LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Lineare Algebra und analytische Geometrie 1 — Lösungsvorschlag —

1.1 Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & + & 6\,x_3 & + & 9\,x_4 & = & 20 \\ 2\,x_1 & + & 5\,x_2 & + & 7\,x_3 & + & 12\,x_4 & = & 27 \\ 3\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & 9\,x_3 & + & 14\,x_4 & = & 31 \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$. Es ist

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 9 & 20 \\ 2 & 5 & 7 & 12 & 27 \\ 3 & 6 & 9 & 14 & 31 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 9 & 20 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 7 \\ 3 & 6 & 9 & 14 & 31 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}-\frac{3}{2}\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 9 & 20 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}\cdot 2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 9 & 20 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}-3\cdot\mathrm{III}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 9 & 20 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}-4\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 9 & 16 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}-9\cdot\mathrm{III}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}\cdot\frac{1}{2}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Damit ist das lineare Gleichungssystem lösbar; genauer ist x_3 eine freie Variable, und mit $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig erhalten wir für die drei gebundenen Variablen x_1, x_2 und x_4 dann

- $x_1 + x_3 = -1$, also $x_1 = -1 - \lambda$,
- $x_2 + x_3 = 1$, also $x_2 = 1 - \lambda$, und
- $x_4 = 2$;

folglich ist also

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -1-\lambda \\ 1-\lambda \\ \lambda \\ 2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die Lösungsmenge des gegebenen linearen Gleichungssystems.

1.2 Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3\,x_1 & - & 2\,x_2 & - & 6\,x_3 & + & 4\,x_4 & = & 5 \\ -x_1 & + & 2\,x_2 & + & 2\,x_3 & - & 4\,x_4 & = & -3 \\ 2\,x_1 & - & x_2 & - & 4\,x_3 & + & 2\,x_4 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & - & 2\,x_3 & + & 2\,x_4 & = & 2 \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$. Es ist

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & -6 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{IV}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -4 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -6 & 4 & 5 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -6 & 4 & 5 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}-2\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -6 & 4 & 5 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}-3\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{IV}-\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}+\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Damit ist das lineare Gleichungssystem lösbar; genauer sind x_3 und x_4 freie Variablen, und mit $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ und $x_4 = \mu \in \mathbb{R}$ beliebig erhalten wir für die beiden gebundenen Variablen x_1 und x_2 dann

- $x_1 - 2\,x_3 = 1$, also $x_1 = 1 + 2\,\lambda$, und
- $x_2 - 2\,x_4 = -1$, also $x_2 = -1 + 2\,\mu$;

folglich ist also

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + 2\,\lambda \\ -1 + 2\,\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mid \lambda,\ \mu \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

die Lösungsmenge des gegebenen linearen Gleichungssystems.

1.3 Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2\,x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2\,x_3 & - & 3\,x_4 & = & 0 \\ 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & - & 2\,x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3\,x_3 & + & 3\,x_4 & = & 1 \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$. Es ist

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}-2\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}-\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}+3\cdot\mathrm{III}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}-2\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Damit ist das lineare Gleichungssystem lösbar; genauer ist x_3 eine freie Variable, und mit $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig erhalten wir für die drei gebundenen Variablen x_1, x_2 und x_4 dann

- $x_1 - 5\,x_3 = -5$, also $x_1 = -5 + 5\,x_3 = -5 + 5\,\lambda$,
- $x_2 + 2\,x_3 = 3$, also $x_2 = 3 - 2\,x_3 = 3 - 2\,\lambda$, und
- $x_4 = 1$;

folglich ist also

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -5 + 5\,\lambda \\ 3 - 2\,\lambda \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

die Lösungsmenge des gegebenen linearen Gleichungssystems.

1.4 a) Für das gegebene homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2\,x_1 & + & 9\,x_2 & - & 5\,x_3 & + & 12\,x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 4\,x_2 & - & 2\,x_3 & + & 5\,x_4 & & & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & 2\,x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 5\,x_2 & - & 3\,x_3 & + & 6\,x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix und erhalten

$$(A|0) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 9 & -5 & 12 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 6 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & -5 & 12 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 6 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 6 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}-\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{III}\leftrightarrow\mathrm{IV}}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}\cdot(-1)}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\mathrm{III}-2\cdot\mathrm{IV}}{\overset{\mathrm{I}-5\cdot\mathrm{IV}}{\rightsquigarrow}}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -2 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}-4\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Da es genau zwei freie Unbestimmte, nämlich x_3 und x_5, gibt, besitzt der Lösungsraum L_0 des homogenen linearen Gleichungssystems die Dimension $\dim L_0 = 2$. Eine Basis u_1, u_2 von L_0 läßt sich etwa dadurch bestimmen, daß man für u_1 zum einen $x_3 = 1$ und $x_5 = 0$ und für u_2 zum anderen $x_3 = 0$ und $x_5 = 1$ wählt; dadurch ergibt sich

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Für das gegebene inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2\,x_1 & + & 9\,x_2 & - & 5\,x_3 & + & 12\,x_4 & + & x_5 & = & 3 \\ x_1 & + & 4\,x_2 & - & 2\,x_3 & + & 5\,x_4 & & & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & 2\,x_4 & + & x_5 & = & 3 \\ x_1 & + & 5\,x_2 & - & 3\,x_3 & + & 6\,x_4 & - & x_5 & = & 3 \end{array}$$

ist der Vektor $x \in \mathbb{R}^5$ mit $x_1 = -12$, $x_2 = 3$ und $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ wegen

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrl} 2\cdot(-12) & + & 9\cdot 3 & - & 5\cdot 0 & + & 12\cdot 0 & + & 0 & = & -24 & + & 27 & = 3 \\ (-12) & + & 4\cdot 3 & - & 2\cdot 0 & + & 5\cdot 0 & & & = & -12 & + & 12 & = 0 \\ & & 3 & - & 0 & + & 2\cdot 0 & + & 0 & = & & & 3 & = 3 \\ (-12) & + & 5\cdot 3 & - & 3\cdot 0 & + & 6\cdot 0 & - & 0 & = & -12 & + & 15 & = 3 \end{array}$$

eine spezielle (partikuläre) Lösung.

c) Die Lösungsmenge L eines inhomogenen linearen Gleichungssystems setzt sich additiv aus einer speziellen (partikulären) Lösung dieses Systems und dem Lösungsraum L_0 des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems zusammen; damit ergibt sich hier

$$L = x + L_0 = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.5 Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & + & \lambda\, x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & - & \lambda\, x_3 & + & \lambda\, x_4 & = & 0 \\ -x_1 & & & + & \lambda\, x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & & & + & \lambda^2\, x_4 & = & 1 \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_\lambda|b)$. Es ist

$$(A_\lambda|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda^2 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III+I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda^2 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III-II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\,\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda^2 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{IV-II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\,\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda^2-\lambda & 1 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{III}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda^2-\lambda & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{IV-III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda\,(\lambda-1) & 0 \end{array}\right),$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ ist $\lambda \neq 0$ und $\lambda\,(\lambda-1) \neq 0$, und wir erhalten
  - $\lambda\,(\lambda-1)\,x_4 = 0$, also $x_4 = 0$,
  - $\lambda\,x_3 = 1$, also $x_3 = \frac{1}{\lambda}$,
  - $x_2 - \lambda\,x_3 + \lambda\,x_4 = 0$, also $x_2 = 1$, und
  - $x_1 + x_2 + \lambda\,x_4 = 2$, also $x_1 = 1$.

  Damit besitzt sich für jedes $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ das gegebene lineare Gleichungssystem die einelementige Lösungsmenge $L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

- Für $\lambda = 0$ gilt

  $$(A_0|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

  wegen des Widerspruchs in der dritten Zeile ist das für $\lambda = 0$ gegebene lineare Gleichungssystem unlösbar.

- Für $\lambda = 1$ gilt

  $$(A_1|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

damit ist x_4 eine freie Variable, und mit $x_4 = \alpha \in \mathbb{R}$ beliebig ergibt sich $x_3 = 1$ sowie $x_2 - x_3 + x_4 = 0$, also $x_2 = 1 - \alpha$, und $x_1 + x_2 + x_4 = 2$, also $x_1 = 1$. Somit ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\alpha \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Lösungsmenge des durch $(A_1|b)$ gegebenen Gleichungssystems.

1.6 Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & s\,x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & - & 2\,x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & 2\,x_2 & + & s\,x_3 & - & 2s\,x_4 & = & -1 \\ x_1 & & & + & 2\,(s-1)\,x_3 & + & 3\,x_4 & = & 2 \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_s|b)$. Es ist

$$\begin{aligned}
(A_s|b) \quad &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & s & -2\,s & -1 \\ 1 & 0 & 2\,(s-1) & 3 & 2 \end{array}\right) \\
&\underset{\text{III}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2\,s-1 & -2 \\ 1 & 0 & 2\,(s-1) & 3 & 2 \end{array}\right) \\
&\underset{\text{IV}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2\,s-1 & -2 \\ 0 & 1 & s-2 & 2 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\text{III}+\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2\,s & -2 \\ 0 & 1 & s-2 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2\,s & -2 \\ 0 & 0 & s & 1 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{-\frac{1}{2}\cdot\text{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & 1 \\ 0 & 0 & s & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-s\cdot\text{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-s^2 & 1-s \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Dies legt die Fallunterscheidung $1-s^2 = 0$, also $s = 1$ oder $s = -1$, und $1-s^2 \neq 0$, also $s \notin \{-1, 1\}$ nahe:

Für $s = 1$ gilt

$$(A_1|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

mit $x_4 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig erhält man

- $x_3 + x_4 = 1$, also $x_3 = 1 - x_4 = 1 - \lambda$,
- $x_2 - 2\,x_3 + x_4 = 0$, also $x_2 = 2\,x_3 - x_4 = 2\,(1-\lambda) - \lambda = 2 - 3\,\lambda$, und
- $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1$, also $x_1 = 1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 + (2 - 3\,\lambda) - (1-\lambda) - \lambda = 2 - 3\,\lambda$;

damit ist $L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2-3\lambda \\ 2-3\lambda \\ 1-\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ die Lösungsmenge für $s = 1$.

Für $s = -1$ gilt

$$(A_{-1}|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right);$$

damit ist das Gleichungssystem für $s = -1$ nicht lösbar; es ist $L_{-1} = \emptyset$.

Für $s \notin \{-1, 1\}$ ist $1 - s^2 \neq 0$, und wir erhalten

- $(1 - s^2)\,x_4 = 1 - s$, also $x_4 = \frac{1-s}{1-s^2} = \frac{1}{1+s}$,
- $x_3 + s\,x_4 = 1$, also $x_3 = 1 - s\,x_4 = 1 - s \cdot \frac{1}{1+s} = \frac{1}{1+s}$,
- $x_2 - 2\,x_3 + x_4 = 0$, also $x_2 = 2\,x_3 - x_4 = 2 \cdot \frac{1}{1+s} - \frac{1}{1+s} = \frac{1}{1+s}$, und
- $x_1 - x_2 + s\,x_3 + x_4 = 1$, also $x_1 = 1 + x_2 - s\,x_3 - x_4 = 1 + \frac{1}{1+s} - s \cdot \frac{1}{1+s} - \frac{1}{1+s} = \frac{1}{1+s}$;

damit ist $L_s = \left\{ \frac{1}{1+s} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die Lösungsmenge für $s \notin \{-1, 1\}$.

1.7 a) Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & s\,x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & s\,x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ s\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_s|b)$. Es ist

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & s & 2 \\ 1 & s & 1 & -1 \\ s & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & s & 2 \\ 0 & s-1 & 1-s & -3 \\ s & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \overset{\text{III}-s\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & s & 2 \\ 0 & s-1 & 1-s & -3 \\ 0 & 1-s & 1-s^2 & -1-2\,s \end{array} \right) \overset{\text{III}+\text{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & s & 2 \\ 0 & s-1 & 1-s & -3 \\ 0 & 0 & 2-s-s^2 & -4-2\,s \end{array} \right);$$

wegen

$$s - 1 = 0 \iff s = 1$$

und
$$2-s-s^2=(2+s)(1-s)=0 \iff s=-2 \text{ oder } s=1$$
legt dies die folgende Fallunterscheidung nahe:

- Für $s \in \mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$ ist $s-1\neq 0$ und $2-s-s^2=(2+s)(1-s)\neq 0$, und wir erhalten
  - $(2-s-s^2)\,x_3=-4-2s$, also $x_3=\frac{-4-2s}{2-s-s^2}=\frac{-2(2+s)}{(2+s)(1-s)}=\frac{2}{s-1}$,
  - $(s-1)\,x_2+(1-s)\,x_3=-3$, also $x_2=\frac{1}{s-1}\left(-3-(1-s)\cdot\frac{2}{s-1}\right)=-\frac{1}{s-1}$ und
  - $x_1+x_2+s\,x_3=2$, also $x_1=2-\left(-\frac{1}{s-1}\right)-s\cdot\frac{2}{s-1}=-\frac{1}{s-1}$.

  Damit ist
  $$L=\left\{\frac{1}{s-1}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$$
  die Lösungsmenge des durch $(A_s|b)$ für ein $s\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$ gegebenen Gleichungssystems.
- Für $s=-2$ gilt
  $$(A_{-2}|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&2\\0&-3&3&-3\\0&0&0&0\end{array}\right);$$
  damit ist x_3 eine freie Variable, und mit $x_3=\lambda\in\mathbb{R}$ beliebig ergibt sich $-3\,x_2+3\,x_3=-3$, also $x_2=\lambda+1$, sowie $x_1+x_2-2\,x_3=2$, also $x_1=\lambda+1$, es ist also
  $$L=\left\{\begin{pmatrix}\lambda+1\\\lambda+1\\\lambda\end{pmatrix} \mid \lambda\in\mathbb{R}\right\}$$
  die Lösungsmenge des durch $(A_{-2}|b)$ gegebenen Gleichungssystems.
- Für $s=1$ gilt
  $$(A_1|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&0&0&-3\\0&0&0&-6\end{array}\right);$$
  aufgrund des Widerspruchs in der zweiten (oder dritten) Zeile ist das durch $(A_1|b)$ gegebene Gleichungssystem nicht lösbar, es ist also $L=\emptyset$.

b) Ist $r=\mathrm{Rang}(A)$ der Rang der Koeffizientenmatrix A, so ist $d=3-r$ die Dimension des Lösungsraumes des homogenen Gleichungssystems $A\cdot x=0$. Da sich gemäß den Berechnungen unter a)
$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&1&s\\0&s-1&1-s\\0&0&2-s-s^2\end{pmatrix}$$
ergibt, treffen wir erneut die folgende Fallunterscheidung:

- Für $s\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$ ist $s-1\neq 0$ und $2-s-s^2\neq 0$, woraus sich $r=3$ und damit $d=0$ ergibt.

- Für $s = -2$ erhält man

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

woraus sich $r = 2$ und damit $d = 1$ ergibt.

- Für $s = 1$ erhält man

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

woraus sich $r = 1$ und damit $d = 2$ ergibt.

1.8 Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & (\lambda+1)\,x_2 & + & 2\lambda\,x_3 & + & 2\lambda\,x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & \lambda\,x_2 & + & \lambda\,x_3 & + & \lambda\,x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & \lambda\,x_2 & + & 2\lambda\,x_3 & + & 2\lambda\,x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & \lambda\,x_2 & + & \lambda\,x_3 & + & 2\lambda\,x_4 & = & 1 \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_\lambda|b_\lambda)$. Es ist

$$(A_\lambda|b_\lambda) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda+1 & 2\lambda & 2\lambda & 2 \\ 1 & \lambda & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 2\lambda & 2\lambda & 2 \\ 1 & \lambda & \lambda & 2\lambda & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda+1 & 2\lambda & 2\lambda & 2 \\ 1 & \lambda & 2\lambda & 2\lambda & 2 \\ 1 & \lambda & \lambda & 2\lambda & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\mathrm{III}-\mathrm{I},\ \mathrm{IV}-\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}-\mathrm{IV},\ \mathrm{III}-\mathrm{IV}}{\overset{\mathrm{I}-\mathrm{IV}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\mathrm{II}-\mathrm{III}}{\overset{\mathrm{I}-\mathrm{III}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}-\lambda\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right)$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $\lambda = 0$ ist

$$(A_0|b_0) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und damit

$$\mathrm{Rang}(A_0) = 2 < 3 = \mathrm{Rang}(A_0|b_0),$$

folglich ist das lineare Gleichungssystem unlösbar.

- Für $\lambda \neq 0$ ist das lineare Gleichungssystem wegen

$$\mathrm{Rang}(A_\lambda) = 4 = \mathrm{Rang}(A_\lambda|b_\lambda)$$

lösbar, wobei für die Lösungsmenge L_λ dann

$$\dim(L_\lambda) = 4 - \operatorname{Rang}(A_\lambda|b_\lambda) = 4 - 4 = 0$$

gilt; die eindeutige Lösung bestimmt sich zu

$$x_\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.9 Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & & & 2\,x_3 & - & x_4 & = & -2 \\ 2\,x_1 & + & x_2 & + & 7\,x_3 & & & = & -3 \\ -3\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & & & a\,x_4 & = & 8 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & + & 8\,x_3 & + & 3\,x_4 & = & b \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_a|b_b)$. Es ist

$$(A_a|b_b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 0 & a & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & b \end{array}\right) \overset{\text{II}-2\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & a & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & b \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{III}+3\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & a-3 & 2 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & b \end{array}\right) \overset{\text{IV}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & a-3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & b+2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{III}-2\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-7 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & b+2 \end{array}\right) \overset{\text{IV}-2\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right)$$

Damit ist das lineare Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn $b = 0$ gilt; dabei ergibt sich

- für $a = 7$ wegen

$$(A_7|b_0) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  die Lösungsmenge $L = \left\{ \begin{pmatrix} -2 - 2\,\lambda + \mu \\ 1 - 3\,\lambda - 2\,\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mid \lambda,\, \mu \in \mathbb{R} \right\}$ sowie

- für $a \neq 7$ wegen

$$(A_a|b_0) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{III}\cdot\frac{1}{a-7}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

die Lösungsmenge $L = \left\{ \begin{pmatrix} -2-2\lambda \\ 1-3\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

1.10 Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2\,x_1 & + & x_2 & & & & & = & 0 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2\,x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & \alpha\,x_4 & = & \beta \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_\alpha|b_\beta)$. Es ist

$$(A_\alpha|b_\beta) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}-\frac{1}{2}\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}-\frac{2}{3}\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}-\frac{3}{4}\cdot\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-\frac{3}{4} & \beta \end{array}\right)$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $\alpha \neq \frac{3}{4}$ ist $\alpha - \frac{3}{4} \neq 0$ und damit

  $$\mathrm{Rang}(A_\alpha) = 4 = \mathrm{Rang}(A_\alpha|b_\beta),$$

  weswegen das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung besitzt.
- Für $\alpha = \frac{3}{4}$ und $\beta \neq 0$ ist

  $$\mathrm{Rang}(A_\alpha) = 3 < 4 = \mathrm{Rang}(A_\alpha|b_\beta),$$

  weswegen das lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt.
- Für $\alpha = \frac{3}{4}$ und $\beta = 0$ ist

  $$\mathrm{Rang}\left(A_{\frac{3}{4}}\right) = 3 = \mathrm{Rang}\left(A_{\frac{3}{4}}|b_0\right),$$

  weswegen das (wegen $b_0 = 0$ sogar homogene) lineare Gleichungssystem einen Lösungsraum L der Dimension $\dim(L) = 4 - 3 = 1$ besitzt; wegen

  $$\left(A_{\frac{3}{4}}|b_0\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  ist x_4 eine freie Variable, und einen Basisvektor von L erhält man etwa durch die Wahl $x_4 = 4$ mit $\frac{4}{3}\,x_3 + x_4 = 0$, also $x_3 = -3$, sowie $\frac{3}{2}\,x_2 + x_3 = 0$, also $x_2 = 2$, und $2\,x_1 + x_2 = 0$, also $x_1 = -1$, und folglich ist

  $$L = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1.11 Für das in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ gegebene lineare Gleichungssystem

$$(G_t) \qquad \begin{array}{rcrcrcl} -x & & & + & 3\,z & = & 3 \\ -2\,x & - & t\,y & + & z & = & 2 \\ x & + & 2\,y & + & t\,z & = & 1 \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_t \mid b)$ und erhalten

$$(A_t \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 3 \\ -2 & -t & 1 & 2 \\ 1 & 2 & t & 1 \end{array}\right) \underset{\text{III}+\text{I}}{\overset{\text{II}-2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -t & -5 & -4 \\ 0 & 2 & t+3 & 4 \end{array}\right) \underset{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}{\overset{(-1)\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow}}$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & t+3 & 4 \\ 0 & -t & -5 & -4 \end{array}\right) \underset{\text{III}+\frac{t}{2}\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & t+3 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{t}{2}(t+3)-5 & 2\,t-4 \end{array}\right),$$

wodurch wegen

$$\frac{t}{2}(t+3) - 5 = \frac{t\cdot(t+3)-10}{2} = \frac{t^2+3\,t-10}{2} = \frac{(t+5)\cdot(t-2)}{2}$$

die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

a) Für $t \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 2\}$ ist also $\frac{t}{2}(t+3) - 5 \neq 0$ und damit $\operatorname{Rang}(A_t) = 3 = \operatorname{Rang}(A_t \mid b)$; folglich ist das lineare Gleichungssystem (G_t) lösbar ohne freie Variable, also eindeutig lösbar.

- Es ist $\left(\frac{t}{2}(t+3)-5\right)\cdot z = 2\,t-4$, also
$$z = \frac{2\,t-4}{\frac{t}{2}(t+3)-5} = \frac{2(t-2)}{\frac{1}{2}(t-2)(t+5)} = \frac{4}{t+5},$$
- damit $2\cdot y + (t+3)\cdot z = 4$, also
$$y = \frac{1}{2}\left(4 - (t+3)\cdot\frac{4}{t+5}\right) = \frac{4}{2}\cdot\frac{(t+5)-(t+3)}{t+5} = \frac{4}{t+5},$$
- und damit $x - 3\cdot z = -3$, also
$$x = -3 + 3\cdot\frac{4}{t+5} = -3\cdot\frac{(t+5)-4}{t+5} = \frac{-3(t+1)}{t+5};$$

folglich ergibt sich in diesen Fällen die jeweils einelementige Lösungsmenge

$$L_t = \left\{ \frac{1}{t+5}\cdot\begin{pmatrix} -3(t+1) \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

b) Für $t = -5$ ergibt sich

$$(A_{-5} \mid b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{array}\right)$$

und damit $\operatorname{Rang}(A_{-5}) = 2 < 3 = \operatorname{Rang}(A_{-5} \mid b)$; folglich ist das lineare Gleichungssystem (G_{-5}) nicht lösbar, besitzt also keine Lösungen.

c) Für $t = 2$ ergibt sich

$$(A_2 \mid b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und damit $\operatorname{Rang}(A_2) = 2 = \operatorname{Rang}(A_2 \mid b)$; folglich ist das lineare Gleichungssystem (G_2) lösbar mit einer freien Variablen, besitzt also mehrere Lösungen.

- Mit $z = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig ist
- damit $2 \cdot y + 5 \cdot z = 4$, also $y = \frac{1}{2}(4 - 5 \cdot \lambda) = 2 - \frac{5}{2}\lambda$,
- und damit $x - 3 \cdot z = -3$, also $x = -3 + 3 \cdot \lambda$;

folglich ergibt sich in diesem Fall die Lösungsmenge

$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -3 + 3\lambda \\ 2 - \frac{5}{2}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.12 a) Es ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{IV+I}}{\overset{\text{II}-2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{IV+3II}}{\overset{\text{III+2II}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}-\text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

damit ist $\operatorname{Rang}(A) = 3$, so dass sich für den Lösungsraum $L_0 \subseteq \mathbb{R}^5$ des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ dann

$$\dim L_0 = 5 - 3 = 2$$

ergibt. Es sind x_3 und x_5 die beiden freien Variablen, und etwa durch die Wahl $x_3 = 1$ und $x_5 = 0$ sowie $x_3 = 0$ und $x_5 = 3$ erhält man in

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

eine Basis von L_0 mit $L_0 = \mathbb{R} \cdot u_1 + \mathbb{R} \cdot u_2$.

b) Es ist $x_p \in \mathbb{R}^5$ genau dann eine Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ für ein $b \in \mathbb{R}^4$, wenn

$$b = A \cdot x_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ -5 \\ -12 \end{pmatrix}$$

gilt; für die Lösungsmenge L von $A \cdot x = b$ ergibt sich dann

$$L = x_p + L_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1.13 a) Für das gegebene homogene lineare Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 & -6 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|0)$; dabei ergibt sich

$$(A|0) = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 4 & -6 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}+3\text{I, IV}+4\cdot\text{I}}{\overset{\text{II}+2\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & -16 & 0 \\ 0 & 18 & 18 & -18 & 0 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{7}\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & -16 & 0 \\ 0 & 18 & 18 & -18 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\underset{\text{III}-16\cdot\text{II, IV}-18\cdot\text{II}}{\overset{\text{I}-5\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Damit sind die beiden Variablen x_3 und x_4 frei, so daß man den Lösungsraum

$$L_0 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erhält.

b) Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist genau dann das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ für jede rechte Seite $b \in \mathbb{R}^m$ lösbar, wenn $\operatorname{Rang}(A) = m$ erfüllt ist; da hier

$$\operatorname{Rang}(A) = 2 < 4 = m$$

gilt, gibt es Vektoren $b \in \mathbb{R}^4$, für die das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$

unlösbar ist. So ergibt sich etwa für $b = e_3$ mit den obigen Umformungen

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 4 & -6 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & -16 & 1 \\ 0 & 18 & 18 & -18 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & -16 & 1 \\ 0 & 18 & 18 & -18 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

wegen $\operatorname{Rang}(A|b) = 3 > 2 = \operatorname{Rang}(A)$ ist also das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ für $b = e_3$ unlösbar.

1.14 Für die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ gilt

$$\begin{aligned} (A|b) \quad &= \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right) \\ &\underset{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 9 & 10 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right) \\ &\underset{\mathrm{III}-2\mathrm{I},\ \mathrm{IV}-\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -1 & -2 \end{array}\right) \\ &\underset{\mathrm{III}-\mathrm{II},\ \mathrm{IV}+\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \end{aligned}$$

damit ergibt sich:

a) Für die Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ gilt $\operatorname{Rang}(A) = 2$, so daß sich für die Dimension des Lösungsraums L_0 des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ dann $\dim L_0 = 5 - 2 = 3$ ergibt. Eine Basis von L_0 erhält man etwa dadurch, daß man für die drei freien Variablen x_3, x_4 und x_5 die Wahl $x_3 = 1$ mit $x_4 = x_5 = 0$ bzw. $x_4 = 1$ mit $x_3 = x_5 = 0$ bzw. $x_5 = 1$ mit $x_3 = x_4 = 0$ trifft; dementsprechend bilden die drei Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von L_0.

b) Wegen $\text{Rang}(A|b) = 2 = \text{Rang}(A)$ ist das inhomogene lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ lösbar, und eine partikuläre Lösung x_p erhält man etwa durch die Wahl der freien Variablen $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, wodurch sich die gebundenen Variablen zu $x_1 = 2$ und $x_2 = 2$ errechnen. Die allgemeine Lösung von $A \cdot x = b$, also die Lösungsmenge L des Gleichungssystems, ist dann

$$L = x_p + L_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Die Matrix $M = (e_1, e_2, b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^{5\times5}$ ist wegen

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{Dreiecks-}}{\underset{\text{matrix}}{=}} 1^5 = 1 \neq 0$$

invertierbar, so daß ihre Spalten e_1, e_2, b_1, b_2, b_3 eine Basis des $\mathbb{R}^5$ sind.

1.15 Für jeden Spaltenvektor $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ gilt

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & b_1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & b_2 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & b_3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & b_4 \end{array}\right) \overset{\text{II+I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & b_2 + b_1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & b_3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & b_4 \end{array}\right) \overset{\text{III}-\text{I}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3 - b_1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & b_4 \end{array}\right) \overset{\text{IV+I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3 - b_1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & b_4 + b_1 \end{array}\right) \overset{\text{IV}-\text{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_4 - b_2 \end{array}\right) \overset{\text{IV}-\text{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 - b_2 - b_3 + b_1 \end{array}\right).$$

a) Damit besitzt das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ genau dann keine Lösung, wenn $b_4 - b_2 - b_3 + b_1 \neq 0$ gilt; somit ist $L = \emptyset$ für $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

b) Das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ besitzt genau dann (mindestens) eine Lösung, wenn $b_4 - b_2 - b_3 + b_1 = 0$ gilt. In diesem Fall erhält man aber

$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

damit ist x_4 eine freie Variable, und das lineare Gleichungssystem besitzt schon unendlich viele Lösungen. Folglich kann es kein $b \in \mathbb{R}^4$ gegen, so daß das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ genau eine Lösung besitzt.

c) Es ist

$$(A|b) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

mit $x_4 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig erhält man

- $x_3 = -2\,x_4 = -2\,\lambda$,
- $2\,x_2 = 2 - x_3 = 2 + 2\,\lambda$, also $x_2 = 1 + \lambda$, und
- $x_1 = 1 - 4\,x_2 - x_3 = 1 - 4\,(1 + \lambda) + 2\,\lambda = -3 - 2\,\lambda$.

Damit ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -3 - 2\,\lambda \\ 1 + \lambda \\ -2\,\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Lösungsmenge des gegebenen linearen Gleichungssystems.

1.16 Für das gegebene lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -a & 1 & 2 \\ -2 & 2 & a \end{pmatrix} \text{ für } a \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_a|b)$. Es ist

$$(A_a|b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -a & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & a & 3 \end{array}\right) \underset{\text{III}+2\cdot\text{II}}{\overset{\text{II}+a\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 2+a & 2+a \\ 0 & 4 & 2+a & 5 \end{array}\right) \underset{\text{III}\leftrightarrow\text{II}}{\rightsquigarrow}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2+a & 5 \\ 0 & 1+a & 2+a & 2+a \end{array}\right) \underset{\text{III}\cdot 4}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2+a & 5 \\ 0 & 4\,(1+a) & 4\,(2+a) & 4\,(2+a) \end{array}\right)$$
$$\underset{\text{III}-(1+a)\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2+a & 5 \\ 0 & 0 & (3-a)(2+a) & 3-a \end{array}\right),$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$ ist $3 - a \neq 0$ und $2 + a \neq 0$, und wir erhalten
  - $(3-a)\,(2+a)\,x_3 = (3-a)$, also $x_3 = \frac{1}{2+a}$,
  - $4\,x_2 + \frac{2+a}{2+a} = 5$, also $x_2 = 1$,
  - $x_1 + 1 + \frac{1}{2+a} = 1$, also $x_1 = -\frac{1}{2+a}$.

Damit besitzt das gegebene lineare Gleichungssystem genau eine Lösung mit

$$L_a = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2+a} \\ 1 \\ \frac{1}{2+a} \end{pmatrix} \right\}.$$

- Für $a = -2$ gilt

$$(A_{-2}|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right);$$

  wegen des Widerspruchs in der dritten Zeile ist das gegebene lineare Gleichungssystem für $a = -2$ unlösbar.

- Für $a = 3$ gilt

$$(A_3|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

  damit ist x_3 eine freie Variable, und mit $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig ergibt sich $4\,x_2 + 5\lambda = 5$, also $x_2 = \frac{5}{4} - \frac{5}{4}\lambda$ sowie $x_1 + \frac{5}{4} - \frac{5}{4}\lambda + \lambda = 1$, also $x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\lambda$. Somit ist

$$L_3 = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\lambda \\ \frac{5}{4} - \frac{5}{4}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

  die Lösungsmenge des durch $(A_3|b)$ gegebenen Gleichungssystems.

1.17 Für das gegebene lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & t & 7 \\ 3 & t+2 & t+4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$; dabei ergibt sich

$$\begin{aligned} (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & t & 7 & 3 \\ 3 & t+2 & t+4 & 4 \end{array}\right) & \underset{\mathrm{III}-3\cdot\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \\ \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & t-4 & 1 & 1 \\ 0 & t-4 & t-5 & 1 \end{array}\right) & \overset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & t-4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & t-6 & 0 \end{array}\right), \end{aligned}$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $t \in \mathbb{R} \setminus \{4, 6\}$ ist $t - 4 \neq 0$ sowie $t - 6 \neq 0$ und damit

$$\mathrm{Rang}(A|b) = 3 = \mathrm{Rang}(A),$$

  weshalb das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ lösbar ist; da keine der Variablen frei ist, ist das System eindeutig lösbar.

- Für $t = 4$ ist

$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}+2\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right),$$

  und wegen

$$\mathrm{Rang}(A|b) = 3 > 2 = \mathrm{Rang}(A)$$

  ist das lineare Gleichungssystem unlösbar.

- Für $t = 6$ ist

$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

  und wegen

$$\mathrm{Rang}(A|b) = 2 = \mathrm{Rang}(A)$$

  ist das lineare Gleichungssystem lösbar; da für die Lösungsmenge L dann

$$\dim L = 3 - \mathrm{Rang}(A) = 3 - 2 = 1$$

  gilt, ist das System mehrdeutig lösbar, und es gilt

$$L = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.18 Das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit der Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und der rechten Seite $b \in \mathbb{R}^m$ ist genau dann lösbar, wenn

$$\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A|b)$$

gilt; in diesem Fall gilt für die Dimension d des Lösungsraumes

$$d = n - \mathrm{Rang}(A).$$

Hier ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \alpha \\ 2 & 6 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 + \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Wegen

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & \alpha & 1 \\ 2 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & \alpha & \alpha^2 & 3 + \beta \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-3\cdot\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2\,\alpha & -2 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha^2 - 3\,\alpha & \beta \end{array}\right)$$

treffen wir die folgende Fallunterscheidung:

- Im Fall $\alpha \neq 0$ ist
$$\operatorname{Rang}(A) = 3 = \operatorname{Rang}(A|b);$$
damit ist das Gleichungssystem (unabhängig von β) lösbar, und es gilt $d = 4 - 3 = 1$.
- Im Fall $\alpha = 0$ ist
$$\operatorname{Rang}(A) = 2 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Rang}(A|b) = \begin{cases} 2, & \text{falls } \beta = 0, \\ 3, & \text{falls } \beta \neq 0; \end{cases}$$
damit ist das Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn $\beta = 0$ ist, und es gilt $d = 4 - 2 = 2$.

b) Im Fall $\alpha = \beta = 0$ ergibt sich
$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I-II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$
damit sind x_3 und x_4 die freien Unbestimmten, und man erhält die Lösungsmenge
$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 3 - 2\lambda \\ \lambda - 1 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$
Im Fall $\alpha = \beta = 1$ ergibt sich
$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}+2\cdot\mathrm{III}}{\rightsquigarrow}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I-II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right);$$
damit ist x_4 die freie Unbestimmte, und man erhält die Lösungsmenge
$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - 7\lambda \\ 3\lambda \\ 1 + 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

1.19 a) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$ ist; wegen
$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & 2 & t \\ 1 & t & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{Regel von}}{\underset{\text{Sarrus}}{=}} \left(6 + t^2 + t^4\right) - \left(2\,t^2 + t^2 + 3\,t^2\right) =$$
$$= t^4 - 5\,t^2 + 6 \overset{\text{Satz von}}{\underset{\text{Vieta}}{=}} \left(t^2 - 2\right)\left(t^2 - 3\right)$$
ist dies genau dann der Fall, wenn $t^2 \neq 2$ und $t^2 \neq 3$ ist, also genau für $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}\right\}$.

b) Für das gegebene lineare Gleichungssystem betrachten wir die zugehörige erweitere Koeffizientenmatrix und erhalten

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & t^2 & 1 \\ t & 2 & t & 2 \\ 1 & t & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-t\cdot\text{I}}{\leadsto}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & t^2 & 1 \\ 0 & 2-t^2 & t-t^3 & 2-t \\ 0 & 0 & 3-t^2 & 0 \end{array}\right),$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}\right\}$ ist die Koeffizientenmatrix $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ invertierbare und damit das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar; wegen $2 - t^2 \neq 0$ und $3 - t^2 \neq 0$ ergibt sich
  - zunächst $(3 - t^2)\, x_3 = 0$, also $x_3 = 0$,
  - dann $(2 - t^2)\, x_2 + (t - t^3)\, x_3 = 2 - t$, also $x_2 = \dfrac{2-t}{2-t^2}$, und
  - schließlich $x_1 + t\, x_2 + t^2\, x_3 = 1$, also

  $$x_1 = 1 - t \cdot \frac{2-t}{2-t^2} = \frac{(2-t^2) - t(2-t)}{2-t^2} = \frac{2-2\,t}{2-t^2},$$

  zusammen also

  $$L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2-2\,t}{2-t^2} \\ \frac{2-t}{2-t^2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Für $t = \pm\sqrt{3}$ ist $t^2 = 3$ und damit

  $$(A \mid b) \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2\,t & 2-t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{I}+t\cdot\text{II}}{\leadsto}$$
  $$\leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3-2\,t^2 & 1+2\,t-t^2 \\ 0 & -1 & -2\,t & 2-t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{(-1)\cdot\text{II}}{\leadsto}$$
  $$\leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2\,t-2 \\ 0 & 1 & 2\,t & t-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

  wegen $\mathrm{Rang}(A) = 2 = \mathrm{Rang}(A \mid b)$ ist das lineare Gleichungssystem lösbar, und für die Lösungsmenge L mit $\dim L = 3 - \mathrm{Rang}(A) = 1$ ergibt sich

  $$L = \begin{pmatrix} 2\,t-2 \\ t-2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2\,t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Für $t = \pm\sqrt{2}$ ist $t^2 = 2$ und damit

  $$(A \mid b) \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -t & 2-t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{II}\leftrightarrow\text{II}}{\leadsto}$$
  $$\leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 2-t \end{array}\right) \underset{\text{III}+t\cdot\text{II}}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-t \end{array}\right);$$

wegen $2-t\neq 0$ ist $\mathrm{Rang}(A)=2<3=\mathrm{Rang}(A\mid b)$, und damit ist das lineare Gleichungssystem unlösbar.

1.20 Das lineare Gleichungssystem $M\cdot x=b$ mit einer quadratischen Koeffizientenmatrix $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$ und der rechten Seite $b\in\mathbb{R}^n$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $M\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ invertierbar ist; in diesem Fall ist die Lösungsmenge $L=\{M^{-1}\cdot b\}$ einelementig. Ansonsten ist $\mathrm{Rang}(M)<n$, und $M\cdot x=b$ ist im Falle $\mathrm{Rang}(M)<\mathrm{Rang}(M|b)$ unlösbar sowie im Falle $\mathrm{Rang}(M)=\mathrm{Rang}(M|b)$ wegen $\dim L=n-\mathrm{Rang}(M)\geq 1$ mehrdeutig lösbar.

a) Für die in Abhängigkeit von $\alpha\in\mathbb{R}$ gegebene Matrix $A_\alpha\in\mathbb{R}^{4\times 4}$ gilt

$$\det(A_\alpha)=\begin{vmatrix}\alpha&0&0&1-\alpha\\1&1&0&0\\1&1&-1&0\\1&1&-1&-1\end{vmatrix}\overset{\text{Spalten}}{\underset{\text{I–II}}{=}}\begin{vmatrix}\alpha&0&0&1-\alpha\\0&1&0&0\\0&1&-1&0\\0&1&-1&-1\end{vmatrix}\overset{\text{Laplace}}{\underset{\text{1. Spalte}}{=}}$$
$$=(-1)^{1+1}\cdot\alpha\cdot\begin{vmatrix}1&0&0\\1&-1&0\\1&-1&-1\end{vmatrix}\overset{\text{Dreiecks–}}{\underset{\text{matrix}}{=}}\alpha\cdot\big(1\cdot(-1)\cdot(-1)\big)=\alpha,$$

so daß sich für $B_\alpha=A_\alpha A_\alpha^\top\in\mathbb{R}^{4\times 4}$ unter Verwendung des Determinantenmultiplikationssatzes

$$\det(B_\alpha)=\det(A_\alpha\cdot A_\alpha^\top)=\det(A_\alpha)\cdot\underbrace{\det(A_\alpha^\top)}_{=\det(A_\alpha)}=(\det(A_\alpha))^2=\alpha^2$$

ergibt. Damit ist das lineare Gleichungssystem $B_\alpha\cdot x=b$ genau dann eindeutig lösbar, wenn $\det(B_\alpha)\neq 0$ ist, also genau im Falle $\alpha\neq 0$.

b) Für $\alpha=1$ besitzt das lineare Gleichungssystem $B_1\cdot x=b$ gemäß a) eine eindeutig bestimmte Lösung; dabei gilt

$$B_1\cdot x=b\iff\big(A_1\cdot A_1^\top\big)\cdot x=b\iff$$
$$\iff A_1\cdot\big(A_1^\top\cdot x\big)=b\iff\big(A_1\cdot y=b\ \text{ und }\ A_1^\top\cdot x=y\big).$$

Wegen

$$(A_1|b)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&3\\1&1&0&0&-1\\1&1&-1&0&-2\\1&1&-1&-1&-4\end{array}\right)\underset{\text{IV–III}}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&3\\1&1&0&0&-1\\1&1&-1&0&-2\\0&0&0&-1&-2\end{array}\right)\underset{\text{III–II}}{\rightsquigarrow}$$
$$\rightsquigarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&3\\1&1&0&0&-1\\0&0&-1&0&-1\\0&0&0&-1&-2\end{array}\right)\underset{\text{II–I}}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&3\\0&1&0&0&-4\\0&0&-1&0&-1\\0&0&0&-1&-2\end{array}\right)$$

ist zunächst

$$y=\begin{pmatrix}3\\-4\\1\\2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4,$$

und wegen

$$(A_1^\top|y) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{\text{I}-\text{II}}{\leadsto} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{\text{III}+\text{II}}{\leadsto}$$

$$\leadsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{IV}}{\leadsto} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

ergibt sich schließlich die Lösung

$$x = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

1.21 Es ist $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ genau dann ein gemeinsamer Punkt der drei Ebenen

$$\begin{array}{lcrcrcrcrcl} E_1 & : & x & - & \frac{1}{4}\,y & - & 2\,z & + & 1 & = & 0 \\ E_2 & : & 2\,x & - & \frac{5}{2}\,y & - & 5\,z & - & \lambda & = & 0 \\ E_3 & : & 4\,x & + & \lambda\,y & - & 6\,z & - & \mu & = & 0 \end{array}$$

wenn seine Koordinaten den drei Ebenengleichungen genügen, er also Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & \frac{1}{4}\,y & - & 2\,z & = & -1 \\ 2\,x & - & \frac{5}{2}\,y & - & 5\,z & = & \lambda \\ 4\,x & + & \lambda\,y & - & 6\,z & = & \mu \end{array}$$

mit der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -2 \\ 2 & -\frac{5}{2} & -5 \\ 4 & \lambda & -6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

ist. Mit der Regel von Sarrus ergibt sich

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -2 \\ 2 & -\frac{5}{2} & -5 \\ 4 & \lambda & -6 \end{vmatrix} = (15 + 5 - 4\,\lambda) - (20 - 5\,\lambda + 3) = \lambda - 3,$$

so daß für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ die Matrix A wegen $\det(A) \neq 0$ invertierbar ist; folglich ist in diesem Fall das durch $(A|b)$ gegebene lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar, die drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 schneiden sich also in genau einem Punkt.

Für die hier zu betrachtenden Fälle muß also $\lambda = 3$ gelten, und dabei gilt

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{4} & -2 & -1 \\ 2 & -\frac{5}{2} & -5 & 3 \\ 4 & 3 & -6 & \mu \end{array}\right) \underset{2\cdot\mathrm{II}}{\overset{4\cdot\mathrm{I}}{\leadsto}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -8 & -4 \\ 4 & -5 & -10 & 6 \\ 4 & 3 & -6 & \mu \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\leadsto}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -8 & -4 \\ 0 & -4 & -2 & 10 \\ 0 & 4 & 2 & \mu+4 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}+\mathrm{IV}}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -8 & -4 \\ 0 & -4 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & \mu+14 \end{array}\right),$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{-14\}$ ist $\mu + 14 \neq 0$ und damit

  $$\mathrm{Rang}(A) = 2 < 3 = \mathrm{Rang}(A|b);$$

  folglich ist das durch $(A|b)$ gegebene lineare Gleichungssystem unlösbar, und die drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 haben keinen gemeinsamen Punkt.
- Für $\mu = -14$ ergibt sich

  $$(A|b) \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -8 & -4 \\ 0 & -4 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

  so daß das durch $(A|b)$ gegebene lineare Gleichungssystem wegen

  $$\mathrm{Rang}(A) = 2 = \mathrm{Rang}(A|b)$$

  lösbar ist und die Lösungmenge L die Dimension $3 - \mathrm{Rang}(A) = 1$ besitzt. Folglich schneiden sich die drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 in der Geraden

  $$L = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

1.22 a) Wir betrachten für das durch die beiden Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & (2-b)\,x_2 & - & 2\,x_3 & & & = & 1-b \\ & & x_2 & - & 2\,x_3 & + & x_4 & = & a-1 \\ 2\,x_1 & - & 2\,b\,x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3-a-2\,b \end{array}$$

die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix und erhalten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2-b & -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & -2 & 1 & a-1 \\ 2 & -2b & 1 & -1 & 3-a-2\,b \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-2\cdot\mathrm{I}}{\leadsto}$$

$$\leadsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2-b & -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & -2 & 1 & a-1 \\ 0 & -4 & 5 & -1 & 1-a \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}+4\cdot\mathrm{II}}{\leadsto}$$

$$\leadsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2-b & -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & -2 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 3\,a-3 \end{array}\right) \underset{(-\frac{1}{3})\cdot\mathrm{III}}{\leadsto}$$

$$\leadsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2-b & -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & -2 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1-a \end{array}\right).$$

Damit ist das lineare Gleichungssystem lösbar, und besitzt in x_4 genau eine freie Variable; folglich ist die Lösungsmenge L eine (affine) Gerade. Für eine partikuläre Lösung x_p des inhomogenen Gleichungssystems (also einen Trägerpunkt von L) ergibt sich für $x_4 = a$ dann

- $x_3 - x_4 = 1 - a$, also $x_3 = (1-a) + x_4 = 1$,
- $x_2 - 2\,x_3 + x_4 = a - 1$, also $x_2 = (a-1) + 2\,x_3 - x_4 = 1$,
- $x_1 + (2-b)\,x_2 - 2\,x_3 = 1 - b$, also $x_1 = (1-b) - (2-b)\,x_2 + 2\,x_3 = 1$,

insgesamt damit

$$x_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}^\top;$$

für einen Basisvektor u des Lösungsraums des homogenen Gleichungssystems (also einen Richtungsvektor von L) ergibt sich für $x_4 = 1$ dann

- $x_3 - x_4 = 0$, also $x_3 = x_4 = 1$,
- $x_2 - 2\,x_3 + x_4 = 0$, also $x_2 = 2\,x_3 - x_4 = 1$,
- $x_1 + (2-b)\,x_2 - 2\,x_3 = 0$, also $x_1 = -(2-b)\,x_2 + 2\,x_3 = b$,

insgesamt damit

$$u = \begin{pmatrix} b & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top.$$

Folglich erhält man

$$L = x_p + \mathbb{R} \cdot u = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Der Punkt

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda\,b \\ 1 + \lambda \\ 1 + \lambda \\ a + \lambda \end{pmatrix} \in L$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ liegt genau dann in der Hyperebene H des $\mathbb{R}^4$ mit der Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

wenn

$$(1 + \lambda\,b) + (1 + \lambda) + (1 + \lambda) + (a + \lambda) = 0,$$

also

$$(b+3)\,\lambda + (3+a) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad (*) \quad (b+3)\,\lambda = -\,(3+a)$$

gilt; dies motiviert die folgende Fallunterscheidung:

- Für $b \neq -3$ besitzt $(*)$ genau eine Lösung, nämlich $\lambda = -\frac{3+a}{b+3}$; folglich ist $L \cap H$ ein Punkt.
- Für $b = -3$ besitzt $(*)$ die Gestalt $0 = -(3+a)$ und damit
  - für $a \neq -3$ keine Lösung, weswegen dann $L \cap H$ leer ist, sowie
  - für $a = -3$ die Lösungsmenge $\mathbb{R}$, weswegen dann $L \subseteq H$ gilt.

1.23 a) Der gegebene Teilmenge

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}$$

ist der Lösungsraum der homogenen linearen Gleichung

$$\text{(I)} \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$$

in den n Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_n$; da die zugehörige Koeffizientenmatrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

den Rang 1 besitzt, ergibt sich für den Unterraum U von $\mathbb{R}^n$ dann

$$\dim(U) = n - \operatorname{Rang}(A_1) = n - 1.$$

b) Da U' als der Lösungsraum der in Abhängigkeit von $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gegebenen homogenen linearen Gleichung

$$\text{(II)} \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0$$

definiert ist, stellt $U \cap U'$ den Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrcrcccrcl} \text{(I)} & x_1 & + & x_2 & + & \ldots & + & x_n & = & 0 \\ \text{(II)} & a_1 x_1 & + & a_2 x_2 & + & \ldots & + & a_n x_n & = & 0 \end{array}$$

dar; für die zugehörige Koeffizientenmatrix ergibt sich

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \underset{\text{II}-a_1 \cdot \text{I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \ldots & a_n - a_1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\operatorname{Rang}(A_2) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a_k - a_1 = 0 \text{ für alle } k \in \{2, \ldots, n\}, \\ 2, & \text{falls } a_k - a_1 \neq 0 \text{ für ein } k \in \{2, \ldots, n\}, \end{cases}$$

so daß wir für die gesuchte Dimension

$$\dim(U \cap U') = n - \operatorname{Rang}(A_2) = \\ = \begin{cases} n - 1, & \text{falls } a_k = a_1 \text{ für alle } k \in \{2, \ldots, n\}, \\ n - 2, & \text{falls } a_k \neq a_1 \text{ für ein } k \in \{2, \ldots, n\}, \end{cases}$$

erhalten.

1.24 Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ist das inhomogene lineare Gleichungssystem in den n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ mit den n Gleichungen

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_j - \sum_{j=k+1}^{n} x_j = 1 \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots, n-1 & \text{(Gleichung 1 bis } n-1) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 & \text{(Gleichung } n) \end{cases}$$

zu betrachten; es besitzt damit die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & -1 & -1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{n\times(n+1)}.$$

Subtrahiert man zunächst Gleichung $n-1$ von Gleichung n, dann Gleichung $n-2$ von Gleichung $n-1$, usw., dann Gleichung 2 von Gleichung 3 und schließlich Gleichung 1 von Gleichung 2, so erhält man

$$(A \mid b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) = (A' \mid b');$$

multipliziert man nun Gleichung 2 bis Gleichung n mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ und addiert diese $n-1$ Gleichungen zu Gleichung 1, so ergibt sich

$$(A' \mid b') \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = (E_n \mid e_1).$$

Damit besitzt das gegebene lineare Gleichungssystem genau eine Lösung, nämlich $x = e_1 \in \mathbb{R}^n$, und die Lösungsmenge ist $L = \{e_1\}$.

1.25 Es bezeichne $\mathcal{L}_{A,b}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ mit der Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und der rechten Seite $b \in \mathbb{R}^2$.

a) i) Die Aussage ist falsch: Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

gilt

$$\mathcal{L}_{A,b} = \begin{cases} \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}, & \text{falls } b_2 = 0, \\ \emptyset, & \text{falls } b_2 \neq 0; \end{cases}$$

damit besteht $\mathcal{L}_{A,b}$ für kein $b \in \mathbb{R}^2$ aus genau einem Punkt.

ii) Die Aussage ist wahr: Für alle $b \in \mathbb{R}^2$ betrachte man die Einheitsmatrix $A = E_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, und

$$\mathcal{L}_{A,b} = \{b\}$$

besteht aus genau aus einem Punkt.

iii) Die Aussage ist wahr: Ist $\mathcal{L}_{A,b}$ ein Untervektorraum, so ist $x = 0$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$, und es gilt

$$b = A \cdot x = A \cdot 0 = 0.$$

b) Wir ermitteln zunächst die notwendige Gestalt einer Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad \text{so daß für} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ die Lösungsmenge

$$\mathcal{L}_{A,b} = x_p + \mathbb{R} \cdot u \qquad \text{mit} \qquad x_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

besitzt. Damit ist zum einen $x_p \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$, also

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{array}{cccccc} (\mathrm{I}) & a_{11} & + & a_{12} & = & -1, \\ (\mathrm{II}) & a_{21} & + & a_{22} & = & 1, \end{array}$$

und zum anderen $u \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$, also

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{array}{cccccc} (\mathrm{I}') & a_{11} & - & 2\,a_{12} & = & 0, \\ (\mathrm{II}') & a_{21} & - & 2\,a_{22} & = & 0; \end{array}$$

über (I) und (I′) ergibt sich

$$(\mathrm{I}) - (\mathrm{I}') \;:\; 3\,a_{12} = -1, \qquad \text{also} \qquad a_{12} = -\tfrac{1}{3} \quad \text{und} \quad a_{11} = -\tfrac{2}{3},$$

und über (II) und (II′) ergibt sich

$$(\mathrm{II}) - (\mathrm{II}') \;:\; 3\,a_{22} = 1, \qquad \text{also} \qquad a_{22} = \tfrac{1}{3} \quad \text{und} \quad a_{21} = \tfrac{2}{3},$$

und wir erhalten als einzige Option

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Wir überprüfen nun, ob die ermittelte Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tatsächlich das Gewünschte leistet: wegen

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array} \right) \underset{\mathrm{II+I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ergibt sich

$$\mathcal{L}_{A,b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$