 von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von M; damit ist die Matrix M diagonalisierbar.

2.9 Für das charakteristische Polynom χ_A der gegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gilt

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) \quad &= \quad \det(A - \lambda \cdot E_4) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -4 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{Laplace}}{\underset{\text{1. Zeile}}{=}} (-1)^{1+1}(-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 5 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{1+4}(-4) \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{Laplace}}{\underset{\text{1. Z/1. Sp}}{=}} -\lambda \cdot (-1)^{1+1}(-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 5 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \lambda^2 \cdot \big((-\lambda)^2 - 5 \cdot 1\big) + 4 \cdot 1^2 = (\lambda^2)^2 - 5\lambda^2 + 4 \\
&\overset{\text{Vieta}}{=} \big(\lambda^2 - 1\big)\big(\lambda^2 - 4\big) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2)
\end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt A die vier verschiedenen reellen Eigenwerte

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 2 \quad \text{und} \quad \lambda_4 = -2$$

und ist damit als 4×4–Matrix reell diagonalisierbar.

Wegen

$$\begin{aligned}
A - \lambda_1 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{II+I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{III+II}}{\rightsquigarrow} \\
\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{IV+III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, wegen

$$\begin{aligned}
A - \lambda_2 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{II}}{\rightsquigarrow} \\
\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}-\text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$, wegen

$$A - \lambda_3 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}+\frac{1}{2}\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+\frac{1}{2}\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{IV}+\frac{1}{2}\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_3 = 2$, und wegen

$$A - \lambda_4 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}-\frac{1}{2}\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-\frac{1}{2}\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{IV}-\frac{1}{2}\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_4 = -2$. Folglich ist v_1, v_2, v_3, v_4 eine Basis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A.

2.10 a) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_4) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{1. Zeile}}{=}$$

$$= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{1. Spalte}}{=}$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \cdot (2-\lambda)^2;$$

wegen

$$\chi_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 1 \quad \text{oder} \quad \lambda = 2$$

besitzt A genau die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. Wegen

$$A - \lambda_1 E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bildet $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A; \lambda_1)$, und wegen

$$A - \lambda_2 E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bildet $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A; \lambda_2)$. Da höchstens zwei Eigenvektoren der Matrix A linear unabhängig sind, existiert keine Basis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A; folglich ist die Matrix A nicht diagonalisierbar.

b) Wegen $\det(A) = \chi_A(0) = 4 \neq 0$ ist die Matrix A invertierbar.

c) Da gemäß a) höchstens zwei Eigenvektoren der Matrix A linear unabhängig sind, kann eine Basis des $\mathbb{R}^4$ auch nur höchstens zwei Eigenvektoren von A, etwa v_1 und v_2 enthalten. Mit $B = (e_1, v_1, e_3, v_2) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gilt

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks-}}{=}} 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \neq 0;$$

damit bilden e_1, v_1, e_3, v_2 eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

2.11 a) Wegen

$$A - 1 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \underset{\text{IV+3I}}{\overset{\text{II}-\text{I, III}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III}\leftrightarrow\text{IV}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$\mathrm{Rang}\,(A - 1 \cdot E_4) = 3 < 4;$$

folglich ist $\lambda_1 = 1$ ein Eigenwert der Matrix A mit der geometrischen Vielfachheit

$$\gamma_1 = 4 - \operatorname{Rang}(A - 1 \cdot E_4) = 1.$$

Wegen

$$A - (-1) \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}-3\text{I}}{\overset{\text{II}+\text{I},\ \text{III}+\text{I}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \underset{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}{\leadsto}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-3\text{II}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}-\text{III}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$\operatorname{Rang}(A - (-1) \cdot E_4) = 3 < 4;$$

folglich ist $\lambda_2 = -1$ ein Eigenwert der Matrix A mit der geometrischen Vielfachheit

$$\gamma_2 = 4 - \operatorname{Rang}(A - (-1) \cdot E_4) = 1.$$

b) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, E_4) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 3 & 0 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{III}-\text{II}}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{(\lambda-1)\text{ aus III}}{=} (\lambda-1)\cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Spalte}}{\underset{\text{II}+\text{III}}{=}} (\lambda-1)\cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{3. Zeile}}{=} (\lambda-1)\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 3 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{II}-\text{I}}{=} -(\lambda-1)\cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{(\lambda-1)\text{ aus II}}{=} -(\lambda-1)\cdot(\lambda-1) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{Sarrus}}{=} -(\lambda-1)^2 \cdot [(\lambda(-2-\lambda) + 0 - 4) - (-3 + 0 + 0)]$$

$$= (\lambda-1)^2 \cdot \big(\lambda^2 - 2\lambda + 1\big) = (\lambda-1)^2 \cdot (\lambda+1)^2 .$$

c) Die Matrix A besitzt gemäß b) wegen

$$\chi_A(\lambda) = 0 \iff (\lambda-1)^2 \cdot (\lambda+1)^2 = 0 \iff \lambda = 1 \text{ oder } \lambda = -1$$

genau die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$, welche gemäß a) jeweils die geometrische Vielfachheit $\gamma_1 = 1$ und $\gamma_2 = 1$ besitzen. Damit gibt es höchstens zwei linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix A, insbesondere also keine Basis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A; damit ist A nicht diagonalisierbar.

Alternativ könnte man auch mit dem Hauptsatz über diagonalisierbare Matrizen argumentieren: gemäß b) besitzen die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ jeweils die algebraische Vielfachheit $\alpha_1 = 2$ und $\alpha_2 = 2$, welche damit nicht mit der in a) bestimmten geometrischen Vielfachheit $\gamma_1 = 1$ und $\gamma_2 = 1$ übereinstimmen; $\gamma_1 < \alpha_1$ wie $\gamma_2 < \alpha_2$ zeigt, daß A nicht diagonalisierbar ist.

2.12 Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ besitzt genau dann die (vom Nullvektor verschiedenen) Vektoren $v_1,\ v_2,\ v_3 \in \mathbb{R}^3$ als Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{R}$, wenn

$$A \cdot v_1 = \lambda_1 \cdot v_1, \qquad A \cdot v_2 = \lambda_2 \cdot v_2, \qquad A \cdot v_3 = \lambda_3 \cdot v_3,$$

zusammengefaßt

$$A \cdot (v_1, v_2, v_3) = (A \cdot v_1, A \cdot v_2, A \cdot v_3) = (\lambda_1 \cdot v_1, \lambda_2 \cdot v_2, \lambda_3 \cdot v_3),$$

also

$$(*) \qquad A \cdot B = C$$

mit $B = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $C = (\lambda_1 \cdot v_1, \lambda_2 \cdot v_2, \lambda_3 \cdot v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, gilt; für die hier gegebenen Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und Zahlen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -1$ ergibt sich also

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad \text{und} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Wegen

$$(B \mid E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}}{\underset{\mathrm{III}+\mathrm{I}}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{(-\frac{1}{5})\cdot\mathrm{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}-2\cdot\mathrm{II}}{\underset{\mathrm{III}-2\cdot\mathrm{II}}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 6 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 1 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{6}\cdot\mathrm{III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{15} & \frac{1}{30} & \frac{1}{6} \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}-\mathrm{III}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{15} & \frac{1}{30} & \frac{1}{6} \end{array}\right) = (E_3 \mid B')$$

ist die Matrix $B \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ invertierbar, und es gilt

$$B^{-1} = B' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{15} & \frac{1}{30} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 10 & 5 & -5 \\ -6 & 12 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Folglich erhält man

$$(*) \qquad A \cdot B = C \iff A = C \cdot B^{-1},$$

also

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 10 & 5 & -5 \\ -6 & 12 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 2 & -14 & -10 \\ -14 & 23 & -5 \\ -10 & -5 & -25 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

2.13 a) Für die gegebene Matrix

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$$

ergibt sich

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

sowie

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E_3$$

und damit

$$A^{2012}=A^{3\cdot 670+2}=\left(A^3\right)^{670}\cdot A^2={E_3}^{670}\cdot A^2=E_3\cdot A^2=A^2.$$

b) Die Matrix $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi_A(\lambda)=\det(A-\lambda\,E_3)=\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\0&-\lambda&1\\1&0&-\lambda\end{vmatrix}\underset{\text{Sarrus}}{=}(-\lambda)^3+1^3=-\lambda^3+1$$

für alle $\lambda\in\mathbb{R}$, damit wegen

$$\chi_A(\lambda)=0\iff -\lambda^3+1=0\iff \lambda^3=1\iff \lambda=1$$

den einzigen reellen Eigenwert $\lambda_1=1$, und wegen

$$A-\lambda_1\,E_3=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\underset{\text{III+I}}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\underset{\text{III+II}}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ist $v=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A;\lambda_1)$. Ferner besitzt die Matrix

$$A'=A-A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$$

das charakteristische Polynom

$$\chi_{A'}(\lambda)=\det(A'-\lambda\,E_3)=\begin{vmatrix}-\lambda&1&-1\\-1&-\lambda&1\\1&-1&-\lambda\end{vmatrix}\underset{\text{Sarrus}}{=}$$

$$=\left((-\lambda)^3+1^3+(-1)^3\right)-(\lambda+\lambda+\lambda)=-\lambda^3-3\lambda=-\lambda\left(\lambda^2+3\right)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, damit wegen

$$\chi_{A'}(\lambda) = 0 \iff -\lambda\left(\lambda^2+3\right) = 0 \underset{\lambda^2+3>0}{\iff} \lambda = 0$$

den einzigen reellen Eigenwert $\lambda_2 = 0$, und wegen

$$A' - \lambda_2\, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{III+II}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III+II}}{\leadsto} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auch eine Basis des Eigenraums $\operatorname{Eig}(A';\lambda_2)$. Damit besitzen die beiden Matrizen A und A' jeweils nur einen reellen Eigenwert, und die beiden jeweils eindimensionalen Eigenräume stimmen zudem überein.

c) Wir zeigen, daß der in b) ermittelte Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ mit $v \neq 0$ ein Eigenvektor zu jeder Matrix $B \in U$ ist; wegen $U = \langle A, A^2, A^3\rangle \subseteq \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist

$$B = \alpha_1 \cdot A + \alpha_2 \cdot A^2 + \alpha_3 \cdot A^3 \underset{A^3=E_3 \text{ gemäß a)}}{=} \alpha_1 \cdot A + \alpha_2 \cdot A^2 + \alpha_3 \cdot E_3$$

mit geeigneten Koeffizienten α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$. Gemäß b) ist

$$A \cdot v = \lambda_1 \cdot v = 1 \cdot v = v,$$

damit auch

$$A^2 \cdot v = (A \cdot A) \cdot v = A \cdot (A \cdot v) = A \cdot v = v,$$

woraus sich schließlich

$$\begin{aligned} B \cdot v &= \left(\alpha_1 \cdot A + \alpha_2 \cdot A^2 + \alpha_3 \cdot E_3\right) \cdot v \\ &= (\alpha_1 \cdot A) \cdot v + \left(\alpha_2 \cdot A^2\right) \cdot v + (\alpha_3 \cdot E_3) \cdot v \\ &= \alpha_1 \cdot (A \cdot v) + \alpha_2 \cdot \left(A^2 \cdot v\right) + \alpha_3 \cdot (E_3 \cdot v) \\ &= \alpha_1 \cdot v + \alpha_2 \cdot v + \alpha_3 \cdot v \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \cdot v \end{aligned}$$

ergibt. Folglich ist v ein Eigenvektor von B zum Eigenwert $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

2.14 Die gegebene Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch und damit orthogonal diagonalisierbar; insbesondere stehen damit Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten aufeinander senkrecht. Für das charakteristische Polynom χ_M von M ergibt sich für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=}$$

$$= \left[-\lambda\,(1-\lambda)^2 + 0 + 0\right] - \left[0 + 4\,(1-\lambda) + 4\,(1-\lambda)\right] =$$

$$= (1-\lambda) \cdot \left[-\lambda\,(1-\lambda) - 4 - 4\right] = -\,(\lambda - 1) \cdot \left(\lambda^2 - \lambda - 8\right);$$

wegen

$$\begin{aligned}\chi_M(\lambda)=0 \quad&\Longleftrightarrow\quad \lambda=1 \quad\text{oder}\quad \lambda^2-\lambda-8=0\\ &\Longleftrightarrow\quad \lambda=1 \quad\text{oder}\quad \lambda=\frac{1\pm\sqrt{33}}{2}\end{aligned}$$

besitzt M die drei Eigenwerte $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{33}\right)$ und $\lambda_3=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{33}\right)$. Wegen

$$A-\lambda_1\,E_3=\begin{pmatrix}0&2&0\\2&-1&2\\0&2&0\end{pmatrix}\overset{\mathrm{II}+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}\underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\begin{pmatrix}0&2&0\\2&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}}\overset{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{I}\leftrightarrow\frac{1}{2}\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ist $v_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda_1=1$, und wegen

$$\begin{aligned}M-\lambda_2\,E_3=&\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{33}\right)&2&0\\2&-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{33}\right)&2\\0&2&\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{33}\right)\end{pmatrix}\underset{\mathrm{II}\cdot 4}{\overset{\mathrm{I\ und\ III}\cdot\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{33}\right)}{\rightsquigarrow}}\\ &\rightsquigarrow\begin{pmatrix}-8&1+\sqrt{33}&0\\8&-2\left(1+\sqrt{33}\right)&8\\0&1+\sqrt{33}&-8\end{pmatrix}\overset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}-8&1+\sqrt{33}&0\\0&-\left(1+\sqrt{33}\right)&8\\0&1+\sqrt{33}&-8\end{pmatrix}\overset{\mathrm{III}+\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}\\ &\rightsquigarrow\begin{pmatrix}-8&1+\sqrt{33}&0\\0&-\left(1+\sqrt{33}\right)&8\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{\mathrm{I}+\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}-8&0&8\\0&-\left(1+\sqrt{33}\right)&8\\0&0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ist $v_2=\begin{pmatrix}1+\sqrt{33}\\8\\1+\sqrt{33}\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda_2=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{33}\right)$; für jeden Eigenvektor v_3 der Matrix M zum Eigenwert $\lambda_3=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{33}\right)$ gilt nun aufgrund ihrer Symmetrie $v_3\perp v_1$ und $v_3\perp v_2$, so daß

$$v_3=v_1\times v_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1+\sqrt{33}\\8\\1+\sqrt{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\2\left(1+\sqrt{33}\right)\\-8\end{pmatrix}$$

gewählt werden kann. Damit bilden v_1, v_2, v_3 eine (Orthogonal–)Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von M.

2.15 a) Für das charakteristische Polynom χ_A von A ergibt sich für alle $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda)=\det(A-\lambda\,E_3)=&\begin{vmatrix}-\lambda&1&2\\1&2-\lambda&0\\2&0&1-\lambda\end{vmatrix}\underset{(\mathrm{I}+\mathrm{II})+\mathrm{III}}{=}\\ =&\begin{vmatrix}3-\lambda&3-\lambda&3-\lambda\\1&2-\lambda&0\\2&0&1-\lambda\end{vmatrix}\underset{(3-\lambda)\text{ aus I}}{=}(3-\lambda)\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2-\lambda&0\\2&0&1-\lambda\end{vmatrix}\underset{\text{Sarrus}}{=}\\ &-(\lambda-3)\cdot\left[\left((2-\lambda)(1-\lambda)+0+0\right)-\left(2\,(2-\lambda)+0+(1-\lambda)\right)\right]=\\ &-(\lambda-3)\cdot\left(\lambda^2-3\,\lambda+2-4+2\,\lambda-1+\lambda\right)=-(\lambda-3)\,(\lambda^2-3).\end{aligned}$$

b) Die Eigenwerte der Matrix A entsprechen genau den Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_A; wegen

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \lambda = 3 \quad \text{oder} \quad \lambda^2 = 3 \\ &\Longleftrightarrow \quad \lambda = 3 \quad \text{oder} \quad \lambda = \sqrt{3} \quad \text{oder} \quad \lambda = -\sqrt{3}\end{aligned}$$

besitzt A genau die drei Eigenwerte $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \sqrt{3}$ und $\lambda_3 = -\sqrt{3}$.

c) Wegen

$$A - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-2\cdot\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{I}+3\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{2}\cdot\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{III}+\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$ mit dem Eigenraum $\operatorname{Eig}(A; \lambda_1) = \mathbb{R} \cdot v_1$, und wegen

$$\begin{aligned} A - \lambda_2 E_3 &= \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & 2 \\ 1 & 2-\sqrt{3} & 0 \\ 2 & 0 & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix} \underset{(1+\sqrt{3})\cdot\mathrm{III}}{\overset{(2+\sqrt{3})\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & 2 \\ 2+\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 2+2\sqrt{3} & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+2\cdot\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{3} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}+\sqrt{3}\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+\sqrt{3} & 2+\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = \sqrt{3}$ mit dem Eigenraum $\operatorname{Eig}(A; \lambda_2) = \mathbb{R} \cdot v_2$; für jeden Eigenvektor v_3 der Matrix A zum Eigenwert $\lambda_3 = -\sqrt{3}$ gilt nun aufgrund ihrer Symmetrie $v_3 \perp v_1$ und $v_3 \perp v_2$, so daß

$$v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ -3-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

gewählt werden kann und sich der Eigenraum $\operatorname{Eig}(A; \lambda_3) = \mathbb{R} \cdot v_3$ ergibt.

2.16 Die gegebene Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist symmetrisch und damit orthogonal diagonalisierbar; für das charakteristische

Polynom χ_A von A gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ -1 & -\lambda & -2 \\ -2 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{II}-\text{I}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ -1+\lambda & 1-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \underset{(1-\lambda)\text{ aus II}}{\overset{(-1)\text{ aus I, III}}{=}} (1-\lambda)\cdot(-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3+\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=}$$

$$= (1-\lambda)\big[(\lambda(3+\lambda) + 0 - 4) - (4 + 0 - (3+\lambda))\big] =$$

$$= -(\lambda-1)\big[3\,\lambda + \lambda^2 - 4 - 4 + 3 + \lambda\big] = -(\lambda-1)\big(\lambda^2 + 4\,\lambda - 5\big) =$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda+5)(\lambda-1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+5)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Damit besitzt die Matrix A den doppelten Eigenwert $\lambda_1 = 1$ sowie den einfachen Eigenwert $\lambda_2 = -5$, so daß der Eigenraum $\operatorname{Eig}(A;\lambda_1)$ eine (Ursprungs–)Ebene mit dem Eigenraum $\operatorname{Eig}(A;\lambda_2)$ als Lotgerade (durch den Ursprung) ist. Dies eröffnet die folgenden Bestimmungsmöglichkeiten für eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A:

- Wegen

$$A - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-2\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{II}\cdot(-1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bilden $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\operatorname{Eig}(A;\lambda_1)$. Damit ist aber

$$v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Eigenraums $\operatorname{Eig}(A;\lambda_2)$, so daß

$$v_2' = v_1 \times v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

wegen $v_2' \perp v_3$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1 mit $v_1 \perp v_2'$ ist. Folglich ist

$$\frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ aus Eigenvektoren von A, so daß sich mit der orthogonalen Matrix

$$S = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2'}{\|v_2'\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ \lambda_1\ \lambda_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

dann $S^\top AS = D$ ergibt.

- Wegen

$$A - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I}\leftrightarrow(-\frac{1}{2})\cdot\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-5\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}\cdot\frac{1}{3}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\operatorname{Eig}(A; \lambda_2)$, so daß $w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wegen $w_1 \circ w_2 = 0$ auf w_1 senkrecht steht und damit ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1 ist; des weiteren ist

$$w_3 = w_1 \times w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

wegen $w_3 \perp w_1$ ebenfalls ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1 mit $w_2 \perp w_3$. Folglich ist

$$\frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ aus Eigenvektoren von A, so daß sich mit der orthogonalen Matrix

$$S = \left(\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \frac{w_3}{\|w_3\|} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_2,\ \lambda_1,\ \lambda_1) = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

dann $S^\top AS = D$ ergibt.

2.17 a) Die gegebene Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist als symmetrische Matrix orthogonal diagonalisierbar und besitzt wegen

$$\chi_S(\lambda) = \det(S - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=}$$

$$= \left(-\lambda\,(1-\lambda)^2 + 0 + 0\right) - (0 + (1-\lambda) + (1-\lambda)) =$$

$$= (1-\lambda)\cdot\left(-\lambda + \lambda^2 - 2\right) = -\,(\lambda-1)\,(\lambda+1)\,(\lambda-2)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die drei einfachen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 2$.

b) Wegen

$$S - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}+\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{I}\leftrightarrow\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von S zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, wegen

$$S - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\frac{1}{2}\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-2\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von S zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$, und wegen

$$S - \lambda_3 E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{II}+\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{III}+\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von S zum Eigenwert $\lambda_3 = 2$; für die orthogonale Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gilt dann $P^\top S P = D$.

2.18 Die gegebene Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist symmetrisch und damit orthogonal diagonalisierbar; dabei ist zunächst wegen

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad S \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot v_1$$

v_1 ein Eigenvektor der Matrix S zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$. Ferner gilt

$$\chi_S(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & 8-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \underset{\mathrm{III}-2\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{I}-2\mathrm{II}}{=}} \begin{vmatrix} 9-\lambda & 2\lambda-18 & 0 \\ -2 & 8-\lambda & -2 \\ 0 & 2\lambda-18 & 9-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -(\lambda-9) & 2(\lambda-9) & 0 \\ -2 & 8-\lambda & -2 \\ 0 & 2(\lambda-9) & -(\lambda-9) \end{vmatrix} \underset{(\lambda-9)\text{ aus III}}{\overset{(\lambda-9)\text{ aus I}}{=}} (\lambda-9)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 8-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\text{Sarrus}}{=} (\lambda-9)^2 \cdot [((8-\lambda)+0+0)-(0+4+4)] = -\lambda \cdot (\lambda-9)^2$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt die Matrix S neben dem (bereits bestimmten) einfachen Eigenwert $\lambda_1 = 0$ den doppelten Eigenwert $\lambda_2 = 9$. Wegen

$$S - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{2}\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+2\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(S,9) = \mathrm{Eig}(S,0)^\perp$; damit ist aber

$$v_2' = v_1 \times v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wegen $v_2' \perp v_1$ ein Eigenvektor von S zum Eigenwert $\lambda_2 = 9$ mit $v_2' \perp v_3$. Folglich ist v_1, v_2', v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus paarweise orthogonalen Eigenvektoren der Matrix S, so daß sich mit der orthogonalen Matrix

$$T = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2'}{\|v_2'\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|} \right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gilt dann $T^\top S T = D$.

2.19 Die gegebene Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist symmetrisch und damit orthogonal diagonalisierbar; für das charakteristische Polynom χ_A von A gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{III}-\text{II}}{\overset{\text{I}-\text{II}}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{(\lambda-1)\text{ aus III}}{\overset{(\lambda-1)\text{ aus I}}{=}} (\lambda-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{(\text{II}+\text{I})+\text{III}}{=}$$

$$= (\lambda-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{2. Zeile}}{=}$$

$$= (\lambda-1)^2 \cdot (4-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2\,(\lambda-4)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Damit besitzt die Matrix A den doppelten Eigenwert $\lambda_1 = 1$ sowie den einfachen Eigenwert $\lambda_2 = 4$, so daß der Eigenraum $\mathrm{Eig}(A;\lambda_1)$ eine (Ursprungs–)Ebene mit dem Eigenraum $\mathrm{Eig}(A;\lambda_2)$ als Lotgerade (durch den Ursprung) ist. Dies eröffnet die folgenden Bestimmungsmöglichkeiten für eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A:

- Wegen

$$A - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bilden $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A;\lambda_1)$. Damit ist aber

$$v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A;\lambda_2)$, so daß

$$v_2' = v_1 \times v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

wegen $v_2' \perp v_3$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1 mit $v_1 \perp v_2'$ ist. Folglich ist

$$\frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ aus Eigenvektoren von A; da nach Definition des Vektorprodukts v_1, v_3, $v_2' = v_1 \times v_3$ und damit auch die normierten Vektoren

$$\frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ein Rechtssystem in $\mathbb{R}^3$ bilden, ist die orthogonale Matrix

$$R = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|}, \frac{v_2'}{\|v_2'\|} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

wegen $\det(R) = 1$ eine Drehmatrix, und mit der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

dann $R^\top A R = D$ ergibt.

- Wegen

$$A - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\underset{\mathrm{III}+2\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}\cdot(-\frac{1}{3})}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A; \lambda_2)$, so daß $w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wegen $w_1 \circ w_2 = 0$ auf w_1 senkrecht steht und damit ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1 ist; des weiteren ist

$$w_3 = w_1 \times w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

wegen $w_3 \perp w_1$ ebenfalls ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1 mit $w_2 \perp w_3$. Folglich ist

$$\frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ aus Eigenvektoren von A, so daß sich mit der orthogonalen Matrix

$$R = \left(\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \frac{w_3}{\|w_3\|} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_2,\ \lambda_1,\ \lambda_1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

dann $R^\top A R = D$ ergibt. Gemäß der Definition des Vektorprodukts bilden nun w_1, w_2, $w_3 = w_1 \times w_2$ und damit auch die normierten Vektoren

$$\frac{w_1}{\|w_1\|}, \quad \frac{w_2}{\|w_2\|}, \quad \frac{w_3}{\|w_3\|}$$

ein Rechtssystem in $\mathbb{R}^3$, so daß die daraus gebildete Matrix $R \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ die Determinante $\det(R) = 1$ besitzt und folglich eine Drehmatrix ist.

2.20 Die gegebene 4×4–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

ist gemäß $A^\top = A$ symmetrisch und damit orthogonal diagonalisierbar.

a) Für $\lambda_1 = -2$ ist

$$A - \lambda_1 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{I, IV}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\operatorname{Rang}(A - \lambda_1 \cdot E_4) = 1 < 4;$$

damit ist $\lambda_1 = -2$ ein Eigenwert von A, und

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Basis des Eigenraums $\operatorname{Eig}(A; \lambda_1)$. Für $\lambda_2 = 2$ ist

$$A - \lambda_2 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underset{\text{I}\leftrightarrow\text{IV}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}+3\cdot\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I, III}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -8 & 4 & 4 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}+2\cdot\text{II}}{\overset{\text{III}-\text{II}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}+\text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\operatorname{Rang}(A - \lambda_2 \cdot E_4) = 3 < 4;$$

damit ist $\lambda_2 = 2$ ein Eigenwert von A, und

$$u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Basis des Eigenraums $\operatorname{Eig}(A; \lambda_2)$. Damit ist u_1, u_2, u_3, u_4 bereits eine Basis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A, so daß A keinen weiteren Eigenwert besitzen kann; dieser würde ja einen weiteren linear unabhängigen Eigenvektor beisteuern.

b) Wir konstruieren für jeden der beiden Eigenräume jeweils eine Orthonormalbasis (bezüglich des Standardskalarprodukts)

Für den Eigenraum $\operatorname{Eig}(A, \lambda_1)$ unterwerfen wir die in a) ermittelte Basis dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren und erhalten

$$a_1 = u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = \sqrt{2}, \quad \text{also} \quad b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

damit

$$a_2 = u_2 - (u_2 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \frac{1}{2}\sqrt{6}, \quad \text{also} \quad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und damit

$$a_3 = u_3 - (u_3 \circ b_1) \cdot b_1 - (u_3 \circ b_2) \cdot b_2 =$$
$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_3\| = \sqrt{12}, \quad \text{also} \quad b_3 = \frac{1}{\|a_3\|} \cdot a_3 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix};$$

damit ist b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Eig}(A;\lambda_1)$. Der Basisvektor u_4 von $\mathrm{Eig}(A;\lambda_2)$ ist dagegen nur zu normieren mit

$$\|u_4\| = 2, \quad \text{also} \quad b_4 = \frac{1}{\|u_4\|} \cdot u_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Damit ist b_1, b_2, b_3, b_4 eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren der Matrix A, und mit der orthogonalen Matrix

$$M = (b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

ergibt sich dann $M^\top AM = D$.

2.21 a) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist symmetrisch und daher (sogar orthogonal) diagonalisierbar.

Für $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\,(2-\lambda)\,(3-\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt B die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$ und ist folglich als 3×3–Matrix diagonalisierbar.

Für $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt

$$\chi_C(\lambda) = \det(C - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt C den Eigenwert $\lambda = 1$ mit der algebraischen Vielfachheit $\alpha = 3$. Wegen

$$C - \lambda E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\operatorname{Rang}(C - \lambda E_3) = 2$ und damit die geometrische Vielfachheit $\gamma = 1$; wegen $\gamma < \alpha$ ist C nicht diagonalisierbar.

b) Die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

sind als symmetrische Matrix bzw. Diagonalmatrix insbesondere reell diagonalisierbar, ihr Produkt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

als Drehmatrix D_φ mit $\varphi = \frac{\pi}{2}$ jedoch nicht; die Aussage ist demnach im allgemeinen falsch.

2.22 Für die vier gegebenen Matrizen erhält man:

- Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_{M_1}(\lambda) = \det\left(M_1 - \lambda\, E_5\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 4 & 7 & 11 \\ 0 & 3-\lambda & 5 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 6-\lambda & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 10-\lambda & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\text{Dreiecksmatrix}}{=} (1-\lambda)\,(3-\lambda)\,(6-\lambda)\,(10-\lambda)\,(15-\lambda);$$

damit besitzt M_1 die fünf verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$, $\lambda_4 = 10$ und $\lambda_5 = 15$, und ist demnach als 5×5–Matrix diagonalisierbar.

- Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_{M_2}(\lambda) = \det\left(M_2 - \lambda\, E_5\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\text{Dreiecksmatrix}}{=} (1-\lambda)\,(1-\lambda)\,(1-\lambda)\,(1-\lambda)\,(1-\lambda) = (1-\lambda)^5;$$

damit besitzt M_2 den einzigen Eigenwert $\lambda = 1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha = 5$. Wegen

$$M_2 - \lambda\, E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\operatorname{Rang}\left(M_2 - \lambda\, E_5\right) = 4$, weswegen der Eigenwert λ die geometrische Vielfachheit $\gamma = 5 - 4 = 1$ besitzt; wegen $\gamma \neq \alpha$ ist die Matrix M_2 nicht diagonalisierbar.

- Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_{M_3}(\lambda) = \det(M_3 - \lambda E_5) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{1. Spalte}}{=}$$

$$= (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{1. Spalte}}{=}$$

$$= (1-\lambda)\,(3-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=}$$

$$= (1-\lambda)\,(3-\lambda) \cdot \big((1-\lambda)^3 + 1 + 1 - (1-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda)\big) =$$

$$= (1-\lambda)\,(3-\lambda) \cdot \big(1 - 3\,\lambda + 3\,\lambda^2 - \lambda^3 - 1 + 3\,\lambda\big) =$$

$$= (1-\lambda)\,(3-\lambda) \cdot \big(3\,\lambda^2 - \lambda^3\big) = (1-\lambda)\,(3-\lambda)^2\,\lambda^2;$$

damit besitzt M_3 den Eigenwert $\lambda_1 = 1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 1$ (und damit auch der geometrischen Vielfachheit $\gamma_1 = 1$) sowie die beiden Eigenwerte $\lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = 0$ jeweils der algebraischen Vielfachheit $\alpha_2 = \alpha_3 = 2$. Wegen

$$M_3 - \lambda_2\,E_5 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\text{V}-\text{IV}}{\overset{\text{III}+2\text{IV}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{\text{II}\leftrightarrow\text{IV}}{\overset{\text{V}+\text{III}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\text{Rang}\,(M_3 - \lambda_2\,E_5) = 3$, die geometrische Vielfachheit von $\lambda_2 = 3$ also $\gamma_2 = 5 - 3 = 2 = \alpha_2$, und wegen

$$M_3 - \lambda_3\,E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{V}-\text{III}}{\overset{\text{IV}-\text{III}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\text{Rang}\,(M_3 - \lambda_3\,E_5) = 3$, die geometrische Vielfachheit von $\lambda_3 = 0$ also $\gamma_3 = 5 - 3 = 2 = \alpha_3$; folglich ist M_3 diagonalisierbar.

- Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_{M_4}(\lambda) = \det(M_4 - \lambda E_5) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{\mathrm{II}+\lambda\cdot\mathrm{I}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1-\lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{2. Zeile}}{=}$$

$$= -\left(-1-\lambda^2\right) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{1. Zeile}}{=} \left(1+\lambda^2\right) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix};$$

damit beinhaltet das charakteristische Polynom $\chi_{M_4}(\lambda)$ den quadratischen Faktor $\lambda^2 + 1$ ohne reelle Nullstelle und zerfällt damit nicht vollständig in Linearfaktoren; folglich ist die Matrix M_4 nicht diagonalisierbar.

2.23 a) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_t(\lambda) = \det(A_t - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ t & t+1-\lambda & 0 \\ t+1 & t+1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{3. Spalte}}{=}$$

$$= -(\lambda+1) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ t & t+1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)\,(-\lambda\,(t+1-\lambda)+t) =$$

$$= -(\lambda+1)\left(\lambda^2 - t\,\lambda - \lambda + t\right) \underset{\text{Vieta}}{=} -(\lambda+1)(\lambda-t)(\lambda-1).$$

b) Die in a) gezeigte Zerlegung von χ_t in Linearfaktoren legt die folgende Fallunterscheidung nahe:

Fall 1: $t \notin \{-1, 1\}$. Die Matrix A_t besitzt die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = t$ und $\lambda_3 = 1$ und ist folglich als 3×3–Matrix diagonalisierbar.

Fall 2: $t = -1$. Die Matrix

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch und damit als reellwertige Matrix auch diagonalisierbar.

Fall 3: $t = 1$. Die Matrix A_1 besitzt die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 1$ mit den algebraischen Vielfachheiten $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = 2$. Wegen

$$A_1 - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $r_2 = \mathrm{Rang}(A_1 - \lambda_2 E) = 2$. Für die geometrische Vielfachheit γ_2 von λ_2 gilt damit $\gamma_2 = 3 - r_2 = 1 < \alpha_2$; folglich ist A_1 nicht diagonalisierbar.

c) Gemäß a) besitzt die Matrix A_0 die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 1$. Wegen

$$A_0 - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$, wegen

$$A_0 - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 0$, und wegen

$$A_0 - \lambda_3 E_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 1$. Mit

$$P = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

und

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt damit $P^{-1} A_0 P = D$.

2.24 a) Die in Abhängigkeit vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ s^2 & s & -s \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

besitzt das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned}
\chi_{A_s}(\lambda) &= \det(A_s - \lambda \cdot E_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ s^2 & s-\lambda & -s \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{2. Spalte}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} (-1)^{2+2} \cdot (s-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (s-\lambda) \cdot \big((1-\lambda)^2 - 1^2\big) \\
&= (s-\lambda) \cdot \big(-\lambda \cdot (2-\lambda)\big) \\
&= -\lambda \cdot (\lambda - 2) \cdot (\lambda - s)
\end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit den Nullstellen

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \text{und} \qquad \lambda_3 = s;$$

dadurch wird die folgende Fallunterscheidung motiviert:

- Für $s \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ besitzt A_s die drei einfachen Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = s$.
- Für $s = 0$ besitzt A_0 den Eigenwert $\lambda_1 = 0$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 2$ sowie den einfachen Eigenwert $\lambda_2 = 2$.
- Für $s = 2$ besitzt A_2 den einfachen Eigenwert $\lambda_1 = 0$ sowie den Eigenwert $\lambda_2 = 2$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_2 = 2$.

b) Wir treffen erneut die Fallunterscheidung von a) und erhalten:

- Für $s \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ besitzt A_s drei paarweise verschiedene Eigenwerte und ist damit als 3×3–Matrix diagonalisierbar.
- Für $s = 0$ ist
$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$
gemäß $A_0^\top = A_0$ symmetrisch und damit insbesondere diagonalisierbar.
- Für $s = 2$ besitzt A_2 den Eigenwert $\lambda_2 = 2$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_2 = 2$; wegen
$$A_2 - \lambda_2 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{III+I}}{\overset{\text{II+4I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ergibt sich für die geometrische Vielfachheit
$$\gamma_2 = 3 - \operatorname{Rang}(A_2 - \lambda_2 \cdot E_3) = 3 - 2 = 1,$$
und wegen $\gamma_2 < \alpha_2$ ist A_2 nicht diagonalisierbar.

2.25 Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c & -1-c \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

in Abhängigkeit vom reellen Parameter $c \in \mathbb{R}$.

a) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt mit Hilfe elementarer Spaltenumformungen

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda\, E_3) \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & c & -1-c \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{II+III}}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1-c \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{III}-\text{II}}{\overset{\text{I}-\text{II}}{=}} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -c \\ \lambda-1 & -\lambda & \lambda \\ \lambda-1 & 1-\lambda & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{aus I}}{\overset{1-\lambda}{=}} (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -c \\ -1 & -\lambda & \lambda \\ -1 & 1-\lambda & -1 \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{Sarrus}}{=} (1-\lambda) \cdot ((\lambda + \lambda + c\,(1-\lambda)) - (-c\,\lambda + \lambda\,(1-\lambda) - 1)) \\
&= (1-\lambda) \cdot \big((\lambda + \lambda + c - c\,\lambda) - \big(-c\,\lambda + \lambda - \lambda^2 - 1\big)\big) \\
&= -(\lambda - 1) \cdot \big(\lambda^2 + \lambda + c + 1\big)\,.
\end{aligned}$$

Es ist $\lambda_1 = 1$ eine Nullstelle von χ_A und damit ein reeller Eigenwert der Matrix A; das in χ_A ferner enthaltene quadratische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + c + 1$$

besitzt die Diskriminante

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (c+1) = -3 - 4\,c,$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- für $c = -\frac{3}{4}$ ist $\Delta = 0$, und damit besitzt p die doppelte reelle Nullstelle $\lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{1}{2}$, so daß alle Eigenwerte von A reell sind.
- für $c < -\frac{3}{4}$ ist $\Delta > 0$, und damit besitzt p die beiden verschiedenen reellen Nullstellen
$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-4\,c-3} \qquad \text{und} \qquad \lambda_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-4\,c-3}$$
so daß alle Eigenwerte von A reell sind.
- für $c > -\frac{3}{4}$ ist $\Delta < 0$, und damit besitzt p keine reelle Nullstelle, so daß A auch zwei konjugiert–komplexe Eigenwerte hat.

Insgesamt sind genau für $c \leq -\frac{3}{4}$ alle Eigenwerte von A reell.

b) Mit Hilfe der Ergebnisse von a) treffen wir folgende Fallunterscheidung:

- Für $c > -\frac{3}{4}$ zerfällt das charakteristische Polynom χ_A nicht vollständig in reelle Linearfaktoren, und folglich ist die Matrix A nicht diagonalisierbar.
- Für $c \leq -\frac{3}{4}$ zerfällt das charakteristische Polynom χ_A vollständig in reelle Linearfaktoren; damit ist die Matrix A genau dann diagonalisierbar, wenn für jeden Eigenwert λ die algebraische Vielfachheit α und die geometrische Vielfachheit γ übereinstimmen.
Für $c < -\frac{3}{4}$ und $c \neq -3$ besitzt A die drei verschiedenen Eigenwerte
$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-4\,c-3} \quad \text{und} \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-4\,c-3};$$
es ist nämlich wegen $c < -\frac{3}{4}$ zunächst $\lambda_2 \neq \lambda_3$, und ferner ist wegen $\lambda_2 < 0$ zum einen $\lambda_2 \neq 1 = \lambda_1$ und wegen $c \neq -3$ zum anderen $\lambda_3 \neq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-4(-3)-3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{9} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1 = \lambda_1$. Folglich gilt $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, damit auch $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1$, so daß die Matrix A diagonalisierbar ist.
Für $c = -\frac{3}{4}$ ist $\lambda_2 = \lambda_3$, und für $c = -3$ ist $\lambda_1 = \lambda_3$; damit besitzt die Matrix A einen Eigenwert der algebraischen Vielfachheit $\alpha = 2$. Nun ist für alle $c \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$
$$\operatorname{Rang}(A - \lambda\,E_3) = \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} -\lambda & c & -1-c \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \geq 2,$$
da die letzten beiden Zeilen unabhängig von der Wahl von c und λ stets linear unabhängig sind; ist nun λ ein Eigenwert von A, so folgt für die geometrische Vielfachheit
$$1 \leq \gamma = \dim\left(\operatorname{Eig}(A, \lambda)\right) = 3 - \underbrace{\operatorname{Rang}\left(A - \lambda\,E_3\right)}_{\geq 2} \leq 1,$$

also es gilt stets $\gamma = 1$. Damit ist für $c = -\frac{3}{4}$ wegen $\lambda_2 = \lambda_3$ und damit $\alpha_2 = 2 > 1 = \gamma_2$ und für $c = -3$ wegen $\lambda_1 = \lambda_3$ und damit $\alpha_1 = 2 > 1 = \gamma_1$ die Matrix A nicht diagonalisierbar.

Insgesamt ist A genau dann diagonalisierbar, wenn $c < -\frac{3}{4}$ und $c \neq -3$ gilt.

2.26 Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ergibt sich für das charakteristische Polynom χ_t der gegebenen Matrix $C_t \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$\chi_t(\lambda) = \det(C_t - \lambda \cdot E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & t & t-2 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{3. Zeile}}{=}$$
$$= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & t \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot \left(\lambda^2 - t\right);$$

dadurch wird die folgende Fallunterscheidung motiviert:

- Für $t < 0$ ist q mit $q(\lambda) = \lambda^2 - t > 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ eine quadratische Funktion ohne reelle Nullstelle; damit zerfällt χ_t nicht vollständig in Linearfaktoren, so daß C_t nicht diagonalisierbar ist.
- Für $t = 0$ ist $\chi_t(\lambda) = (2-\lambda) \cdot \lambda^2$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß $\lambda_2 = 0$ ein Eigenwert von C_0 der algebraischen Vielfachheit $\alpha_2 = 2$ ist; wegen

$$C_0 - \lambda_2 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  ist $\operatorname{Rang}(C_0 - \lambda_2 \cdot E_3) = 2$, so daß $\lambda_2 = 0$ die geometrische Vielfachheit $\gamma_2 = 3 - 2 = 1$ besitzt. Wegen $\alpha_2 \neq \gamma_2$ ist C_0 nicht diagonalisierbar.
- Für $t > 0$ ist

$$\chi_t(\lambda) = (2-\lambda) \cdot \left(\lambda^2 - (\sqrt{t})^2\right) = (2-\lambda)\left(\lambda + \sqrt{t}\right)\left(\lambda - \sqrt{t}\right);$$

  damit besitzt χ_t die Nullstellen

$$\lambda_1 = 2 \qquad \text{sowie} \qquad \lambda_2 = -\sqrt{t} < 0 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = \sqrt{t} > 0.$$

  Demnach besitzt die Matrix C_t für

$$\lambda_1 \neq \lambda_3 \iff 2 \neq \sqrt{t} \iff 4 \neq t$$

  drei verschiedene reelle Eigenwerte und ist demnach als 3×3–Matrix reell diagonalisierbar. Für $t = 4$ besitzt die Matrix C_4 den Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_3 = 2$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 2$ sowie den Eigenwert $\lambda_2 = -2$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_2 = 1$ (und damit auch der geometrischen Vielfachheit $\gamma_2 = 1$); wegen

$$C_4 - \lambda_1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  ist $\operatorname{Rang}(C_4 - \lambda_1 \cdot E_3) = 1$, so daß $\lambda_1 = 2$ auch geometrische Vielfachheit $\gamma_1 = 3 - 1 = 2$ besitzt. Damit ist die Matrix C_4 reell diagonalisierbar.

2.27 a) Für das charakteristische Polynom χ_A der Matrix A ergibt sich

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \alpha \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & \alpha \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (2-\lambda) \cdot (\lambda^2 - \alpha) = -\lambda^3 + 2\,\lambda^2 + \alpha\,\lambda - 2\,\alpha$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Da die Eigenwerte von A genau die Nullstellen von χ_A sind, legt die faktorisierte Darstellung $\chi_A(\lambda) = (2-\lambda) \cdot (\lambda^2 - \alpha)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die folgende Fallunterscheidung nahe:

Für $\alpha < 0$ ist q mit $q(\lambda) = \lambda^2 - \alpha > 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ eine quadratische Funktion ohne (reelle) Nullstellen; damit ist $\lambda_1 = 2$ der einzige Eigenwert von A.

Für $\alpha = 0$ ist $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 2) \cdot \lambda^2$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 0$.

Für $\alpha > 0$ schließlich ist

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 2)\,(\lambda - \sqrt{\alpha})\,(\lambda + \sqrt{\alpha})$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt A im Falle $\alpha \neq 4$ die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \sqrt{\alpha}$ und $\lambda_3 = -\sqrt{\alpha}$ sowie im Falle $\alpha = 4$ die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -2$.

b) Für $\alpha < 0$ zerfällt das charakteristische Polynom χ_A nicht in Linearfaktoren; damit ist A nicht diagonalisierbar. Für $0 < \alpha \neq 4$ besitzt A drei verschiedene Eigenwerte und ist daher als 3×3–Matrix diagonalisierbar.

Für $\alpha = 0$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ mit $\alpha_1 = 1$ (und damit auch $\gamma_1 = 1$) sowie $\lambda_2 = 0$ mit $\alpha_2 = 2$; wegen

$$A - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\operatorname{Rang}(A - \lambda_2 E_3) = 2$ und damit $\gamma_2 = 1$. Damit ist A für $\alpha = 0$ nicht diagonalisierbar.

Für $\alpha = 4$ schließlich besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ mit $\alpha_1 = 2$ sowie $\lambda_2 = -2$ mit $\alpha_2 = 1$ (und damit auch $\gamma_2 = 1$); wegen

$$A - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\operatorname{Rang}(A - \lambda_1 E_3) = 1$ und damit $\gamma_1 = 2$. Damit ist A für $\alpha = 4$ diagonalisierbar.

Zusammenfassend ist also A genau dann zu einer reellen Diagonalmatrix ähnlich, wenn $\alpha > 0$ ist.

2.28 Die in Abhängigkeit von den Parametern λ, $\mu \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix

$$A_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

besitzt das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned}\chi_{A_{\lambda,\mu}}(t) \quad &= \quad \det(A_{\lambda,\mu} - t \cdot E_3) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - t & 0 \\ 0 & 0 & \mu - t \end{vmatrix} \\ &\underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks--}}{=}} \quad (1-t) \cdot (\lambda - t) \cdot (\mu - t)\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit den Nullstellen

$$t_1 = 1, \qquad t_2 = \lambda \qquad \text{und} \qquad t_3 = \mu;$$

dadurch wird die folgende Fallunterscheidung motiviert:

- Für $\lambda = 1$ und $\mu = 1$ besitzt

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  den Eigenwert $t_1 = 1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 3$; wegen

$$A_{1,1} - t_1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A_{1,1}, t_1 = 1)$. Damit ergibt sich die geometrische Vielfachheit $\gamma_1 = 2$ mit $\gamma_1 < \alpha_1$, so daß die Matrix $A_{1,1}$ nicht diagonalisierbar ist.

- Für $\lambda = 1$ und $\mu \neq 1$ besitzt

$$A_{1,\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

  den Eigenwert $t_1 = 1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 2$ sowie den einfachen Eigenwert $t_3 = \mu$; wegen

$$A_{1,\mu} - t_1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - 1 \end{pmatrix} \underset{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A_{1,\mu}, t_1 = 1)$, und wegen

$$A_{1,\mu} - t_3 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 1-\mu & 1 & 0 \\ 0 & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A_{1,\mu}, t_3 = \mu)$. Damit ergibt sich für $t_1 = 1$ die geometrische Vielfachheit $\gamma_1 = 1$ mit $\gamma_1 < \alpha_1$, so daß die Matrix $A_{1,\mu}$ nicht diagonalisierbar ist.

- Für $\lambda \neq 1$ und $\mu = 1$ besitzt

$$A_{\lambda,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

den Eigenwert $t_1 = 1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 2$ sowie den einfachen Eigenwert $t_2 = \lambda$; wegen

$$A_{\lambda,1} - t_1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I}-(\lambda-1)\mathrm{II}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A_{\lambda,1}, t_1 = 1)$, und wegen

$$A_{\lambda,1} - t_2 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda-1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A_{\lambda,1}, t_3 = \lambda)$. Damit ist v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von $A_{\lambda,1}$, so daß die Matrix $A_{\lambda,1}$ diagonalisierbar ist; mit

$$S = S_{\lambda,1} = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

besitzt $S^{-1}A_{\lambda,1}S$ Diagonalgestalt.

- Für $\lambda \neq 1$ und $\mu \neq 1$ bei $\lambda = \mu$ besitzt

$$A_{\lambda,\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

den einfachen Eigenwert $t_1 = 1$ sowie den Eigenwert $t_2 = \lambda$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_2 = 2$; wegen

$$A_{\lambda,\lambda} - t_1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\overset{\mathrm{II}-(\lambda-1)\mathrm{I}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A_{\lambda,\lambda}, t_1 = 1)$, und wegen

$$A_{\lambda,\lambda} - t_2 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A_{\lambda,\lambda}, t_2 = \lambda)$. Damit ist v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von $A_{\lambda,\lambda}$, so daß die Matrix $A_{\lambda,\lambda}$ diagonalisierbar ist; mit

$$S = S_{\lambda,\lambda} = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

besitzt $S^{-1} A_{\lambda,\lambda} S$ Diagonalgestalt.

- Für $\lambda \neq 1$ und $\mu \neq 1$ bei $\lambda \neq \mu$ besitzt

$$A_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

den drei einfachen Eigenwerte $t_1 = 1$, $t_2 = \lambda$ und $t_3 = \mu$; wegen

$$A_{\lambda,\mu} - t_1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{III}}{\overset{\mathrm{II}-(\lambda-1)\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A_{\lambda,\mu}, t_1 = 1)$, wegen

$$A_{\lambda,\mu} - t_2 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \lambda \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A_{\lambda,\mu}, t_2 = \lambda)$, und wegen

$$A_{\lambda,\mu} - t_3 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 1-\mu & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A_{\lambda,\mu}, t_3 = \mu)$. Damit ist v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von $A_{\lambda,\mu}$, so daß die Matrix $A_{\lambda,\mu}$

diagonalisierbar ist; mit

$$S = S_{\lambda,\mu} = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

besitzt $S^{-1} A_{\lambda,\mu} S$ Diagonalgestalt.

2.29 Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_Y(\lambda) = \det(Y - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{1. Spalte}}{=}$$

$$= (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot \big[(-1-\lambda) \cdot (2-\lambda) - (-2) \cdot 1\big] =$$

$$= (1-\lambda) \cdot \big(-2 - \lambda + \lambda^2 + 2\big) = (1-\lambda) \cdot \lambda \cdot (\lambda - 1) = -\lambda \cdot (\lambda-1)^2;$$

damit besitzt Y die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ mit $\alpha_1 = 1$ und damit $\gamma_1 = 1$ sowie $\lambda_2 = 1$ mit $\alpha_2 = 2$, und wegen

$$Y - \lambda_2\, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\mathrm{Rang}(Y - \lambda_2\, E) = 1$ und damit $\gamma_2 = 3 - 1 = 2$. Folglich ist Y diagonalisierbar, es gibt also eine invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ mit

$$P^{-1} Y P = D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $Y = PDP^{-1}$, und wegen $D^2 = D$ erhält man

$$Y^2 = \big(PDP^{-1}\big)^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} = PDP^{-1} = Y;$$

folglich können wir $S = Y$ wählen.

2.30 a) Die gegebene Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

ist symmetrisch und damit orthogonal diagonalisierbar. Wegen

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (9-\lambda)\,(6-\lambda) - 2 \cdot 2 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = (\lambda - 5)\,(\lambda - 10)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A genau die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = 10$; wegen

$$A - \lambda_1 E_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 5$, und wegen

$$A - \lambda_2 E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 10$. Folglich ist

$$w_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \frac{1}{\|v_2\|} \cdot v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^2, \circ)$ aus Eigenvektoren für A.

b) Gemäß a) ergibt sich für die orthogonale Matrix

$$T = (w_1, w_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und die Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

die Beziehung $T^{-1} \cdot A \cdot T = D$.

c) Mit Hilfe der Beziehung aus b) ergibt sich zunächst

$$A = \left(T \cdot T^{-1}\right) \cdot A \cdot \left(T \cdot T^{-1}\right) = T \cdot \left(T^{-1} \cdot A \cdot T\right) \cdot T^{-1} = T \cdot D \cdot T^{-1};$$

wir zeigen nun $A^n = T \cdot D^n \cdot T^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:
„$n = 1$“:

$$A^1 = A = T \cdot D \cdot T^{-1} = T \cdot D^1 \cdot T^{-1}.$$

„$n \to n+1$“:

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \cdot A = \left(T \cdot D^n \cdot T^{-1}\right) \cdot \left(T \cdot D \cdot T^{-1}\right) = \\ &= T \cdot D^n \cdot \left(T^{-1} \cdot T\right) \cdot D \cdot T^{-1} = T \cdot D^n \cdot D \cdot T^{-1} = T \cdot D^{n+1} \cdot T^{-1}. \end{aligned}$$

d) Wegen

$$D^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 10^n \end{pmatrix} = 5^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

und

$$T^{-1} = T^\top = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich mit Hilfe von c)

$$\begin{aligned} A^n &= T \cdot D^n \cdot T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot 5^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{5^n}{5} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} -1 & 2^{n+1} \\ 2 & 2^n \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 5^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 2^{n+2} + 1 & 2^{n+1} - 2 \\ 2^{n+1} - 2 & 2^n + 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.31 a) Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ erhalten wir

$$\left(SAS^{-1}\right)^2 = \left(SAS^{-1}\right)\cdot\left(SAS^{-1}\right) = SA\underbrace{S^{-1}S}_{=E_n}AS^{-1} = SA^2S^{-1}.$$

b) Für die diagonalisierbare Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt es eine Basis $v_1,\ldots,v_n$ des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von B zu den Eigenwerten $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$; mit der invertierbaren Matrix $S = (v_1,\ldots,v_n) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und der Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ergibt sich $D = S^{-1}BS$ bzw. $SDS^{-1} = B$. Da für die Eigenwerte von B nach Voraussetzung $\lambda_1 \geq 0,\ldots,\lambda_n \geq 0$ gilt, existiert ferner die Matrix $F = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n}\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $F^2 = D$, und für die Matrix $A = SFS^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt unter Verwendung von a)

$$A^2 = \left(SFS^{-1}\right)^2 \underset{\text{a)}}{=} SF^2S^{-1} = SDS^{-1} = B.$$

c) Für die Matrix $B = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 9 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

$$\begin{aligned}\chi_B(\lambda) = \det(B-\lambda E_2) &= \begin{vmatrix} 10-\lambda & -6 \\ 9 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (10-\lambda)\cdot(-5-\lambda)+54 = \lambda^2-5\,\lambda+4 = (\lambda-1)\cdot(\lambda-4)\end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt B die beiden einfachen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 4$. Wegen

$$B-\lambda_1E_2 = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{II}\cdot\frac{1}{3}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(B;\lambda_1)$, und wegen

$$B-\lambda_2E_2 = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 9 & -9 \end{pmatrix} \underset{\text{II}\cdot\frac{1}{9}}{\overset{\text{I}\cdot\frac{1}{6}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(B;\lambda_2)$. Mit der invertierbaren Matrix

$$S = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1,\lambda_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

ergibt sich damit $D = S^{-1}BS$ bzw. $SDS^{-1} = B$. Für $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt $F^2 = D$, und für die Matrix

$$\begin{aligned}A = SFS^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}\end{aligned}$$

gilt gemäß b) die Beziehung $A^2 = B$.

2.32 a) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert der Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so gibt es einen Eigenvektor $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ mit $Bv = \lambda v$; mit der Voraussetzung $B^2 = E_n$ folgt

$$v = E_n v = B^2 v = B(Bv) = B(\lambda v) \underset{\lambda\in\mathbb{R}}{=} \lambda(Bv) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v,$$

und damit

$$\lambda^2 v - v = 0, \qquad \text{also} \qquad \left(\lambda^2 - 1\right) v = 0,$$

woraus sich wegen $v \neq 0$ dann

$$\lambda^2 - 1 = 0, \qquad \text{also} \qquad \lambda^2 = 1$$

und damit

$$\lambda = 1 \qquad \text{oder} \qquad \lambda = -1$$

ergibt.

b) Ist $\lambda = 1$ der einzige Eigenwert der Matrix B, so ist insbesondere $\lambda = -1$ kein Eigenwert von B. Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt für $v = x - Bx \in \mathbb{R}^n$ dann

$$\begin{aligned} Bv = B\,(x - Bx) = Bx - B(Bx) = Bx - B^2 x = \\ = Bx - E_n x = Bx - x = -(x - Bx) = -v = (-1)v, \end{aligned}$$

also $v = 0$ und damit $Bx = x$; ansonsten wäre $v \neq 0$ und $\lambda = -1$ ein Eigenwert von B im Widerspruch zur Voraussetzung. Es ergibt sich

$$B = BE_n = B(e_1, \ldots, e_n) = (Be_1, \ldots, Be_n) = (e_1, \ldots, e_n) = E_n.$$

2.33 Die gegebene Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist als invertierbar mit $A^{-1} = A$ vorausgesetzt; diese Bedingung ist wegen $A \cdot A^{-1} = E_n = A^{-1} \cdot A$ zu $A \cdot A = E_n$ gleichwertig.

a) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so gibt es einen Eigenvektor $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ mit $A \cdot x = \lambda \cdot x$; damit ergibt sich

$$\begin{aligned} x = E_n \cdot x = (A \cdot A) \cdot x = A \cdot (A \cdot x) = A \cdot (\lambda \cdot x) = \\ = \lambda \cdot (A \cdot x) = \lambda \cdot (\lambda \cdot x) = (\lambda \cdot \lambda) \cdot x = \lambda^2 \cdot x, \end{aligned}$$

also

$$\left(\lambda^2 - 1\right) \cdot x = \lambda^2 \cdot x - x = 0,$$

woraus wegen $x \neq 0$ dann

$$\lambda^2 - 1 = 0, \qquad \text{also} \qquad \lambda = 1 \quad \text{oder} \quad \lambda = -1$$

folgt. Somit kommen für A nur die Eigenwerte $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$ in Frage.

b) Es ist

$$\begin{aligned} (A + E_n) \cdot (A - E_n) &= A \cdot (A - E_n) + E_n \cdot (A - E_n) \\ &= (A \cdot A - A \cdot E_n) + (E_n \cdot A - E_n \cdot E_n) \\ &= (A \cdot A - A) + (A - E_n) \\ &= A \cdot A - E_n = E_n - E_n = 0; \end{aligned}$$

dabei geht die Voraussetzung $A \cdot A = E_n$ ein.

c) Wir verwenden die in b) gezeigte Beziehung

$$(A + E_n) \cdot (A - E_n) = 0$$

und schießen damit folgendermaßen:

- Ist $\lambda = 1$ kein Eigenwert von A, so gilt

  $$\chi_A(1) = \det(A - 1 \cdot E_n) = \det(A - E_n) \neq 0;$$

  damit ist $A - E_n$ invertierbar, und wir erhalten

  $$A + E_n = 0 \cdot (A - E_n)^{-1} = 0, \qquad \text{also} \qquad A = -E_n.$$

- Ist $\lambda = -1$ kein Eigenwert von A, so gilt

  $$\chi_A(-1) = \det(A - (-1) \cdot E_n) = \det(A + E_n) \neq 0;$$

  damit ist $A + E_n$ invertierbar, und wir erhalten

  $$A - E_n = (A + E_n)^{-1} \cdot 0 = 0, \qquad \text{also} \qquad A = E_n.$$

2.34 a) Für eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zeigen wir

$$\big(A^2 + 2A = 0 \ \text{ mit } \ A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\big) \iff A = -2\,E_n$$

durch den Nachweis von zwei Implikationen:

- Für „$\Longrightarrow$“ sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $A^2 + 2A = 0$; mit der zu A inversen Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ergibt sich

  $$0 = A^{-1} \cdot 0 = A^{-1} \cdot \big(A^2 + 2A\big) = A^{-1} \cdot A^2 + A^{-1} \cdot (2A) = \\ = \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{=E_n} \cdot A + 2\,\big(\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{=E_n}\big) = A + 2\,E_n,$$

  also $A = -2\,E_n$.

- Für „$\Longleftarrow$“ sei $A = -2\,E_n$; damit ist $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, und es gilt

  $$A^2 + 2A = (-2\,E_n)^2 + 2\,(-2\,E_n) = 4\,E_n - 4\,E_n = 0.$$

b) Wir betrachten im folgenden eine nicht notwendigerweise invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A^2 + 2A = 0$; dabei gilt

$$A^2 + 2A = 0 \iff A^2 = -2A.$$

Sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $A\,v \neq 0$; dann ist $A\,v \in \mathbb{R}^n$ wegen

$$A \cdot (A\,v) = A^2 \cdot v = (-2A) \cdot v = (-2) \cdot A\,v$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = -2$.
Sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v + \frac{1}{2}\,A\,v \neq 0$; dann ist $v + \frac{1}{2}\,A\,v \in \mathbb{R}^n$ wegen

$$A \cdot \left(v + \frac{1}{2}\,A\,v\right) = A \cdot v + A \cdot \left(\frac{1}{2}\,A\,v\right) = A \cdot v + \frac{1}{2} \cdot A^2 \cdot v = \\ = A \cdot v + \frac{1}{2} \cdot (-2\,A) \cdot v = A \cdot v - \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) \cdot A \cdot v = 0$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\mu = 0$.

c) Es bezeichne

$$U = \begin{cases} \mathrm{Eig}(A;-2), & \text{falls } \lambda = -2 \text{ ein Eigenwert von } A \text{ ist,} \\ \{0\}\,, & \text{falls } \lambda = -2 \text{ kein Eigenwert von } A \text{ ist,} \end{cases}$$

sowie

$$W = \begin{cases} \mathrm{Eig}(A;0), & \text{falls } \mu = 0 \text{ ein Eigenwert von } A \text{ ist,} \\ \{0\}\,, & \text{falls } \mu = 0 \text{ kein Eigenwert von } A \text{ ist;} \end{cases}$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt gemäß b) zunächst

$$A\,v \in U \qquad \text{und} \qquad v + \frac{1}{2}\,A\,v \in W$$

und damit

$$v = \underbrace{-\frac{1}{2} \cdot A\,v}_{\in U} + \underbrace{v + \frac{1}{2}\,A\,v}_{\in W} \in U + W,$$

woraus schon $U + W = \mathbb{R}^n$ folgt. Im Spezialfall $U = \{0\}$ bzw. $W = \{0\}$ ist $W = \mathbb{R}^n$ bzw. $U = \mathbb{R}^n$, und es gibt eine Basis von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A zu $\mu = 0$ bzw. $\lambda = -2$; ansonsten gilt $U \neq \{0\}$ und $W \neq \{0\}$, und A besitzt die Eigenwerte $\lambda = -2$ und $\mu = 0$. Dann gilt

$$U \cap W = \mathrm{Eig}(A;-2) \cap \mathrm{Eig}(A;0) = \{0\},$$

da Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten nur den Nullvektor gemeinsam haben; insgesamt ist $U \oplus W = \mathbb{R}^n$, und es gibt eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von $\mathbb{R}^n$ mit

$$v_1, \ldots, v_r \in U \quad \text{und} \quad v_{r+1}, \ldots, v_n \in W$$

für ein $1 \leq r < n$, also eine Basis von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A.
Auf jeden Fall ist damit A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar.

2.35 a) Die Aussage ist richtig: ist nämlich $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von B, so gilt $\det(B - \lambda \cdot E_n) = 0$; damit ist aber auch $\det\left((B - \lambda \cdot E_n)^\top\right) = 0$. Wegen

$$(B - \lambda \cdot E_n)^\top = B^\top - (\lambda \cdot E_n)^\top = B^\top - \lambda \cdot E_n$$

folgt daraus $\det(B^\top - \lambda \cdot E_n) = 0$, somit ist λ auch ein Eigenwert von $B^\top$.

b) Die Aussage ist falsch: als Gegenbeispiel betrachten wir etwa die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2};$$

es ist zwar $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ wegen

$$B \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \cdot x$$

ein Eigenvektor von B, wegen

$$B^\top \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R} \cdot x$$

aber kein Eigenvektor von $B^\top$.

c) Die Aussage ist richtig: ist nämlich B diagonalisierbar, so gibt es eine invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $D = P^{-1}BP$; damit ergibt sich aber

$$D^\top = \left(P^{-1}BP\right)^\top = P^\top B^\top \left(P^{-1}\right)^\top = P^\top B^\top \left(P^\top\right)^{-1}$$

mit der invertierbaren Matrix $Q = P^\top \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und der Diagonalmatrix $D^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, somit ist auch $B^\top$ diagonalisierbar.

2.36 a) Sei $v_1 \in \mathbb{R}^2$ bzw. $v_2 \in \mathbb{R}^2$ ein Eigenvektor der Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ zum Eigenwert $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ bzw. $\lambda_2 \in \mathbb{R}$; wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sind v_1 und v_2 linear unabhängig, so daß die Matrix $S = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertierbar ist. Mit

$$T = S^{-1} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \qquad \text{und} \qquad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann

$$A \cdot S = A \cdot (v_1, v_2) = (A \cdot v_1, A \cdot v_2) = (\lambda_1 \cdot v_1, \lambda_2 \cdot v_2) = S \cdot D,$$

also $A = T^{-1}DT$; damit ist A reell diagonalisierbar.

b) Für das charakteristische Polynom χ_A der Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{Spur}(A) \cdot \lambda + \det(A);$$

wegen $\det(A) < 0$ ergibt sich für die Diskriminante Δ dieses quadratischen Polynoms

$$\Delta = (-\operatorname{Spur}(A))^2 - 4 \cdot \det(A) = \underbrace{(\operatorname{Spur}(A))^2}_{\geq 0} + 4 \cdot \underbrace{(-\det(A))}_{>0} > 0,$$

so daß χ_A zwei verschiedene reelle Nullstellen und damit die Matrix A zwei verschiedene reelle Eigenwerte besitzt, weswegen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ dann gemäß a) reell diagonalisierbar ist.

c) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, E_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und damit den doppelten reellen Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; da aber die Matrix

$$A - \lambda_1 E_2 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

den Rang $r = 1$ und damit der Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ nur die geometrische Vielfachheit $\gamma = 2 - r = 1$ besitzt, während die algebraische Vielfachheit $\alpha = 2$ beträgt, ist die Matrix A nicht reell diagonalisierbar.

d) Für die in c) betrachtete Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

damit ist A^2 reell diagonalisierbar, während A selbst nicht reell diagonalisierbar ist.

2.37 a) Es ist $\lambda = 0$ genau dann ein Eigenwert der Matrix A, wenn $\lambda = 0$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E_n)$ ist, also für $\det(A) = 0$. Folglich ist $\lambda = 0$ genau dann kein Eigenwert von A, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt, was jedoch zur Invertierbarkeit von A gleichwertig ist.

b) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so gibt es einen Eigenvektor $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ mit $A\,x = \lambda\,x$; damit ergibt sich

$$A^2\,x = (A\,A)\;x = A\;(A\,x) = A\;(\lambda\,x) \underset{\lambda\in\mathbb{R}}{=} \lambda\;(A\,x) = \lambda\;(\lambda\,x) = \lambda^2\,x,$$

so daß $x \neq 0$ auch ein Eigenvektor der Matrix A^2 zum Eigenwert λ^2 ist. Ist zudem A invertierbar, so ist gemäß a) der Eigenwert $\lambda \neq 0$, und wir erhalten

$$x = E_n\,x = \left(A^{-1}\,A\right)x = A^{-1}\;(A\,x) = A^{-1}\;(\lambda\,x) \underset{\lambda\in\mathbb{R}}{=} \lambda\;\left(A^{-1}\,x\right),$$

wegen $\lambda \neq 0$ also

$$A^{-1}\,x = \lambda^{-1}\,x;$$

damit ist $x \neq 0$ auch ein Eigenvektor der Matrix A^{-1} zum Eigenwert λ^{-1}.

c) Der Nachweis, daß mit der Matrix A auch ihr Quadrat A^2 reell diagonalisierbar ist, läßt sich etwa durch eine der folgenden Überlegungen erbringen:

- Ist A reell diagonalisierbar, so gibt es eine Basis $b_1, \ldots, b_n$ von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A; seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die zugehörigen Eigenwerte. Gemäß b) sind $b_1, \ldots, b_n$ auch Eigenvektoren von A^2 zu den Eigenwerten $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$, es ist also $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A^2; damit ist A^2 reell diagonalisierbar.
- Ist A reell diagonalisierbar, also ähnlich zu einer reellen Diagonalmatrix, so gibt es eine invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $D = P^{-1}AP$. Damit gilt

$$D^2 = \left(P^{-1}AP\right)^2 = P^{-1}A\underbrace{P \cdot P^{-1}}_{=E_n}AP = P^{-1}A^2P,$$

so daß A^2 ähnlich zur Diagonalmatrix $D^2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist; folglich ist A^2 reell diagonalisierbar.

d) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

besitzt wegen

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \neq 0$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ keinen reellen Eigenwert, ist also insbesondere nicht reell diagonalisierbar; dagegen ist ihr Quadrat

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

bereits eine Diagonalmatrix, insbesondere also reell diagonalisierbar.

2.38 a) Zu betrachten ist die affine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad f(x) = A \cdot x + b,$$

mit der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und dem Vektor $b \in \mathbb{R}^n$. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$x \in \mathrm{Fix}(f) \iff f(x) = x \iff A \cdot x + b = x \iff$$
$$\iff A \cdot x - x = -b \underset{x = E_n \cdot x}{\iff} (A - E_n) \cdot x = -b;$$

damit stimmt die Menge $\mathrm{Fix}(f)$ der Fixpunkte von f mit der Lösungsmenge L des linearen Gleichungssystems

$$(A - E_n) \cdot x = -b \tag{$*$}$$

mit der Koeffizientenmatrix $A - E_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und der rechten Seite $-b \in \mathbb{R}^n$ überein; dies motiviert die folgende Fallunterscheidung:

- Im Falle
$$\mathrm{Rang}\,(A - E_n) < \mathrm{Rang}\,(A - E_n \mid -b)$$
ist das lineare Gleichungssystem $(*)$ unlösbar; folglich ist L und damit $\mathrm{Fix}(f)$ leer.
- Im Falle
$$r = \mathrm{Rang}\,(A - E_n) = \mathrm{Rang}\,(A - E_n \mid -b)$$
ist das lineare Gleichungssystem $(*)$ lösbar, und mit einer partikulären Lösung x_p von $(*)$ ist dann
$$L = x_p + L_0,$$
wobei L_0 den $(n-r)$–dimensionalen linearen Lösungsraum des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems
$$(A - E_n) \cdot x = 0$$
bezeichnet; folglich ist L und damit $\mathrm{Fix}(f)$ eine affine Teilmenge (ein affiner Unterraum) von $\mathbb{R}^n$.

b) Es ist $\lambda = 1$ genau dann ein Eigenwert der Matrix A, wenn

$$\chi_A(1) = \det\,(A - 1 \cdot E_n) = 0$$

ist; so ist $\lambda = 1$ genau dann kein Eigenwert von A, wenn $\det\,(A - E_n) \neq 0$ ist, die Matrix $A - E_n$ also invertierbar ist. Damit ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$x \in \mathrm{Fix}(f) \underset{\text{a)}}{\iff} (A - E_n) \cdot x = -b \iff x = -\,(A - E_n)^{-1} \cdot b,$$

so daß in diesem Fall f genau den einen Fixpunkt $-\,(A - E_n)^{-1} \cdot b$ besitzt.

2.39 a) Eine reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt Eigenwert der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wenn es einen Vektor $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ mit $A \cdot x = \lambda \cdot x$ gibt.

b) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, so gibt es einen Eigenvektor $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ mit $A \cdot x = \lambda \cdot x$, und wegen

$$A^2 \cdot x = A \cdot (A \cdot x) = A \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (A \cdot x) = \lambda \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda^2 \cdot x$$

sowie

$$A^3 \cdot x = A^2 \cdot (A \cdot x) = A^2 \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (A^2 \cdot x) = \lambda \cdot (\lambda^2 \cdot x) = \lambda^3 \cdot x$$

ergibt sich

$$\big(A^3 - 5\,E_n\big) \cdot x = A^3 \cdot x - 5\,E_n \cdot x = \lambda^3 \cdot x - 5 \cdot x = \big(\lambda^3 - 5\big) \cdot x;$$

damit ist $\lambda^3 - 5$ ein Eigenwert der Matrix $A^3 - 5\,E_n$.

c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^2 - 2\,A + E_n = O$. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, so gibt es einen Eigenvektor $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ mit $A \cdot x = \lambda \cdot x$, und wegen

$$A^2 \cdot x = A \cdot (A \cdot x) = A \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (A \cdot x) = \lambda \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda^2 \cdot x$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 = O \cdot x = \big(A^2 - 2\,A + E_n\big) \cdot x &= A^2 \cdot x - 2\,A \cdot x + E_n \cdot x = \\ &= \lambda^2 \cdot x - 2\,\lambda \cdot x + 1 \cdot x = \big(\lambda^2 - 2\,\lambda + 1\big) \cdot x = (\lambda - 1)^2 \cdot x, \end{aligned}$$

wegen $x \neq 0$ also $(\lambda - 1)^2 = 0$ und damit $\lambda = 1$.

d) Wir verwenden das Kriterium

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ ist Eigenwert von } M \in \mathbb{R}^{n\times n} \iff \operatorname{Rang}(M - \lambda \cdot E_n) < n$$

Ist λ Eigenwert von A, so ist $\operatorname{Rang}(A - \lambda \cdot E_n) < n$, und für die transponierte Matrix

$$(A - \lambda \cdot E_n)^\top = A^\top - (\lambda \cdot E_n)^\top = A^\top - \lambda \cdot E_n$$

gilt damit

$$\operatorname{Rang}(A^\top - \lambda \cdot E_n) = \operatorname{Rang}(A - \lambda \cdot E_n) < n;$$

folglich ist λ auch Eigenwert der transponierten Matrix $A^\top$.