LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Erwin Schörner

# Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Differential– und Integralrechnung 8 — Lösungsvorschlag —

8.1 Bei der zu betrachtenden Differentialgleichung

$$\text{(D)} \qquad y' = \left(1 + \frac{2}{x}\right) y \qquad \text{für} \qquad x > 0$$

handelt es sich um die homogene lineare Differentialgleichung $y' = a(x)\, y$ mit der stetigen Funktion

$$a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad a(x) = 1 + \frac{2}{x}.$$

Da

$$A : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad A(x) = x + 2 \ln x,$$

eine Stammfunktion von $a$ ist, stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c\, e^{A(x)} = c\, e^{x + 2 \ln x} = c\, e^x \left(e^{\ln x}\right)^2 = c\, e^x\, x^2,$$

für $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D) dar.

8.2 Für alle $x \in \, ]0, \infty[$ gilt

$$x\, y' + 3\, y - 5\, x^2 = 0 \iff x\, y' = -3\, y + 5\, x^2 \iff y' = -\frac{3}{x} \cdot y + 5\, x;$$

folglich ist die inhomogene lineare Differentialgleichung $y' = a(x)\, y + b(x)$ erster Ordnung mit

$$a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad a(x) = -\frac{3}{x}, \qquad \text{und} \qquad b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad b(x) = 5\, x,$$

zu betrachten. Da

$$A : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad A(x) = -3\, \ln x,$$

eine Stammfunktion von $a$ ist, stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c\, e^{A(x)} = c\, e^{-3\, \ln x} = c \left(e^{\ln x}\right)^{-3} = c\, x^{-3},$$

für $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(x)\, y$ dar.

Zur Behandlung der inhomogenen linearen Differentialgleichung wählen wir nun den Ansatz $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = u(x)\,x^{-3}$, der Variation der Konstanten mit einer differenzierbaren Funktion $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Wegen

$$\varphi'(x) = u'(x)\,x^{-3} + u(x) \cdot \left(-3\,x^{-4}\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$ ist $\varphi$ genau dann Lösung von $y' = a(x)\,y + b(x)$, wenn

$$u'(x)\,x^{-3} - 3\,u(x)\,x^{-4} = -\frac{3}{x}\left(u(x)\,x^{-3}\right) + 5\,x,$$

also

$$u'(x)\,x^{-3} = 5\,x \qquad \text{bzw.} \qquad u'(x) = 5\,x^4$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt.

- Um eine partikuläre Lösung $\varphi_p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ der inhomogenen linearen Differentialgleichung zu erhalten, können wir speziell

  $$u(x) = x^5$$

  und damit

  $$\varphi_p(x) = u(x)\,x^{-3} = x^5 \cdot x^{-3} = x^2$$

  für alle $x \in \mathbb{R}^+$ wählen. Die allgemeine Lösung von $y' = a(x)\,y + b(x)$ ist damit die Gesamtheit der Funktionen

  $$\varphi_p + \varphi_c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + c\,x^{-3},$$

  mit $c \in \mathbb{R}$.
- Um gleich die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung zu erhalten, wählen wir

  $$u(x) = x^5 + c$$

  für $c \in \mathbb{R}$ und damit

  $$\varphi(x) = u(x)\,x^3 = \left(x^5 + c\right) \cdot x^{-3} = x^2 + c\,x^{-3}$$

  für alle $x \in \mathbb{R}^+$.

8.3 Für alle $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ gilt $\cos x > 0$ und damit

$$y'(x) \cdot \cos x - 2 \cdot y(x) \cdot \sin x = x \iff y'(x) = \frac{2\sin x}{\cos x} \cdot y(x) + \frac{x}{\cos x};$$

folglich ist die inhomogene lineare Differentialgleichung $y' = a(x)\,y + b(x)$ erster Ordnung mit den stetigen Funktionen

$$a : \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R},\ a(x) = \frac{2\sin x}{\cos x}, \quad \text{und} \quad b : \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R},\ b(x) = \frac{x}{\cos x},$$

zu betrachten. Da

$$A : \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}, \quad A(x) = -2\ln|\cos x| \underset{\cos x > 0}{=} -2\ln(\cos x),$$

eine Stammfunktion von $a$ ist, stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_c : \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c\, e^{A(x)} = c\, e^{-2\ln(\cos x)} = c\left(e^{\ln(\cos x)}\right)^{-2} = c\,(\cos x)^{-2},$$

für $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(x)\, y$ dar.

Zur Behandlung der inhomogenen linearen Differentialgleichung wählen wir nun den Ansatz der Variation der Konstanten

$$\varphi : \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = u(x)\,(\cos x)^{-2},$$

mit einer differenzierbaren Funktion $u : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}$. Wegen

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= u'(x)\,(\cos x)^{-2} + u(x) \cdot \big((-2)(\cos x)^{-3}(-\sin x)\big) \\ &= u'(x)\,(\cos x)^{-2} + u(x) \cdot 2\,(\cos x)^{-3} \sin x \end{aligned}$$

für alle $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ist $\varphi$ genau dann Lösung von $y' = a(x)\, y + b(x)$, wenn

$$u'(x)\,(\cos x)^{-2} + u(x) \cdot 2\,(\cos x)^{-3} \sin x = \frac{2 \sin x}{\cos x} \cdot u(x)\,(\cos x)^{-2} + \frac{x}{\cos x},$$

also

$$u'(x)\,(\cos x)^{-2} = \frac{x}{\cos x} \qquad \text{bzw.} \qquad u'(x) = x \cos x$$

für alle $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ gilt. Wegen

$$\begin{aligned} &\int \underbrace{x}_{v(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{w'(x)}\, dx = \underbrace{x}_{v(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{w(x)} - \int \underbrace{1}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{w(x)}\, dx = \\ &\qquad = x\, \sin x - \int \sin x\, dx = x\, \sin x - (-\cos x) + C = x\, \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

ergibt sich

$$u(x) = x\, \sin x + \cos x + c \qquad \text{für ein} \quad c \in \mathbb{R}$$

und damit

$$\varphi(x) = u(x)\,(\cos x)^{-2} = \frac{x\, \sin x + \cos x + c}{\cos^2 x}$$

für alle $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; die Gesamtheit dieser Funktionen stellt die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung dar.

8.4 Zu betrachten ist die inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung $y' = a(x)\, y + b(x)$ mit

$$a : ]-\infty; 2[ \to \mathbb{R}, \quad a(x) = \frac{1}{x-2}, \quad \text{und} \quad b : ]-\infty; 2[ \to \mathbb{R}, \quad b(x) = x^2 - 2\,x.$$

Da

$$A : ]-\infty; 2[ \to \mathbb{R}, \quad A(x) = \ln|x-2| \underset{x<2}{=} \ln(2-x),$$

eine Stammfunktion von $a$ ist, stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_c : ]-\infty; 2[ \to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c\, e^{A(x)} = c\, e^{\ln(2-x)} = c\,(2-x),$$

für $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(x)\, y$ dar.

Zur Behandlung der inhomogenen linearen Differentialgleichung wählen wir nun den Ansatz $\varphi : ]-\infty; 2[ \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = u(x) \cdot (2-x)$, der Variation der Konstanten mit einer differenzierbaren Funktion $u : ]-\infty; 2[ \to \mathbb{R}$. Wegen

$$\varphi'(x) = u'(x) \cdot (2-x) + u(x) \cdot (-1)$$

für alle $x < 2$ ist $\varphi$ genau dann Lösung von $y' = a(x)\, y + b(x)$, wenn

$$u'(x)\,(2-x) - u(x) = \frac{1}{x-2} \cdot (u(x)\,(2-x)) + \left(x^2 - 2\,x\right),$$

also

$$u'(x) = \frac{x^2 - 2\,x}{2-x} = \frac{x\,(x-2)}{-(x-2)} = -x$$

für alle $x < 2$ gilt.

- Um eine partikuläre Lösung $\varphi_p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ der inhomogenen linearen Differentialgleichung zu erhalten, können wir speziell

  $$u(x) = -\frac{x^2}{2}$$

  und damit

  $$\varphi_p(x) = u(x)\,(2-x) = -\frac{x^2}{2} \cdot (2-x)$$

  für alle $x < 2$ wählen. Die allgemeine Lösung von $y' = a(x)\, y + b(x)$ ist damit die Gesamtheit der Funktionen

  $$\varphi_p + \varphi_c : ]-\infty; 2[ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -\frac{x^2}{2} \cdot (2-x) + c\,(2-x) = \left(-\frac{x^2}{2} + c\right) \cdot (2-x),$$

  mit $c \in \mathbb{R}$.

- Um gleich die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung zu erhalten, wählen wir

  $$u(x) = -\frac{x^2}{2} + c$$

  für $c \in \mathbb{R}$ und damit

  $$\varphi(x) = u(x)\,(2-x) = \left(-\frac{x^2}{2} + c\right) \cdot (2-x)$$

  für alle $x < 2$.

Schließlich bestimmen wir die noch freie Konstante $c \in \mathbb{R}$, so daß $\varphi(1) = \frac{3}{2}$ gilt; wegen

$$\varphi(1) = \frac{3}{2} \iff -\frac{1}{2} + c = \frac{3}{2} \iff c = 2$$

ist

$$\varphi : ]-\infty; 2[ \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \left(-\frac{x^2}{2} + 2\right) \cdot (2-x),$$

die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{1}{x-2}\, y + x^2 - 2\,x \qquad \text{für} \quad x < 2 \qquad \text{mit} \quad y(1) = \tfrac{3}{2};$$

der Funktionsterm von $\varphi$ läßt sich noch zu

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\,\left(4 - x^2\right)\,(2-x) = \frac{1}{2}\,(2+x)\,(2-x)^2$$

für alle $x < 2$ umformen.

8.5 Zu betrachten ist die homogene lineare Differentialgleichung $y' = a(x)\,y$ mit der stetigen Funktion

$$a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a(x) = -e^x.$$

Da

$$A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad A(x) = -e^x,$$

eine Stammfunktion von $a$ ist, stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c\,e^{A(x)} = c\,e^{-e^x},$$

für $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von $y' = a(x)\,y$ dar. Wegen

$$\varphi_c(0) = -1 \iff c\,e^{-e^0} = -1 \iff c\,e^{-1} = -1 \iff c = -e$$

ist die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad -e \cdot e^{-e^x},$$

die Lösung des gestellten Anfangswertproblems

$$y' = -e^x\,y, \qquad y(0) = -1.$$

Zur Bestimmung der Menge $\varphi(\mathbb{R})$ ihrer Funktionswerte verwenden wir die bekannten Eigenschaften der Exponentialfunktion: wegen

$$\{e^x \mid x \in \mathbb{R}\} = \left]0;\infty\right[, \qquad \text{also} \qquad \{-e^x \mid x \in \mathbb{R}\} = \left]-\infty;0\right[,$$

ergibt sich

$$\left\{e^{-e^x} \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \left]0;1\right[, \qquad \text{also} \qquad \varphi(\mathbb{R}) = \left\{-e \cdot e^{-e^x} \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \left]-e;0\right[.$$

8.6 Bei der zu betrachtenden Differentialgleichung

$$\text{(D)} \qquad y' = x\,e^x\,y$$

handelt es sich um die homogene lineare Differentialgleichung $y' = a(x)\,y$ mit der stetigen Funktion

$$a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a(x) = x\,e^x.$$

Mit Hilfe partieller Integration ergibt sich

$$\int a(x)\,dx = \int \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{v'(x)}\,dx = \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{v(x)} - \int \underbrace{1}_{u'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{v(x)}\,dx =$$

$$= x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x + C = (x-1)\,e^x + C,$$

so daß etwa
$$A : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad A(x) = (x-1)\, e^x,$$
eine Stammfunktion von $a$ ist; folglich stellt die Gesamtheit der Funktionen
$$\varphi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c\, e^{A(x)} = c\, e^{(x-1)e^x},$$
für $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D) dar. Wir haben nun diejenigen $c \in \mathbb{R}$ zu bestimmen, für die die Lösungsfunktion $\varphi_c$ den Wertebereich $\varphi_c(\mathbb{R}) = [1, +\infty[$ besitzt; wegen
$$\varphi_c(x) = c \cdot \underbrace{e^{(x-1)e^x}}_{>0} \begin{cases} > 0, & \text{für } c > 0, \\ = 0, & \text{für } c = 0, \\ < 0, & \text{für } c < 0, \end{cases}$$
für alle $x \in \mathbb{R}$ kommen hierfür lediglich positive Werte $c > 0$ in Frage. Damit ist
$$\text{(D)} \qquad \varphi_c'(x) = a(x) \cdot \varphi_c(x) = x \cdot \underbrace{e^x}_{>0} \cdot \underbrace{c\, e^{(x-1)e^x}}_{>0} \begin{cases} \leq 0, & \text{für alle } x \leq 0, \\ \geq 0, & \text{für alle } x \geq 0, \end{cases}$$
so daß $\varphi_c$ auf $]-\infty, 0]$ monoton fallend und auf $[0, +\infty[$ monoton wachsend ist; für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich demnach
$$\varphi_c(x) \geq \varphi_c(0) = c\, e^{(0-1)e^0} = c\, e^{-1}$$
und folglich zunächst $\varphi_c(\mathbb{R}) \subseteq [c\, e^{-1}, +\infty[$. Für „$\supseteq$“ sei $y \in [c\, e^{-1}, +\infty[$; es ist $\varphi_c(0) = c\, e^{-1} \leq y$, und wegen
$$\varphi_c(x) = \underbrace{c}_{>0} \cdot \exp\Big(\underbrace{\underbrace{(x-1)}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{e^x}_{\to+\infty}}_{\to+\infty}\Big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
gibt es ein $b > 0$ mit $y \leq \varphi_c(b)$, so daß für die stetige Funktion $\varphi_c$ nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [0, b]$ mit $\varphi_c(\xi) = y$ existiert, es ist also $y \in \varphi_c(\mathbb{R})$. Zusammenfassend ist
$$\varphi_c(\mathbb{R}) = \big[c\, e^{-1}, +\infty\big[ \quad \text{mit} \quad \varphi_c(\mathbb{R}) = [1, +\infty[ \iff c\, e^{-1} = 1 \iff c = e;$$
damit ist
$$\varphi_e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_e(x) = e \cdot e^{(x-1)e^x} = e^{1+(x-1)e^x},$$
die gesuchte Lösungsfunktion von (D).

8.7 Es handelt sich um die inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung $y' = a(x)\, y + b(x)$ mit den beiden stetigen Funktionen
$$a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a(x) = \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2},$$
und
$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Da

$$A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad A(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(1 + x^2) = \ln \sqrt{1 + x^2},$$

eine Stammfunktion von $a$ ist, stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c\, e^{A(x)} = c\, e^{\ln \sqrt{1+x^2}} = c \cdot \sqrt{1 + x^2},$$

für $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(x)\, y$ dar.

Zur Behandlung der inhomogenen linearen Differentialgleichung wählen wir nun den Ansatz $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = u(x) \cdot \sqrt{1 + x^2}$, der Variation der Konstanten mit einer differenzierbaren Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wegen

$$\varphi'(x) = u'(x) \cdot \sqrt{1 + x^2} + u(x) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\varphi$ genau dann Lösung von $y' = a(x)\, y + b(x)$, wenn

$$u'(x) \cdot \sqrt{1 + x^2} + u(x) \cdot \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{x}{1 + x^2} \cdot u(x) \cdot \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

also

$$u'(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{1 + x^2}\right)^2} = \frac{1}{1 + x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; wir erhalten

$$u(x) = \arctan x + c$$

für $c \in \mathbb{R}$ und damit

$$\varphi(x) = u(x) \cdot \sqrt{1 + x^2} = (\arctan x + c) \cdot \sqrt{1 + x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Schließlich bestimmen wir die noch freie Konstante $c \in \mathbb{R}$, so daß $\varphi(0) = 0$ gilt; wegen

$$\varphi(0) = 0 \iff (\arctan 0 + c) \cdot \sqrt{1 + 0^2} \iff c = 0$$

ist

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \arctan x \cdot \sqrt{1 + x^2},$$

die maximale Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

8.8 Es handelt sich um die inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung $y' = a(x)\, y + b(x)$ mit den beiden stetigen Funktionen

$$a : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}, \quad a(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

und

$$b : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}, \quad b(x) = \cos^2 x.$$

Da

$$A : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}, \quad A(x) = -\ln|\cos x| \underset{-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}}{=} -\ln(\cos x),$$

eine Stammfunktion von $a$ ist, stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_c : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c\, e^{A(x)} = c\, e^{-\ln(\cos x)} = c \cdot \frac{1}{\cos x},$$

für $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(x)\, y$ dar.

Zur Behandlung der inhomogenen linearen Differentialgleichung wählen wir nun den Ansatz $\varphi : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = u(x) \cdot \frac{1}{\cos x}$, der Variation der Konstanten mit einer differenzierbaren Funktion $u : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}$. Wegen

$$\varphi'(x) = u'(x) \cdot \frac{1}{\cos x} + u(x) \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

für alle $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ ist $\varphi$ genau dann Lösung von $y' = a(x)\, y + b(x)$, wenn

$$u'(x) \cdot \frac{1}{\cos x} + u(x) \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot u(x) \cdot \frac{1}{\cos x} + \cos^2 x,$$

also

$$u'(x) = \cos^3 x = (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x$$

für alle $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ gilt; wir erhalten

$$u(x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

für $c \in \mathbb{R}$ und damit

$$\varphi(x) = u(x) \cdot \frac{1}{\cos x} = \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c\right) \cdot \frac{1}{\cos x}$$

für alle $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Schließlich bestimmen wir die noch freie Konstante $c \in \mathbb{R}$, so daß $\varphi(0) = 1$ gilt; wegen

$$\varphi(0) = 1 \iff c = 1$$

ist

$$\varphi : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + 1\right) \cdot \frac{1}{\cos x},$$

die maximale Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

8.9 Wegen

$$y' + a\, y = e^{b\, x} \iff y' = (-a)\, y + e^{b\, x}$$

ist die lineare Differentialgleichung $y' = \alpha(x)\, y + \beta(x)$ mit den stetigen Funktionen

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \alpha(x) = -a, \qquad \text{und} \qquad \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \beta(x) = e^{b\, x},$$

in Abhängigkeit von $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ zu betrachten. Da

$$A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad A(x) = -a\, x,$$

eine Stammfunktion von $\alpha$ ist, stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c\, e^{A(x)} = c\, e^{-a\,x},$$

für $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = \alpha(x)\, y$ dar. Zur Behandlung der gegebenen inhomogenen linearen Differentialgleichung wählen wir nun den Ansatz

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = u(x) \cdot e^{-a\,x},$$

der Variation der Konstanten mit einer differenzierbaren Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wegen

$$\varphi'(x) = u'(x) \cdot e^{-a\,x} + u(x) \cdot \big(e^{-a\,x} \cdot (-a)\big)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\varphi$ genau dann Lösung von $y' = \alpha(x)\, y + \beta(x)$, wenn

$$u'(x) \cdot e^{-a\,x} - a \cdot u(x) \cdot e^{-a\,x} = (-a) \cdot u(x) \cdot e^{-a\,x} + e^{b\,x},$$

also

$$u'(x) = e^{a\,x} \cdot e^{b\,x} = e^{(a+b)\,x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; wir erhalten

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{a+b}\, e^{(a+b)\,x} + c, & \text{falls } a+b \neq 0, \\ x + c, & \text{falls } a+b = 0, \end{cases}$$

für $c \in \mathbb{R}$ und damit

$$\varphi(x) = u(x) \cdot e^{-a\,x} = \begin{cases} \left(\frac{1}{a+b}\, e^{(a+b)\,x} + c\right) e^{-a\,x}, & \text{falls } a+b \neq 0, \\ (x + c)\, e^{-a\,x}, & \text{falls } a+b = 0, \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Für die Bestimmung der noch freien Konstante $c \in \mathbb{R}$ über die Anfangsbedingung $\varphi(0) = 0$ und die Untersuchung der Lösungsfunktion auf $\mathbb{R}^+$ treffen wir demnach die folgende Fallunterscheidung:

- Im Fall $a + b \neq 0$ erhält man

  $$\varphi(0) = 0 \iff \left(\frac{1}{a+b}\, e^0 + c\right) e^0 = 0 \iff c = -\frac{1}{a+b};$$

  damit ist $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

  $$\varphi(x) = \left(\frac{1}{a+b}\, e^{(a+b)\,x} - \frac{1}{a+b}\right) e^{-a\,x} = \frac{1}{a+b}\left(e^{(a+b)\,x} - 1\right) e^{-a\,x} = \\ = \frac{1}{a+b}\left(e^{(a+b)\,x} \cdot e^{-a\,x} - e^{-a\,x}\right) = \frac{1}{a+b}\left(e^{b\,x} - e^{-a\,x}\right)$$

  die maximale Lösung des gegebenen Anfangswertproblems; diese ist wegen $a + b \neq 0$ und damit $b \neq -a$ genau dann auf $\mathbb{R}^+$ beschränkt, wenn $b \leq 0$ und $-a \leq 0$, also $b \leq 0 \leq a$, gilt.

- Im Fall $a + b = 0$ erhält man

$$\varphi(0) = 0 \iff (0 + c)\, e^0 = 0 \iff c = 0;$$

damit ist

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = x\, e^{-a\,x},$$

die maximale Lösung des gegebenen Anfangswertproblems; diese ist genau dann auf $\mathbb{R}^+$ beschränkt, wenn $-a < 0$, also $0 < a$, gilt.

8.10 Es handelt sich um die autonome Differentialgleichung $y' = g(y)$ mit der stetigen Funktion

$$g : \left]-1; \infty\right[ \to \mathbb{R}, \quad g(y) = \frac{1}{1+y}.$$

Wegen $g(y) \neq 0$ für alle $y > -1$ erhalten wir

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int 1\, dx \qquad \text{bzw.} \qquad \int (1+y)\, dy = \int 1\, dx$$

und damit

$$\frac{1}{2}\,(1+y)^2 = x + c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Wegen

$$y(0) = 1 \iff \frac{1}{2}\,(1+1)^2 = 0 + c \iff \frac{1}{2} \cdot 2^2 = c \iff c = 2$$

erhält man

$$\frac{1}{2}\,(1+y)^2 = x + 2 \qquad \text{bzw.} \qquad (1+y)^2 = 2\,x + 4,$$

woraus sich wegen $1 + y > 0$ schließlich

$$1 + y = \sqrt{2\,x + 4} \quad \text{bzw.} \quad y = -1 + \sqrt{2\,x + 4}$$

ergibt. Nachdem die Wurzelfunktion zwar auf $\mathbb{R}_0^+$ definiert und dort stetig, aber nur auf $\mathbb{R}^+$ differenzierbar ist, enthält das maximale Lösungsintervall alle $x \in \mathbb{R}$, für die der Radikand positiv ist; wegen

$$2\,x + 4 > 0 \iff 2\,x > -4 \iff x > -2$$

ist also

$$\varphi : \left]-2; \infty\right[ \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = -1 + \sqrt{2\,x + 4},$$

die maximale Lösung des gestellten Anfangswertproblems.

8.11 Es handelt sich um eine Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen; dabei ist

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = -(1 + 2\,x), \quad \text{und} \quad g : \left]-\frac{1}{2}; \infty\right[ \to \mathbb{R}, \quad g(y) = \frac{1}{1 + 2\,y}.$$

Wegen $g(y) \neq 0$ für alle $y > -\frac{1}{2}$ erhalten wir

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)\, dx \qquad \text{bzw.} \qquad \int (1 + 2\,y)\, dy = -\int (1 + 2\,x)\, dx$$

und damit
$$y + y^2 = -\left(x + x^2\right) + c$$
für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Wegen
$$y(0) = 0 \iff 0 + 0^2 = -\left(0 + 0^2\right) + c \iff 0 = -0 + c \iff c = 0$$
erhält man
$$y + y^2 = -\left(x + x^2\right),$$
woraus sich mit quadratischer Ergänzung zunächst
$$\left(\frac{1}{2} + y\right)^2 = \frac{1}{4} + y + y^2 = \frac{1}{4} - \left(x + x^2\right)$$
und wegen $\frac{1}{2} + y > 0$ schließlich
$$\frac{1}{2} + y = \sqrt{\frac{1}{4} - (x + x^2)} \quad \text{bzw.} \quad y = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - (x + x^2)}$$
ergibt. Nachdem die Wurzelfunktion zwar auf $\mathbb{R}_0^+$ definiert und dort stetig, aber nur auf $\mathbb{R}^+$ differenzierbar ist, enthält das maximale Lösungsintervall alle $x \in \mathbb{R}$, für die der Radikand positiv ist; wegen
$$\frac{1}{4} - \left(x + x^2\right) > 0 \iff \frac{1}{4} > x + x^2 \iff \frac{1}{2} > \frac{1}{4} + x + x^2 = \left(\frac{1}{2} + x\right)^2 \iff$$
$$\iff -\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{2} + x < \frac{1}{\sqrt{2}} \iff -\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} < x < -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$
ist also
$$\varphi : \left]\frac{-1-\sqrt{2}}{2}; \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right[ \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - (x + x^2)},$$
die maximale Lösung des gestellten Anfangswertproblems.

8.12 Es ist das Anfangswertproblem
$$y' = f(x, y) \qquad \text{mit} \qquad y(0) = 1$$
für die Funktion
$$f : \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -1\right\} \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{\sin x}{y + 1},$$
gegeben; zu betrachten ist damit
$$y' = \frac{\sin x}{y + 1} \qquad \text{für} \qquad y > -1 \qquad \text{mit} \qquad y(0) = 1.$$
Es handelt sich um eine Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen; dabei ist
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \sin x, \quad \text{und} \quad g : ]-1, \infty[ \to \mathbb{R}, \quad g(y) = \frac{1}{y + 1}.$$

Wegen $g(y) \neq 0$ für alle $y > -1$ erhalten wir

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)\,dx \qquad \text{bzw.} \quad \int (y+1)\,dy = \int \sin x\,dx$$

und damit

$$\frac{1}{2}(y+1)^2 = -\cos x + c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Wegen

$$y(0) = 1 \iff \frac{1}{2}(1+1)^2 = -\cos 0 + c \iff 2 = -1 + c \iff c = 3$$

erhält man

$$\frac{1}{2}(y+1)^2 = -\cos x + 3 \qquad \text{bzw.} \quad (y+1)^2 = 6 - 2\cos x,$$

woraus sich wegen $y > -1$ bzw. $y + 1 > 0$ dann

$$y + 1 = \sqrt{6 - 2\cos x} \qquad \text{bzw.} \quad y = -1 + \sqrt{6 - 2\cos x}$$

ergibt. Wegen $6 - 2\cos x \geq 4 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = -1 + \sqrt{6 - 2\cos x},$$

die maximale Lösung des gestellten Anfangswertproblems.

8.13 Bei der gegebenen Differentialgleichung

$$y' = -\frac{2\,e^{-y}}{x^2 + 2\,x} = \frac{-2}{x^2 + 2\,x} \cdot e^{-y}$$

mit

$$x^2 + 2\,x = 0 \iff x \cdot (x+2) = 0 \iff x \in \{0, -2\}$$

handelt es sich um eine Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen; dabei ist

$$h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{-2}{x^2 + 2x}, \qquad \text{und} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(y) = e^{-y},$$

wobei für $h$ im Hinblick auf den gegebenen Anfangswert $y(1) = 0$ dasjenige maximale Definitionsintervall zu wählen ist, das $x = 1$ enthält.

Wegen $g(y) = e^{-y} \neq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)\,dx \qquad \text{bzw.} \quad \int e^y dy = \int \frac{-2}{x^2 + 2x}\,dx,$$

wegen

$$h(x) = \frac{-2}{x^2 + 2x} = \frac{x - (x+2)}{x \cdot (x+2)} = \frac{x}{x \cdot (x+2)} - \frac{x+2}{x \cdot (x+2)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$ damit

$$e^y = \ln|x+2| - \ln|x| + c \underset{x>0}{=} \ln(x+2) - \ln x + c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Wegen

$$y(1) = 0 \iff e^0 = \ln(1+2) - \ln 1 + c \iff 1 = \ln 3 + c \iff c = 1 - \ln 3$$

erhält man

$$e^y = \ln(x+2) - \ln x + 1 - \ln 3$$

und damit

$$y = \ln\big(\ln(x+2) - \ln x + 1 - \ln 3\big).$$

Das maximale Lösungsintervall umfaßt dabei alle $x \in \mathbb{R}^+$, für die das Argument des äußeren Logarithmus positiv ist; wegen

$$\ln(x+2) - \ln x + 1 - \ln 3 > 0 \underset{1=\ln e}{\iff} \ln(x+2) + \ln e > \ln x + \ln 3 \iff$$
$$\ln(e\,(x+2)) > \ln(3\,x) \underset{(*)}{\iff} e\,(x+2) > 3\,x \iff e\,x + 2\,e > 3\,x \iff$$
$$2\,e > 3\,x - e\,x \iff 2\,e > (3-e)\,x \underset{3-e>0}{\iff} \frac{2\,e}{3-e} > x.$$

wobei in $(*)$ das Monotonieverhalten der Exponentialfunktion und des natürlichen Logarithmus eingeht, ist also

$$\varphi : \left]0, \frac{2\,e}{3-e}\right[ \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \ln\big(\ln(x+2) - \ln x + 1 - \ln 3\big),$$

die maximale Lösung des gestellten Anfangswertproblems.

8.14 Die zu betrachtende Differentialgleichung

$$y'\,y\,\big(x^2+1\big) + x\,\big(y^2+1\big) = 0$$

läßt sich in

$$y'\,y\,\big(x^2+1\big) = -x\,\big(y^2+1\big) \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{2\,y}{y^2+1} \cdot y' = -\frac{2\,x}{x^2+1}$$

umformen; damit sind die beiden Variablen $x$ und $y$ bereits getrennt, so daß man durch Integration auf beiden Seiten

$$\int \frac{2\,y}{y^2+1}\,dy = \int \left(-\frac{2\,x}{x^2+1}\right) dx, \quad \text{also} \quad \ln\big(y^2+1\big) = -\ln\big(x^2+1\big) + c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ erhält. Wegen

$$y(0) = 1 \iff \ln\big(1^2+1\big) = -\ln\big(0^2+1\big) + c \iff \ln 2 = c$$

ergibt sich weiter

$$\ln\big(y^2+1\big) = -\ln\big(x^2+1\big) + \ln 2 = \ln\frac{2}{x^2+1},$$

woraus sich

$$y^2 + 1 = \frac{2}{x^2+1} \qquad \text{bzw.} \qquad y^2 = \frac{2}{x^2+1} - 1 = \frac{2-(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

und damit wegen $y(0) = 1$ dann

$$y = \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}}$$

ergibt. Folglich ist

$$\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}},$$

die Lösung des gestellten Anfangswertproblems; da die Wurzelfunktion zwar auf $\mathbb{R}_0^+$ definiert und stetig, aber nur auf $\mathbb{R}^+$ differenzierbar ist, beinhaltet das maximale Definitionsintervall $D_\varphi$ genau diejenigen $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{1 - x^2}{1 + x^2} > 0 \iff 1 - x^2 > 0 \iff x^2 < 1 \iff -1 < x < 1;$$

es ist also $D_\varphi = ]-1, 1[$.

8.15 Die gegebene Differentialgleichung besitzt wegen

$$yy' - e^x = 0 \iff y\,y' = e^x$$

bereits „getrennte Variablen“, so daß sich durch Integration

$$\int y\,y'\,dx = \int e^x\,dx \qquad \text{bzw.} \qquad \int y\,dy = \int e^x\,dx$$

und damit

$$\frac{y^2}{2} = e^x + c$$

für eine geeignete Konstante $c \in \mathbb{R}$ ergibt. Wegen

$$y(0) = 1 \iff \frac{1^2}{2} = e^0 + c \iff \frac{1}{2} = 1 + c \iff c = -\frac{1}{2}$$

erhält man für die Lösung des gestellten Anfangswertproblems

$$\frac{y^2}{2} = e^x - \frac{1}{2} \qquad \text{bzw.} \qquad y^2 = 2\,e^x - 1.$$

Die Annahme, eine Lösungsfunktion von $yy' - e^x = 0$ besitze eine Nullstelle, führt in

$$0 \cdot y' - e^x = 0, \qquad \text{also} \qquad - e^x = 0,$$

zu einem Widerspruch, so daß die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems wegen $y(0) = 1$ komplett oberhalb der $x$–Achse verläuft; wegen $y > 0$ gilt also

$$y = \sqrt{2\,e^x - 1},$$

mit

$$2\,e^x - 1 > 0 \iff 2\,e^x > 1 \iff e^x > \frac{1}{2} \iff x > \ln\frac{1}{2} = -\ln 2.$$

Damit ist

$$\varphi : ]-\ln 2, \infty[ \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \sqrt{2\,e^x - 1},$$

die maximale Lösung des gestellten Anfangswertproblems.

8.16 Es handelt sich um eine Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen; dabei ist

$$h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x^{\frac{1}{2}}, \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad g(y) = y^{\frac{1}{2}}.$$

Wegen $g(y) = y^{\frac{1}{2}}$ für alle $y > 0$ erhalten wir

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)\,dx \qquad \text{bzw.} \qquad \int y^{-\frac{1}{2}}\,dy = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

und damit

$$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c, \quad \text{also} \quad 2\,y^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + c \quad \text{und} \quad y = \left(\frac{1}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + \frac{c}{2}\right)^2$$

für ein $c \in \mathbb{R}$. Wegen

$$y(1) = 1 \iff 2 \cdot 1^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}} + c \iff c = \frac{4}{3}$$

ist

$$y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad y(x) = \left(\frac{1}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\right)^2$$

die maximale Lösung des gestellten Anfangswertproblems.

8.17 a) Bei dem gegebenen Anfangswertproblem

$$y' = e^{x-y} = e^x \cdot e^{-y} \qquad \text{mit} \qquad y(0) = \ln 2$$

handelt es sich um eine Differentialgleichung $y' = g(y) \cdot h(x)$ mit getrennten Variablen mit den beiden stetigen Funktionen

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(y) = e^{-y}, \qquad \text{und} \qquad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = e^x.$$

Wegen $g(y) = e^{-y} \neq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)\,dx \quad \text{bzw.} \quad \int e^y\,dy = \int e^x\,dx, \quad \text{also} \quad e^y = e^x + c,$$

für ein $c \in \mathbb{R}$; dabei gilt

$$y(0) = \ln 2 \iff e^{\ln 2} = e^0 + c \iff 2 = 1 + c \iff c = 1$$

und damit

$$e^y = e^x + 1 \iff y = \ln\left(e^x + 1\right),$$

so daß

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \phi(x) = \ln\left(e^x + 1\right),$$

die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösungsfunktion des gestellten Anfangswertproblems ist.

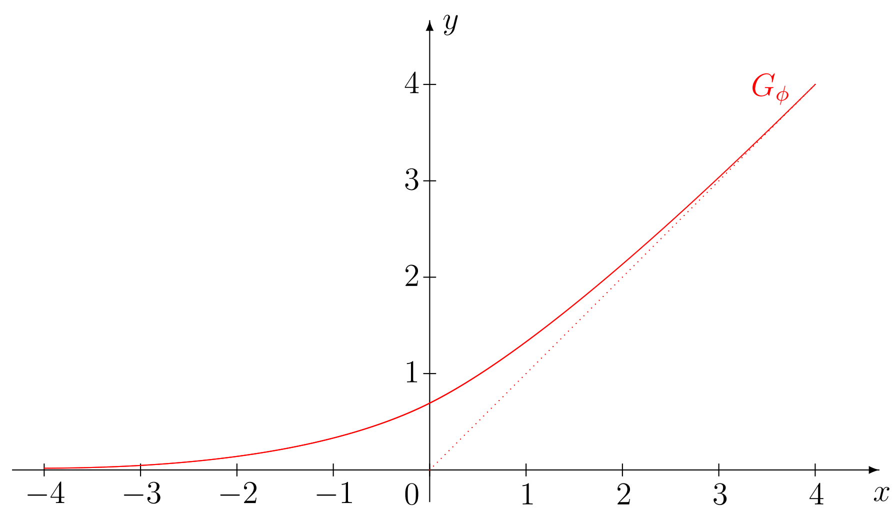
b) Für die Lösungsfunktion $\phi$ von a) erhält man die Grenzwerte

$$\lim_{x\to-\infty} \phi(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln \underbrace{\big(\underbrace{e^x}_{\to 0} + 1\big)}_{\to 1} \underset{\ln \text{ stetig}}{=} \ln 1 = 0$$

sowie

$$\lim_{x\to+\infty} (\phi(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \big(\ln(e^x+1) - \ln e^x\big) = \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{e^x+1}{e^x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\big(1 + e^{-x}\big) = \lim_{x\to+\infty} \ln \underbrace{\big(1 + \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}\big)}_{\to 1} \underset{\ln \text{ stetig}}{=} \ln 1 = 0,$$

so daß sich für ihren Graphen $G_\phi$ die folgende Skizze ergibt:




8.18 a) Zu betrachten ist die autonome Differentialgleichung $y' = g(y)$ mit der stetigen Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(y) = \frac{y^2}{y^2+1};$$

dabei liefert die Nullstelle $y_0 = 0$ die konstante Lösung

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \psi(x) = 0,$$

deren Graph $G_\psi$ die $x$–Achse ist. Da $g$ (als gebrochenrationale Funktion) sogar stetig differenzierbar ist, kann wegen des Existenz– und Eindeutigkeitssatzes jede weitere Lösung $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$ der gegebenen Differentialgleichung keinen gemeinsamen Punkt mit $\psi$ haben, ihr Graph $G_\varphi$ verläuft also entweder komplett oberhalb oder komplett unterhalb der $x$–Achse. Hierfür ist $g(y) \neq 0$ mit

$$\frac{1}{g(y)} = \frac{y^2+1}{y^2} = 1 + \frac{1}{y^2},$$

und wir erhalten

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int 1\,dx \qquad \text{bzw.} \qquad \int \left(1 + \frac{1}{y^2}\right) dy = \int 1\,dx,$$

also

$$(*) \qquad y - \frac{1}{y} = x + c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, durch Multiplikation mit $y \neq 0$ demnach

$$y^2 - 1 = (x+c) \cdot y \qquad \text{bzw.} \qquad y^2 - (x+c) \cdot y - 1 = 0,$$

wodurch sich über die Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$y = \frac{(x+c) \pm \sqrt{(-(x+c))^2 - 4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{(x+c) \pm \sqrt{(x+c)^2 + 4}}{2}$$

ergibt; wir erhalten demnach die Lösungsfunktionen

$$\varphi_{c,1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_{c,1}(x) = \frac{(x+c) + \sqrt{(x+c)^2 + 4}}{2},$$

und

$$\varphi_{c,2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_{c,2}(x) = \frac{(x+c) - \sqrt{(x+c)^2 + 4}}{2},$$

wobei $G_{\varphi_{c,1}}$ komplett oberhalb und $G_{\varphi_{c,2}}$ komplett unterhalb der $x$–Achse verläuft.

b) Der Graph der (eindeutig bestimmten) maximalen Lösungsfunktion der Differentialgleichung $y' = g(y)$ mit dem Anfangswert $y(0) = 1$ verläuft komplett oberhalb der $x$–Achse und ist demnach

$$\varphi_{c,1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_{c,1}(x) = \frac{(x+c) + \sqrt{(x+c)^2 + 4}}{2},$$

für eine geeignete Konstante $c \in \mathbb{R}$; wegen $(*)$ gilt für diese

$$1 - \frac{1}{1} = 0 + c, \qquad \text{also} \qquad c = 0,$$

und wir erhalten

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2};$$

diese besitzt schon den größtmöglichen Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und läßt sich damit nicht weiter fortsetzen.

8.19 Es handelt sich um die Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen für die stetigen Funktionen

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = 2\,x, \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(y) = y^2;$$

dabei liefert die Nullstelle $y_0 = 0$ die konstante Lösung

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \psi(x) = 0,$$

deren Graph $G_\psi$ die $x$–Achse ist. Da $g$ sogar stetig differenzierbar ist, kann wegen des Existenz– und Eindeutigkeitssatzes jede weitere Lösung $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$

der gegebenen Differentialgleichung keinen gemeinsamen Punkt mit $\psi$ haben, ihr Graph $G_\varphi$ verläuft also entweder komplett unterhalb oder komplett oberhalb der $x$–Achse. Hierfür erhalten wir

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)\,dx \qquad \text{bzw.} \qquad \int \frac{dy}{y^2} = \int 2\,x\,dx,$$

also

$$-\frac{1}{y} = x^2 + c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, die wir nun für die gegebenen Anfangswerte bestimmen:

- Für $y(1) = \frac{1}{2}$ ergibt sich

  $$-\frac{1}{\frac{1}{2}} = 1^2 + c \iff -2 = 1 + c \iff c = -3,$$

  wodurch man

  $$-\frac{1}{y} = x^2 - 3 \qquad \text{bzw.} \qquad y = \frac{1}{3 - x^2},$$

  erhält; von den maximalen Definitionsintervallen $\left]-\infty; -\sqrt{3}\right[$, $\left]-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right[$ und $\left]\sqrt{3}; \infty\right[$ ist dabei dasjenige zu wählen, das den Anfangswert $x_0 = 1$ enthält. Folglich ist die maximale Lösung des Anfangswertproblems

  $$\varphi : \left]-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right[ \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{3 - x^2}.$$

- Für $y(1) = -\frac{1}{2}$ ergibt sich

  $$-\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 1^2 + c \iff 2 = 1 + c \iff c = 1,$$

  wodurch man

  $$-\frac{1}{y} = x^2 + 1 \qquad \text{bzw.} \qquad y = -\frac{1}{1 + x^2},$$

  erhält; diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Folglich ist die maximale Lösung des Anfangswertproblems

  $$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

8.20 Wegen

$$y' = x\,y - x\,y^2 = x \cdot \left(y - y^2\right)$$

ist die Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen für die stetigen Funktionen

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x, \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(y) = y\,(1 - y),$$

zu betrachten; da $g$ darüber hinaus stetig differenzierbar ist, gibt es zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ genau eine maximale Lösung $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_0) = y_0$.

Zunächst liefern die beiden Nullstellen $y_1 = 0$ und $y_2 = 1$ von $g$ die beiden konstanten Lösungen

$$\psi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \psi_1(x) = 0, \qquad \text{und} \qquad \psi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \psi_2(x) = 1,$$

welche insbesondere den Anfangsbedingungen $\psi_1(0) = 0$ und $\psi_2(0) = 1$ genügen; da nun die Lösungen $\varphi_1 : D_{\varphi_1} \to \mathbb{R}$ und $\varphi_2 : D_{\varphi_2} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung mit den Anfangswerten $\varphi_1(0) = -1$ und $\varphi_2(0) = 2$ keinen gemeinsamen Punkt mit $\psi_1$ und $\psi_2$ haben, verläuft zum einen $G_{\varphi_1}$ komplett unterhalb von $G_{\psi_1}$ und zum anderen $G_{\varphi_2}$ komplett oberhalb von $G_{\psi_2}$. Hierfür erhalten wir

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)\,dx \qquad \text{bzw.} \qquad \int \frac{1}{y(1-y)}\,dy = \int x\,dx,$$

wegen

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{(1-y)+y}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}$$

also

$$\ln|y| - \ln|1-y| = \frac{1}{2}\,x^2 + c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Wir treffen die folgende Fallunterscheidung:

- Für die Lösung $\varphi_1$ mit $\varphi_1(0) = -1$ ergibt sich

  $$\ln|-1| - \ln|1-(-1)| = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + c \iff c = -\ln 2,$$

  wegen $y < 0$ also

  $$\ln(-y) - \ln(1-y) = \frac{1}{2}\,x^2 - \ln 2$$

  und damit

  $$\frac{1}{2}\,x^2 = \ln(-y) - \ln(1-y) + \ln 2 = \ln\frac{-2y}{1-y} = \ln\frac{2\,y}{y-1},$$

  woraus man dann

  $$e^{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2\,y}{y-1} \iff e^{\frac{1}{2}x^2}\,(y-1) = 2\,y \iff$$
  $$\iff \left(e^{\frac{1}{2}x^2} - 2\right) y = e^{\frac{1}{2}x^2} \iff y = \frac{e^{\frac{1}{2}x^2}}{e^{\frac{1}{2}x^2} - 2}$$

  erhält; wegen

  $$e^{\frac{1}{2}x^2} - 2 = 0 \iff e^{\frac{1}{2}x^2} = 2 \iff \frac{1}{2}\,x^2 = \ln 2 \iff$$
  $$\iff x^2 = 2\,\ln 2 \iff x = \pm\sqrt{2\,\ln 2}$$

  ergibt sich schließlich die Lösungsfunktion

  $$\varphi_1 : \left]-\sqrt{2\,\ln 2};\ \sqrt{2\,\ln 2}\right[ \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = \frac{e^{\frac{1}{2}x^2}}{e^{\frac{1}{2}x^2} - 2}.$$

- Für die Lösung $\varphi_2$ mit $\varphi_2(0) = 2$ ergibt sich

$$\ln|2| - \ln|1-2| = \frac{1}{2}\cdot 0^2 + c \iff c = \ln 2,$$

wegen $y > 1$ also

$$\ln y - \ln(y-1) = \frac{1}{2}\,x^2 + \ln 2$$

und damit

$$\frac{1}{2}\,x^2 = \ln y - \ln(y-1) - \ln 2 = \ln\frac{y}{2\,(y-1)},$$

woraus man dann

$$e^{\frac{1}{2}\,x^2} = \frac{y}{2\,(y-1)} \iff 2\,e^{\frac{1}{2}\,x^2}\,(y-1) = y \iff$$

$$\iff \left(2\,e^{\frac{1}{2}\,x^2} - 1\right) y = 2\,e^{\frac{1}{2}\,x^2} \iff y = \frac{2\,e^{\frac{1}{2}\,x^2}}{2\,e^{\frac{1}{2}\,x^2} - 1}$$

erhält; wegen

$$\frac{1}{2}\,x^2 \geq 0 \qquad \text{und damit} \qquad 2\,e^{\frac{1}{2}\,x^2} - 1 \geq 2\,e^0 - 1 = 2\cdot 1 - 1 = 1$$

ergibt sich schließlich die Lösungsfunktion

$$\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x) = \frac{2\,e^{\frac{1}{2}\,x^2}}{2\,e^{\frac{1}{2}\,x^2} - 1}.$$

8.21 Dem gegebenen Anfangswertproblem

$$y' = \frac{2\,\cos^2(y)}{1-x^2} \qquad \text{mit} \qquad y(0) = \frac{\pi}{3}$$

liegt die Differentialgleichung $y' = h(x)\cdot g(y)$ mit getrennten Variablen für die stetigen Funktionen

$$h : ]-1;1[ \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{2}{1-x^2}, \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(y) = \cos^2 y,$$

zugrunde; dabei wählen wir für $h$ das maximale Definitionsintervall, welches den Punkt $x_0 = 0$ beinhaltet. Die Nullstellen von $g$, also die Nullstellen $\frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ des Cosinus, liefern die konstanten Lösungen der Differentialgleichung; da nun $g$ sogar stetig differenzierbar ist, kann wegen des Existenz– und Eindeutigkeitssatzes jede weitere Lösung der gegebenen Differentialgleichung keinen gemeinsamen Punkt mit einer konstanten Lösungen besitzen. Folglich verläuft der Graph $G_\varphi$ der maximalen Lösung $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$ des gestellten Anfangswertproblems wegen $\varphi(0) = \frac{\pi}{3}$ komplett zwischen $y = -\frac{\pi}{2}$ und $y = \frac{\pi}{2}$. Wir erhalten

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)\,dx \qquad \text{bzw.} \qquad \int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int \frac{2}{1-x^2}\,dx,$$

wegen

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)\cdot(1+x)} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$$

also

$$\tan y = \ln(1+x) - \ln(1-x) + c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$; wegen

$$y(0) = \frac{\pi}{3} \iff \tan\frac{\pi}{3} = \ln(1+0) - \ln(1-0) + c \iff \sqrt{3} = c$$

erhalten wir

$$\tan y = \ln\frac{1+x}{1-x} + \sqrt{3} \qquad \text{bzw.} \qquad y = \arctan\left(\ln\frac{1+x}{1-x} + \sqrt{3}\right),$$

und damit die maximale Lösung

$$\varphi : \,]-1;1[\, \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \arctan\left(\ln\frac{1+x}{1-x} + \sqrt{3}\right).$$

8.22 Es handelt sich um die Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen für die stetigen Funktionen

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(y) = y - 1;$$

dabei liefert die Nullstelle $y_0 = 1$ die konstante Lösung

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \psi(x) = 1,$$

deren Graph $G_\psi$ die Parallele $y = 1$ zur $x$–Achse ist. Da $g$ sogar stetig differenzierbar ist, kann wegen des Existenz– und Eindeutigkeitssatzes jede weitere Lösung $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$ der gegebenen Differentialgleichung keinen gemeinsamen Punkt mit $\psi$ haben, ihr Graph $G_\varphi$ verläuft also entweder komplett unterhalb oder komplett der Geraden $y = 1$:

- Für die Lösungen $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$, deren Graph komplett unterhalb der Geraden $y = 1$ verläuft, gilt $\varphi(x) < 1$ und damit unter Verwendung der gegebenen Differentialgleichung

$$\varphi'(x) = \frac{\overbrace{\varphi(x) - 1}^{<0}}{\underbrace{x^2+1}_{>0}} < 0$$

  für alle $x \in D_\varphi$; folglich sind diese Lösungen aber streng monoton fallend.

- Für die Lösungen $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$, deren Graph komplett oberhalb der Geraden $y = 1$ verläuft, gilt $\varphi(x) > 1$ und damit unter Verwendung der gegebenen Differentialgleichung

$$\varphi'(x) = \frac{\overbrace{\varphi(x) - 1}^{>0}}{\underbrace{x^2+1}_{>0}} > 0$$

  für alle $x \in D_\varphi$; folglich sind diese Lösungen streng monoton wachsend, und wir erhalten hierfür

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)\,dx \qquad \text{bzw.} \qquad \int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x^2+1},$$

wegen $y > 1$ bzw. $y - 1 > 0$ also

$$\ln(y-1) = \arctan x + c \qquad \text{bzw.} \qquad y = e^{\arctan x + c} + 1$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Es ergeben sich also die streng monoton wachsenden Lösungsfunktionen

$$\varphi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = e^{\arctan x + c} + 1,$$

für reelle Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

8.23 a) In Abhängigkeit des reellen Parameters $a > 0$ sind alle reellen Lösungen $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$xy' = \frac{y-a}{ax+1} \qquad \text{für} \qquad x \in \left]-\tfrac{1}{a}; +\infty\right[$$

zu bestimmen; ist $0 \in D_\varphi$, so ergibt sich aus der Differentialgleichung

$$0 \cdot \varphi'(0) = \frac{\varphi(0) - a}{a \cdot 0 + 1}, \qquad \text{also} \qquad \varphi(0) = a.$$

Für $x \neq 0$, also für $x \in I$ mit $I = \left]-\tfrac{1}{a}; 0\right[$ oder $I = ]0; +\infty[$, erhält man

$$xy' = \frac{y-a}{ax+1} \iff y' = \frac{1}{x(ax+1)} \cdot (y-a)\,,$$

also eine Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen für die stetigen Funktionen

$$h : I \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{x(ax+1)}, \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(y) = y - a;$$

diese läßt sich auch in die Gestalt

$$\text{(D)} \qquad y' = \frac{1}{x(ax+1)} \cdot y - \frac{a}{x(ax+1)}$$

einer linearen Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot y + b(x)$ erster Ordnung mit den stetigen Funktionen

$$h : I \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{x(ax+1)}, \quad \text{und} \quad b : I \to \mathbb{R}, \quad b(x) = -\frac{a}{x(ax+1)},$$

bringen. Wegen

$$h(x) = \frac{1}{x(ax+1)} = \frac{(ax+1) - ax}{x(ax+1)} = \\ = \frac{ax+1}{x(ax+1)} - \frac{ax}{x(ax+1)} = \frac{1}{x} - \frac{a}{ax+1}$$

für alle $x \in I$ ist

$$H : I \to \mathbb{R}, \quad H(x) = \ln|x| - \ln|ax+1| = \ln\left|\frac{x}{ax+1}\right|,$$

eine Stammfunktion von $h$, so daß die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_c : I \to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c \cdot e^{H(x)} = c \cdot \left| \frac{x}{ax+1} \right|,$$

für $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot y$ darstellt; da nun die Nullstelle $y = a$ der Funktion $g$ in der konstanten Funktion

$$\varphi_p : I \to \mathbb{R}, \quad \varphi_p(x) = a,$$

insbesondere eine partikuläre Lösung von (D) liefert, stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = \varphi_p + \varphi_c : I \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = a + c \cdot \left| \frac{x}{ax+1} \right|,$$

mit $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D) auf $I$ dar.
Wir setzen nun die auf den Teilintervallen $I = \left]-\frac{1}{a}; 0\right[$ bzw. $I = ]0; \infty[$ gefundenden Teillösungen zu einer auf dem Gesamtintervall $\left]-\frac{1}{a}; \infty\right[$ definierten Gesamtlösung zusammen; es ist also

$$\varphi : \left]-\frac{1}{a}; \infty\right[ \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} a - c_1 \cdot \frac{x}{ax+1}, & \text{für } x < 0, \\ a, & \text{für } x = 0, \\ a + c_2 \cdot \frac{x}{ax+1}, & \text{für } x > 0, \end{cases}$$

mit Konstanten $c_1$, $c_2 \in \mathbb{R}$. Damit ist die Funktion $\varphi$ zunächst (unabhängig von $c_1$ und $c_2$) in allen Punkten $x \neq 0$ differenzierbar und erfüllt dort die gegebene Differentialgleichung; wegen

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \underset{x<0}{=} \frac{\left(a - c_1 \cdot \frac{x}{ax+1}\right) - a}{x} = \frac{-c_1 \cdot \frac{x}{ax+1}}{x} = \\ = -c_1 \cdot \frac{1}{ax+1} \underset{x \to 0-}{\longrightarrow} -c_1 \cdot \frac{1}{a \cdot 0 + 1} = -c_1$$

und

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \underset{x>0}{=} \frac{\left(a + c_2 \cdot \frac{x}{ax+1}\right) - a}{x} = \frac{c_2 \cdot \frac{x}{ax+1}}{x} = \\ = c_2 \cdot \frac{1}{ax+1} \underset{x \to 0+}{\longrightarrow} c_2 \cdot \frac{1}{a \cdot 0 + 1} = c_2$$

ist $\varphi$ genau dann auch im Punkte $x = 0$ differenzierbar, wenn $-c_1 = c_2$ gilt, und in diesem Fall erfüllt sie auch dort die gegebene Differentialgleichung. Insgesamt stellt demnach die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi : \left]-\frac{1}{a}; \infty\right[ \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = a + c \cdot \frac{x}{ax+1},$$

mit Konstanten $c = -c_1 = c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung dar.

b) Für die in a) bestimmten Lösungsfunktionen ergibt sich

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to\infty} \left(a + c \cdot \frac{x}{ax+1}\right) = $$
$$= \lim_{x\to\infty} \left(a + c \cdot \frac{1}{a+\frac{1}{x}}\right) = a + c \cdot \frac{1}{a+0} = a + \frac{c}{a}$$

sowie wegen

$$\lim_{x\to -\frac{1}{a}+} x = -\frac{1}{a} < 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to -\frac{1}{a}+} (ax+1) = 0+$$

also

$$\lim_{x\to -\frac{1}{a}+} \frac{x}{ax+1} = -\infty$$

damit

$$\lim_{x\to -\frac{1}{a}+} \varphi(x) = \lim_{x\to -\frac{1}{a}+} \left(a + c \cdot \frac{x}{ax+1}\right) = \begin{cases} -\infty, & \text{falls } c > 0, \\ a, & \text{falls } c = 0, \\ +\infty, & \text{falls } c < 0. \end{cases}$$

8.24 Es handelt sich um die Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen für die stetigen Funktionen

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = 2\,x, \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(y) = y\,(y-1);$$

damit existiert für jeden Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ eine maximale Lösung der Differentialgleichung mit dem Anfangswert $y(a) = b$, welche im Hinblick auf die stetige Differenzierbarkeit von $g$ sogar eindeutig bestimmt ist. Für $b = 0$ oder $b = 1$ sind dies die durch die beiden Nullstellen $y_1 = 0$ und $y_2 = 1$ von $g$ gegebenen konstanten Lösungen

$$\psi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \psi_1(x) = 0, \quad \text{und} \quad \psi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \psi_2(x) = 1,$$

welche jeweils auf $\mathbb{R}$ definiert und beschränkt sind.

Jede weitere Lösung $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung kann keinen gemeinsamen Punkt mit $\psi_1$ oder $\psi_2$ haben, ihr Graph $G_\varphi$ verläuft also entweder komplett unterhalb von $G_{\psi_1}$ (bei $b < 0$) oder komplett zwischen $G_{\psi_1}$ und $G_{\psi_2}$ (bei $0 < b < 1$) oder komplett oberhalb von $G_{\psi_2}$ (bei $b > 1$). Hierfür erhalten wir

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)\,dx \qquad \text{bzw.} \qquad \int \frac{1}{y(y-1)}\,dy = \int 2\,x\,dx,$$

wegen

$$\frac{1}{y(y-1)} = \frac{y-(y-1)}{y(y-1)} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}$$

also

$$\ln|y-1| - \ln|y| = x^2 + c$$

und damit

$$\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = x^2+c \qquad \text{bzw.} \qquad \left|1-\frac{1}{y}\right| = e^{x^2+c}$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$; für diese gilt

$$y(a) = b \iff \ln\left|\frac{b-1}{b}\right| = a^2+c \iff c = \ln\left|\frac{b-1}{b}\right| - a^2.$$

Wir treffen die folgende Fallunterscheidung:

- Für $0 < b < 1$ verläuft $G_\varphi$ komplett zwischen $G_{\psi_1}$ und $G_{\psi_2}$, weswegen $\varphi$ auf jeden Fall beschränkt ist. Wegen $0 < y < 1$ ist $\frac{1}{y} > 1$; damit erhält man

  $$\frac{1}{y} - 1 = e^{x^2+c} \qquad \text{bzw.} \qquad y = \frac{1}{1+e^{x^2+c}},$$

  und die Lösung

  $$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{1+e^{x^2+c}},$$

  ist auf $\mathbb{R}$ definiert.

- Für $b < 0$ oder $b > 1$ verläuft $G_\varphi$ komplett unterhalb von $G_{\psi_1}$ oder komplett oberhalb von $G_{\psi_2}$. Wegen $y < 0$ oder $y > 1$ ist $\frac{1}{y} < 1$; damit erhält man

  $$1 - \frac{1}{y} = e^{x^2+c} \qquad \text{bzw.} \qquad y = \frac{1}{1-e^{x^2+c}},$$

  und die Lösung

  $$\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{1-e^{x^2+c}},$$

  ist genau dann auf $\mathbb{R}$ definiert, wenn der Nenner $1-e^{x^2+c}$ ihres Funktionsterms ohne Nullstelle ist. Wegen

  $$1-e^{x^2+c} = 0 \iff e^{x^2+c} = 1 \iff x^2+c = 0 \iff x^2 = -c$$

  für alle $x \in \mathbb{R}$ ist dies genau dann der Fall, wenn $c > 0$ ist; dabei gilt

  $$c > 0 \iff \ln\left|\frac{b-1}{b}\right| - a^2 > 0 \underset{\frac{1}{b}<1}{\iff} \ln\left(1-\frac{1}{b}\right) > a^2,$$

  wodurch wegen $a^2 \geq 0$ hierfür notwendig

  $$\ln\left(1-\frac{1}{b}\right) > 0 \iff 1-\frac{1}{b} > 1 \iff -\frac{1}{b} > 0 \iff b < 0$$

  gelten muß. Insbesondere sind alle Lösungen $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$ für $b > 1$ nicht auf ganz $\mathbb{R}$ definiert; für $b < 0$ ergibt sich weiter

  $$c > 0 \iff \ln\left(1-\frac{1}{b}\right) > a^2 \underset{1-\frac{1}{b}>1}{\iff} a = 0 \text{ oder } 1-\frac{1}{b} > e^{a^2} \iff$$
  $$\left(a = 0 \text{ oder } 1-\frac{1}{b} > e^{a^2}\right) \iff \left(a = 0 \text{ oder } -\frac{1}{b} > e^{a^2}-1\right) \iff$$
  $$\left(a = 0 \text{ oder } -b < \frac{1}{e^{a^2}-1}\right) \iff \left(a = 0 \text{ oder } b > \frac{1}{1-e^{a^2}}\right).$$

In diesen Fällen ist aber die auf $\mathbb{R}$ definierte Lösung $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$ wegen

$$\frac{1}{1-e^c} \leq \frac{1}{1-e^{x^2+c}} < 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

auch beschränkt.

8.25 Zu betrachten ist die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = y^3 - \frac{y}{x},$$

wobei $f$ stetig und bezüglich $y$ stetig partiell differenzierbar ist; folglich existiert für jeden Punkt $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ eine eindeutig bestimmte maximale Lösung $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$ von $y' = f(x, y)$ mit der Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = y_0$. Dabei ist die Nullfunktion

$$\varphi_0 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \varphi_0(x) = 0,$$

wegen

$$\varphi_0'(x) = 0 = (\varphi_0(x))^3 - \frac{\varphi_0(x)}{x}$$

für alle $x > 0$ eine maximale Lösung der Differentialgleichung mit $\varphi_0(1) = 0 < \frac{1}{2}$. Folglich kann aber der Graph $G_\varphi$ der gesuchten Lösung des gegebenen Anfangswertproblems $y' = f(x, y)$ mit $y(1) = \frac{1}{2}$ keinen gemeinsamen Punkt mit $G_{\varphi_0}$ besitzen und verläuft damit komplett oberhalb der $x$–Achse, besitzt also insbesondere nur positive Funktionswerte. Für die Substitution

$$z = \frac{1}{y^2} = y^{-2} \qquad \text{gilt} \qquad z' = (-2)\, y^{-3} \cdot y' = -\frac{2}{y^3}\, y'$$

gemäß der Kettenregel, und wir erhalten

$$y' = y^3 - \frac{y}{x} \iff -\frac{2}{y^3} \cdot y' = -\frac{2}{y^3} \cdot \left(y^3 - \frac{y}{x}\right) \iff$$
$$\iff -\frac{2}{y^3}\, y' = -2 + \frac{2}{y^2\, x} \iff z' = \frac{2}{x} \cdot z - 2.$$

Wir behandeln zunächst die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$z' = a(x)\, z + b(x)$$

mit den stetigen Funktionen

$$a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad a(x) = \frac{2}{x}, \qquad \text{und} \qquad b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad b(x) = -2.$$

Da

$$A : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad A(x) = 2 \ln x,$$

eine Stammfunktion von $a$ ist, stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\psi_c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \psi_c(x) = c\, e^{A(x)} = c\, e^{2 \ln x} = c\, x^2,$$

für $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $z' = a(x)\, z$ dar.

Zur Behandlung der inhomogenen linearen Differentialgleichung wählen wir nun den Ansatz $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = u(x)\,x^2$, der Variation der Konstanten mit einer differenzierbaren Funktion $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Wegen

$$\psi'(x) = u'(x)\,x^2 + u(x)\cdot(2\,x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$ ist $\psi$ genau dann Lösung von $z' = a(x)\,z + b(x)$, wenn

$$u'(x)\,x^2 + u(x)\cdot(2\,x) = \frac{2}{x}\left(u(x)\,x^2\right) - 2,$$

also

$$u'(x) = -\frac{2}{x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt. Daraus ergibt sich

$$u(x) = \frac{2}{x} + c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ und damit

$$\psi(x) = u(x)\,x^2 = \left(\frac{2}{x} + c\right)\,x^2 = 2\,x + c\,x^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$. Gemäß der gewählten Substitution

$$z = \frac{1}{y^2} \iff y^2 = \frac{1}{z} \iff y = \frac{1}{\sqrt{z}}$$

ergibt sich für die Lösung $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$ des gegebenen Anfangswertproblems

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\psi(x)}} = \frac{1}{\sqrt{2\,x + c\,x^2}}$$

mit

$$\varphi(1) = \frac{1}{2} \iff \frac{1}{\sqrt{2\cdot 1 + c\cdot 1^2}} = \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2+c} = \frac{1}{4} \iff c = 2,$$

also

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,x + 2\,x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\,x\,(1+x)}};$$

wegen $2\,x + 2\,x^2 > 0$ für alle $x > 0$ ist $D_\varphi = \mathbb{R}^+$.

8.26 a) Bei der gegebenen Differentialgleichung

$$(*) \qquad y' = 2x\,y - 6x$$

handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung $y' = a(x)\,y + b(x)$ erster Ordnung mit den stetigen Funktionen

$$a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a(x) = 2x, \qquad \text{und} \qquad b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = -6x.$$

Da

$$A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad A(x) = x^2,$$

eine Stammfunktion von $a$ ist, stellt die Gesamtheit aller Funktionen

$$\varphi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c \cdot e^{A(x)} = c \cdot e^{x^2},$$

für $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(x)\,y$ dar. Wegen

$$(*) \qquad y' = 2x\,y - 6x = 2x\,(y-3)$$

läßt sich $(*)$ auch als Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen mit den stetigen Funktionen

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(y) = y - 3, \qquad \text{und} \qquad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = 2x,$$

auffassen, und die Nullstelle $y_0 = 3$ von $g$ liefert die konstante Funktion $\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi_p(x) = 3$, als partikuläre Lösung von $(*)$; insgesamt stellt also die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = \varphi_c + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c \cdot e^{x^2} + 3,$$

mit $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von $(*)$ dar.

b) Sei zunächst $y : J \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$(*) \qquad y' = 2x\,y - 6x,$$

mit $y(x) \neq 0$ für alle $x \in J$; demnach ist $y$ differenzierbar mit

$$y'(x) = 2x \cdot y(x) - 6x \qquad \text{für alle} \quad x \in J.$$

Damit ist auch die Funktion

$$z : J \to \mathbb{R}, \quad z(x) = \frac{1}{y(x)} = \left(y(x)\right)^{-1},$$

(nach der Kettenregel) differenzierbar, und für alle $x \in J$ gilt

$$\begin{aligned} z'(x) &= (-1)\left(y(x)\right)^{-2} \cdot y'(x) = -\frac{1}{\left(y(x)\right)^2} \cdot y'(x) \underset{(*)}{=} \\ &= -\frac{1}{\left(y(x)\right)^2} \cdot (2xy(x) - 6x) = -2x \cdot \frac{1}{y(x)} + 6x \cdot \frac{1}{\left(y(x)\right)^2} = \\ &= 6x \cdot \left(\frac{1}{y(x)}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{y(x)} = 6x \cdot \left(z(x)\right)^2 - 2x \cdot z(x); \end{aligned}$$

folglich ist $z$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$(**) \qquad z' = 6x\,z^2 - 2x\,z.$$

Sei nun umgekehrt $z : J \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$(**) \qquad z' = 6x\,z^2 - 2x\,z,$$

mit $z(x) \neq 0$ für alle $x \in J$; demnach ist $z$ differenzierbar mit

$$z'(x) = 6x \cdot (z(x))^2 - 2x \cdot z(x) \qquad \text{für alle} \quad x \in J.$$

Damit ist auch die Funktion

$$y : J \to \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{1}{z(x)} = (z(x))^{-1},$$

(nach der Kettenregel) differenzierbar, und für alle $x \in J$ gilt

$$\begin{aligned} y'(x) = (-1)\,(z(x))^{-2} \cdot z'(x) = -\frac{1}{(z(x))^2} \cdot z'(x) \underset{(**)}{=} \\ = -\frac{1}{(z(x))^2} \cdot \big(6x \cdot (z(x))^2 - 2x \cdot z(x)\big) = \\ = -6x + 2x \cdot \frac{1}{z(x)} = 2x \cdot \frac{1}{z(x)} - 6x = 2x \cdot y(x) - 6x; \end{aligned}$$

folglich ist $y$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$(*) \qquad y' = 2x\,y - 6x.$$

c) Gemäß b) ist die Funktion $z : J \to \mathbb{R}$, die auf dem Definitionsintervall $J \subseteq \mathbb{R}$ ohne Nullstellen ist, genau dann eine Lösung von $(**)$, wenn die Funktion $y : J \to \mathbb{R}$, $y(x) = \frac{1}{z(x)}$, eine Lösung von $(*)$ ist; gemäß a) ist demnach

$$y : J \to \mathbb{R}, \quad y(x) = c \cdot e^{x^2} + 3,$$

wobei sich für die Konstante $c \in \mathbb{R}$ wegen der Anfangsbedingung

$$z(0) = \frac{1}{2} \iff y(0) = \frac{1}{z(0)} = 2 \iff c \cdot e^{0^2} + 3 = 2 \iff c = -1$$

ergibt. Folglich erhält man

$$z : J \to \mathbb{R}, \quad z(x) = \frac{1}{y(x)} = \frac{1}{3 - e^{x^2}},$$

wobei $J = \left]-\sqrt{\ln 3}; \sqrt{\ln 3}\right[$ das maximale Definitionsintervall der Funktion $x \mapsto \frac{1}{3-e^{x^2}}$ ist, welches den Anfangswert $x_0 = 0$ enthält.

8.27 a) Für zwei stetige Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(*) \qquad y'' + f(x)\,y' + g(x)\,y = 0$$

zu betrachten; für die Lösung $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ von $(*)$ gilt also

$$\varphi''(x) + f(x) \cdot \varphi'(x) + g(x) \cdot \varphi(x) = 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist auch das Produkt

$$\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \psi(x) = h(x) \cdot \varphi(x),$$

zweimal stetig differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$\begin{aligned}
\psi'(x) &= h'(x) \cdot \varphi(x) + h(x) \cdot \varphi'(x) \\
\psi''(x) &= (h''(x) \cdot \varphi(x) + h'(x) \cdot \varphi'(x)) + (h'(x) \cdot \varphi'(x) + h(x) \cdot \varphi''(x)) \\
&= h''(x) \cdot \varphi(x) + 2 \cdot h'(x) \cdot \varphi'(x) + h(x) \cdot \varphi''(x)
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
&\psi''(x) \;+\; f(x) \cdot \psi'(x) \;+\; g(x) \cdot \psi(x) = \\
&\quad = \big(h''(x) \cdot \varphi(x) + 2 \cdot h'(x) \cdot \varphi'(x) + h(x) \cdot \varphi''(x)\big) + \\
&\qquad + f(x) \cdot \big(h'(x) \cdot \varphi(x) + h(x) \cdot \varphi'(x)\big) + g(x) \cdot \big(h(x) \cdot \varphi(x)\big) = \\
&\quad = \big(h''(x) \cdot \varphi(x) + h'(x) \cdot (2\,\varphi'(x) + f(x) \cdot \varphi(x))\big) + \\
&\qquad + h(x) \cdot \underbrace{\big(\varphi''(x) + f(x) \cdot \varphi'(x) + g(x) \cdot \varphi(x)\big)}_{=0,\text{ da } \varphi \text{ Lösung von } (*)} = \\
&\quad = h''(x) \cdot \varphi(x) + h'(x) \cdot (2\,\varphi'(x) + f(x) \cdot \varphi(x));
\end{aligned}$$

folglich ist $\psi$ genau dann eine Lösung von $(*)$, wenn

$$\psi''(x) + f(x) \cdot \psi'(x) \;+\; g(x) \cdot \psi(x) = 0$$

und damit

$$h''(x) \cdot \varphi(x) + h'(x) \cdot (2\,\varphi'(x) + f(x) \cdot \varphi(x)) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt.

b) Bei der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(*) \qquad y'' + y' + \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) y = 0$$

sind die stetigen Funktionen

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 1, \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2},$$

gewählt; die angegebene Funktion $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, ist wegen

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \text{und} \qquad \varphi''(x) = \frac{2}{x^3}$$

und damit

$$\varphi''(x) + \varphi'(x) + \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) \cdot \varphi(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{x} = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$ eine Lösung dieser Differentialgleichung. Um nun eine weitere (von der Nullfunktion verschiedene) Lösung von $(*)$ zu erhalten, haben wir gemäß a) eine Funktion $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit

$$h''(x) \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\varphi(x)} + h'(x) \cdot \left( \underbrace{-\frac{2}{x^2}}_{2\,\varphi'(x)} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)\cdot\varphi(x)} \right) = 0$$

und damit

$$h''(x) = \left(\frac{2}{x} - 1\right) \cdot h'(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$ zu ermitteln. Die Ableitung $h'$ ist also Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = a(x)\,y$ mit der stetigen Funktion

$$a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad a(x) = \frac{2}{x} - 1,$$

über deren Stammfunktion

$$A : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad A(x) = 2\ln x - x,$$

sich demnach

$$h'(x) = c\,e^{A(x)} = c\,e^{2\ln x - x} = c\left(e^{\ln x}\right)^2 e^{-x} = c\,x^2\,e^{-x},$$

mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}$ ergibt. Wegen

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{v'(x)}\,dx &= \underbrace{x^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{\left(-e^{-x}\right)}_{v(x)} - \int \underbrace{2\,x}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\left(-e^{-x}\right)}_{v(x)}\,dx \\
&= -x^2\,e^{-x} + 2\int \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{v'(x)}\,dx \\
&= -x^2\,e^{-x} + 2\left(\underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\left(-e^{-x}\right)}_{v(x)} - \int \underbrace{1}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\left(-e^{-x}\right)}_{v(x)}\,dx\right) \\
&= -x^2\,e^{-x} - 2\,x\,e^{-x} + 2\int e^{-x}\,dx \\
&= -x^2\,e^{-x} - 2\,x\,e^{-x} - 2\,e^{-x} + C \\
&= -\left(x^2 + 2\,x + 2\right)e^{-x} + C
\end{aligned}$$

erhält man dann

$$h(x) = -c\left(x^2 + 2\,x + 2\right)e^{-x} + c'$$

mit einer weiteren Konstante $c' \in \mathbb{R}$, so daß schließlich

$$\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \psi(x) = h(x) \cdot \varphi(x) = \left(-c\left(x^2 + 2\,x + 2\right)e^{-x} + c'\right) \cdot \frac{1}{x},$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $(*)$ darstellt. Mit der speziellen Wahl $c = -1$ und $c' = 0$ erhält man als eine weitere Lösung etwa

$$\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \left(x + 2 + \frac{2}{x}\right)e^{-x}.$$

8.28 a) Für jede Lösungsfunktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$x\,y' = 2\,y + x^2 \qquad \text{mit} \qquad x > 0$$

gilt

$$x \cdot f'(x) = 2\,f(x) + x^2 \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+;$$

da $f$ nach Voraussetzung mindestens dreimal stetig differenzierbar ist, ergibt sich daraus unter Verwendung der Produktregel zunächst

$$1 \cdot f'(x) + x \cdot f''(x) = 2\,f'(x) + 2\,x \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

also

$$x \cdot f''(x) = f'(x) + 2\,x \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

und danach

$$1 \cdot f''(x) + x \cdot f'''(x) = f''(x) + 2 \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

also

$$x \cdot f'''(x) = 2 \qquad \text{bzw.} \qquad f'''(x) = \frac{2}{x} \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

b) Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$f'''(x) = \frac{2}{x} \qquad \text{mit} \qquad f(1) = -\frac{1}{2}, \quad f'(1) = 0, \quad f''(1) = 2.$$

Aus

$$f'''(x) = \frac{2}{x} \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+$$

folgt durch Integration zunächst

$$f''(x) = 2 \ln x + c_2 \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

wobei sich für die Integrationskonstante $c_2 \in \mathbb{R}$ über den Anfangswert

$$f''(1) = 2 \iff 2 \ln 1 + c_2 = 2 \underset{\ln 1 = 0}{\iff} c_2 = 2$$

und damit

$$f''(x) = 2 \ln x + 2 = 2\,(\ln x + 1) \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+$$

ergibt. Wegen

$$\int \underbrace{2}_{u'(x)} \cdot \underbrace{(\ln x + 1)}_{v(x)}\,dx = \underbrace{2\,x}_{u(x)} \cdot \underbrace{(\ln x + 1)}_{v(x)} - \int \underbrace{2\,x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)}\,dx =$$

$$= 2\,x\,(\ln x + 1) - \int 2\,dx = 2\,x\,(\ln x + 1) - 2\,x + C = 2\,x\,\ln x + C$$

erhält man durch erneute Integration

$$f'(x) = 2\,x\,\ln x + c_1 \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

wobei sich für die Integrationskonstante $c_1 \in \mathbb{R}$ über den Anfangswert

$$f'(1) = 0 \iff 2 \cdot 1 \cdot \ln 1 + c_1 = 0 \underset{\ln 1 = 0}{\iff} c_1 = 0$$

und damit

$$f'(x) = 2\,x\,\ln x \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+$$

ergibt. Wegen

$$\int \underbrace{2\,x}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{v(x)}\,dx = \underbrace{x^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{v(x)} - \int \underbrace{x^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)}\,dx =$$

$$= x^2 \ln x - \int x\,dx = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + C$$

liefert eine abschließende Integration

$$f(x) = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + c_0 \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

wobei sich für die Integrationskonstante $c_0 \in \mathbb{R}$ über den Anfangswert

$$f(1) = -\frac{1}{2} \iff 1^2 \cdot \ln 1 - \frac{1^2}{2} + c_0 = -\frac{1}{2} \underset{\ln 1 = 0}{\iff} c_0 = 0$$

und damit

$$f(x) = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+$$

ergibt.

8.29 a) Wir nehmen zum Widerspruch die Existenz eines $L \in \mathbb{R}$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|$$

für alle $x$, $y \geq 0$ an; mit der Wahl $x = \frac{1}{n^2}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $L < n$ und $y = 0$ ergibt sich wegen

$$|f(x) - f(y)| = \left| f\left(\frac{1}{n^2}\right) - f(0) \right| = \left| \sqrt{\frac{1}{n^2}} - \sqrt{0} \right| = \frac{1}{n}$$

und

$$|x - y| = \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| = \frac{1}{n^2}$$

damit

$$\frac{1}{n} \leq L \cdot \frac{1}{n^2} \qquad \text{bzw.} \qquad n \leq L,$$

also ein Widerspruch zur Wahl von $n$ mit $L < n$.

b) Zunächst ist sicherlich die Nullfunktion

$$\varphi_0 : [0, \infty[ \,\to \mathbb{R}, \quad \varphi_0(x) = 0,$$

eine Lösung des gestellten Anfangswertproblems

$$y' = \sqrt{y}, \qquad y(0) = 0.$$

Ferner betrachten wir diese autonome Differentialgleichung $y' = f(y)$ mit der stetigen Funktion $f : [0, \infty[ \,\to \mathbb{R}$, $f(y) = \sqrt{y}$, nur auf der oberen Halbebene

$U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, also für $y > 0$; dort besitzt diese wegen der Nullstellenfreiheit von $f$ auf $]0;\infty[$ für jeden Punkt $(x_0; y_0) \in U$ eine eindeutig bestimmte maximale Lösung $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_0) = y_0$. Dabei erhalten wir

$$\int y^{-\frac{1}{2}}\, dy = \int 1\, dx, \qquad \text{also} \qquad \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = x + c,$$

und damit

$$\sqrt{y} = \frac{x+c}{2}, \qquad \text{also} \qquad y = \left(\frac{x+c}{2}\right)^2,$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, wobei das maximale Lösungsintervall im Hinblick auf die Einschränkung $y > 0$ und damit $\sqrt{y} > 0$ alle $x \in [0;\infty[$ mit

$$\frac{x+c}{2} > 0 \iff x + c > 0 \iff x > -c$$

umfaßt. Etwa für die Wahl $c = -1$ erhält man die Lösung

$$\varphi_{-1} : ]1;\infty[ \to \mathbb{R}, \quad \varphi_{-1}(x) = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2,$$

die sich aber durch die konstante Lösung $\varphi_0$ stetig differenzierbar auf ganz $[0;\infty[$ fortsetzen läßt; die Funktion

$$\varphi_{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_{-1}(x) = \begin{cases} \left(\frac{x-1}{2}\right)^2, & \text{für } x > 1, \\ 0, & \text{für } 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

ist nämlich stetig und zunächst in jedem Punkt $x \neq 1$ differenzierbar mit

$$\varphi_{-1}'(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2}, & \text{für } x > 1, \\ 0, & \text{für } 0 \le x < 1, \end{cases}$$

wegen

$$\lim_{x \to 1-} \frac{\varphi_{-1}(x) - \varphi_{-1}(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1-} \frac{0-0}{x-1} = 0$$

und

$$\lim_{x \to 1+} \frac{\varphi_{-1}(x) - \varphi_{-1}(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1+} \frac{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - 0}{x-1} = \lim_{x \to 1+} \frac{x-1}{4} = 0$$

ist $\varphi_{-1}$ auch im Punkt $x = 1$ differenzierbar mit $\varphi_{-1}'(1) = 0$. Demnach gilt

$$\varphi_{-1}'(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \sqrt{\varphi_{-1}(x)}, & \text{für } x > 1, \\ 0 = \sqrt{\varphi_{-1}(x)}, & \text{für } 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

weswegen $\varphi_{-1} : [0;\infty[ \to \mathbb{R}$ eine weitere Lösung des Anfangswertproblems $y' = \sqrt{y}$ mit $y(0) = 0$ ist.

8.30 a) Die homogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}_0) \qquad y'' + 4\,y' + 3\,y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 4\,\lambda + 3 = (\lambda + 1)\,(\lambda + 3)$$

mit den beiden einfachen Nullstellen $\lambda_1 = -1$ sowie $\lambda_2 = -3$; damit bilden die beiden Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{-x} \quad \text{und} \quad \varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{-3x}$$

ein Fundamentalsystem von $(\mathrm{D}_0)$. Folglich ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-3x},$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von $(\mathrm{D}_0)$.

b) Die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = 10 \cos x,$$

ist von der Form $b(x) = p(x)\, e^{a\,x} \cos(kx)$ mit der Polynomfunktion $p(x) = 10$ vom Grade $m = 0$ sowie $a = 0$ und $k = 1$. Da $a + ki = i$ keine Nullstelle von $\chi$ ist, wählen wir für die partikuläre Lösung $\varphi_p$ der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}) \qquad y'' + 4\,y' + 3\,y = 10 \cos x$$

den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q_1(x)\, \cos x + q_2(x)\, \sin x$$

mit Polynomfunktionen $q_1(x) = r$ und $q_2(x) = s$ vom Grade $m = 0$. Wegen

$$\varphi_p'(x) = -r \sin x + s \cos x \quad \text{und} \quad \varphi_p''(x) = -r \cos x - s \sin x$$

ist $\varphi_p$ genau dann Lösung von (D), wenn

$$(-r \cos x - s \sin x) + 4\,(-r \sin x + s \cos x) + 3\,(r \cos x + s \sin x) = 10 \cos x,$$

also

$$(2\,r + 4\,s) \cos x + (-4\,r + 2\,s) \sin x = 10 \cos x,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; damit ergibt sich $2\,r + 4\,s = 10$ und $-4\,r + 2\,s = 0$, also $r = 1$ und $s = 2$, und folglich $\varphi_p(x) = \cos x + 2 \sin x$.

c) Gemäß a) und b) ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1\, \varphi_1 + c_2\, \varphi_2 + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; \varphi(x) = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-3x} + \cos x + 2 \sin x,$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D) mit

$$\varphi'(x) = -c_1\, e^{-x} - 3\, c_2\, e^{-3x} - \sin x + 2 \cos x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$; damit ist

$$\varphi(0) = 0 \iff c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 + 1 + 2 \cdot 0 = 0 \iff c_1 + c_2 + 1 = 0$$

und

$$\varphi'(0) = 0 \iff -c_1 \cdot 1 - 3\,c_2 \cdot 1 - 0 + 2 \cdot 1 = 0 \iff -c_1 - 3\,c_2 + 2 = 0,$$

woraus sich $c_1 = -\frac{5}{2}$ und $c_2 = \frac{3}{2}$ ergibt. Damit ist

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = -\frac{5}{2}\,e^{-x} + \frac{3}{2}\,e^{-3x} + \cos x + 2\sin x,$$

die gesuchte Lösung des gestellten Anfangswertproblems.

8.31 a) Die homogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}_0) \qquad y'' + 2\,y' + 2\,y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\,\lambda + 2 = (\lambda + 1)^2 + 1 = (\lambda + 1 - i)\,(\lambda + 1 + i)$$

mit den beiden einfachen komplexen Nullstellen $\lambda_1 = -1+i$ und $\lambda_2 = -1-i$ mit dem Realteil $\varrho = -1$ und dem Imaginärteil $\pm\sigma$ mit $\sigma = 1$; damit bilden die beiden Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_1(x) = e^{\varrho\,x}\cos(\sigma x) = e^{-x}\,\cos x \quad \text{und} \quad \varphi_2(x) = e^{\varrho\,x}\sin(\sigma x) = e^{-x}\,\sin x$$

ein Fundamentalsystem von $(\mathrm{D}_0)$.

b) Die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = -4\,x^2 - 2,$$

ist von der Form $b(x) = p(x)\,e^{a\,x}$ mit der Polynomfunktion $p(x) = -4\,x^2 - 2$ vom Grade $m = 2$ und $a = 0$. Da $a$ keine Nullstelle von $\chi$ ist, wählen wir für die partikuläre Lösung $\varphi_p$ von

$$(\mathrm{D}) \qquad y'' + 2\,y' + 2\,y = -4\,x^2 - 2$$

den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q(x) = r\,x^2 + s\,x + t$$

mit einer Polynomfunktion $q(x) = r\,x^2 + s\,x + t$ vom Grade $m = 2$. Wegen

$$\varphi_p'(x) = 2\,r\,x + s \qquad \text{und} \qquad \varphi_p''(x) = 2\,r$$

ist $\varphi_p$ genau dann Lösung von (D), wenn

$$2\,r + 2\,(2\,r\,x + s) + 2\,\big(r\,x^2 + s\,x + t\big) = -4\,x^2 - 2,$$

also

$$2\,r\,x^2 + (4\,r + 2\,s)\,x + (2\,r + 2\,s + 2\,t) = -4\,x^2 - 2,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$2\,r = -4, \quad 4\,r + 2\,s = 0 \quad \text{und} \quad 2\,r + 2\,s + 2\,t = -2,$$

also $r = -2$, $s = 4$ und $t = -3$, und folglich

$$\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_p(x) = -2\,x^2 + 4\,x - 3.$$

8.32 a) Die homogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}_0) \qquad y'' - 7\,y' + 12\,y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 7\,\lambda + 12 = (\lambda - 3)\,(\lambda - 4)$$

mit den beiden einfachen Nullstellen $\lambda_1 = 3$ sowie $\lambda_2 = 4$; damit bilden die beiden Funktionen $\varphi_1,\ \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{3x} \quad \text{und} \quad \varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{4x}$$

ein Fundamentalsystem von $(\mathrm{D}_0)$, und die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1\,\varphi_1 + c_2\,\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1\,e^{3x} + c_2\,e^{4x},$$

mit $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von $(\mathrm{D}_0)$.

b) Die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}) \qquad y'' - 7\,y' + 12\,y = e^{-x}$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = e^{-x},$$

von der Form $b(x) = p(x)\,e^{a\,x}$ mit der konstanten Funktion $p(x) = 1$ sowie $a = -1$. Da nun $a$ keine Nullstelle von $\chi$ ist, wählen wir für die partikuläre Lösung $\varphi_p$ von (D) den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q(x)\,e^{-x} = r\,e^{-x}$$

mit der ebenfalls konstanten Funktion $q(x) = r$. Wegen

$$\varphi_p'(x) = -r\,e^{-x} \quad \text{und} \quad \varphi_p''(x) = r\,e^{-x}$$

ist $\varphi_p$ genau dann Lösung von (D), wenn

$$\left(r\,e^{-x}\right) - 7\left(-r\,e^{-x}\right) + 12\left(r\,e^{-x}\right) = e^{-x},$$

also

$$20\,r\,e^{-x} = e^{-x},$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; damit ergibt sich $20\,r = 1$ und damit $r = \frac{1}{20}$. Damit ist

$$\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_p(x) = \frac{1}{20} e^{-x},$$

eine spezielle Lösung sowie die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1\,\varphi_1 + c_2\,\varphi_2 + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1\,e^{3x} + c_2\,e^{4x} + \frac{1}{20}\,e^{-x},$$

mit $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D).

8.33 Gegeben ist die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$\text{(D)} \qquad y'' - 5\,y' + 6\,y = 12\,x^2 - 26\,x + 15$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten; wir betrachten zudem die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}_0) \qquad y'' - 5\,y' + 6\,y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

a) Es besitzt $(\mathrm{D}_0)$ das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 5\,\lambda + 6 = (\lambda - 2)\,(\lambda - 3)$$

mit den beiden einfachen reellen Nullstellen $\lambda_1 = 2$ sowie $\lambda_2 = 3$; damit bilden die beiden Funktionen $\varphi_1,\, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{2x} \quad \text{und} \quad \varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{3x}$$

ein Fundamentalsystem von $(\mathrm{D}_0)$. Ferner besitzt (D) die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = 12\,x^2 - 26\,x + 15,$$

der Form $b(x) = p(x)\,e^{a\,x}$ mit der Polynomfunktion $p(x) = 12\,x^2 - 26\,x + 15$ vom Grade $m = 2$ und $a = 0$. Da $a$ keine Nullstelle von $\chi$ ist, wählen wir für die partikuläre Lösung $\varphi_p$ von (D) den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q(x) = r\,x^2 + s\,x + t$$

mit einer Polynomfunktion $q(x) = r\,x^2 + s\,x + t$ vom Grade $m = 2$. Wegen

$$\varphi_p'(x) = 2\,r\,x + s \qquad \text{und} \qquad \varphi_p''(x) = 2\,r$$

ist $\varphi_p$ genau dann Lösung von (D), wenn

$$2\,r - 5\,(2\,r\,x + s) + 6\,\big(r\,x^2 + s\,x + t\big) = 12\,x^2 - 26\,x + 15,$$

also

$$6\,r\,x^2 + (-10\,r + 6\,s)\,x + (2\,r - 5\,s + 6\,t) = 12\,x^2 - 26\,x + 15,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$6\,r = 12, \quad -10\,r + 6\,s = -26 \quad \text{und} \quad 2\,r - 5\,s + 6\,t = 15,$$

also $r = 2$, $s = -1$ und $t = 1$, und folglich

$$\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_p(x) = 2\,x^2 - x + 1.$$

Damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; \varphi(x) = c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{3x} + 2\,x^2 - x + 1,$$

mit $c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D).

b) Für die in a) ermittelte Lösungsfunktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{3x} + 2\,x^2 - x + 1$$

gilt

$$\varphi'(x) = 2\,c_1\, e^{2x} + 3\,c_2\, e^{3x} + 4\,x - 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, und wir bestimmen die noch freien Konstanten $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$, so daß $\varphi$ die gestellten Anfangsbedingungen erfüllt. Wegen

$$\varphi(0) = 0 \iff c_1\, e^0 + c_2\, e^0 + 2 \cdot 0^2 - 0 + 1 = 0 \iff c_1 + c_2 = -1$$

und

$$\varphi'(0) = 0 \iff 2\,c_1\, e^0 + 3\,c_2\, e^0 + 4 \cdot 0 - 1 = 0 \iff 2\,c_1 + 3\,c_2 = 1$$

ergibt sich $c_1 = -4$ und $c_2 = 3$, und wir erhalten die Lösungsfunktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = -4\, e^{2x} + 3\, e^{3x} + 2\,x^2 - x + 1.$$

8.34 Die homogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}_0) \qquad y'' + y' = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + \lambda = \lambda\,(\lambda + 1)$$

mit den beiden einfachen reellen Nullstellen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -1$; damit bilden die beiden Funktionen $\varphi_1,\ \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda_1\, x} = e^0 = 1 \qquad \text{und} \qquad \varphi_2(x) = e^{\lambda_2\, x} = e^{-x}$$

ein Fundamentalsystem von $(\mathrm{D}_0)$. Die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = x,$$

ist von der Form $b(x) = p(x)\, e^{a\,x}$ mit der Polynomfunktion $p(x) = x$ vom Grade $m = 1$ und $a = 0$. Da $a$ eine Nullstelle von $\chi$ der Vielfachheit $\alpha = 1$ ist, wählen wir für die partikuläre Lösung $\varphi_p$ von

$$(\mathrm{D}) \qquad y'' + y' = x$$

den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q(x) = r\,x^2 + s\,x + t$$

mit einer Polynomfunktion $q(x) = r\,x^2 + s\,x + t$ vom Grade $m + \alpha = 2$; da $\varphi_1(x) = 1$ bereits eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $(\mathrm{D}_0)$ ist, können wir $t = 0$ setzen und erhalten

$$\varphi_p(x) = r\,x^2 + s\,x \quad \text{mit} \quad \varphi_p'(x) = 2\,r\,x + s \quad \text{und} \quad \varphi_p''(x) = 2\,r.$$

Damit ist $\varphi_p$ genau dann Lösung von (D), wenn

$$2\,r + (2\,r\,x + s) = x,$$

also

$$2\,r\,x + (2\,r + s) = x,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$2\,r = 1 \quad \text{und} \quad 2\,r + s = 0$$

also $r = \frac{1}{2}$ und $s = -1$, und folglich

$$\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_p(x) = \tfrac{1}{2}\,x^2 - x.$$

Damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1 + c_2\,e^{-x} + \tfrac{1}{2}\,x^2 - x,$$

mit $c_1$, $c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D); dabei ist

$$\varphi'(x) = -c_2\,e^{-x} + x - 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, und wir bestimmen die noch freien Konstanten $c_1$, $c_2 \in \mathbb{R}$, so daß $\varphi$ die gestellten Anfangsbedingungen erfüllt. Wegen

$$\varphi(0) = 3 \iff c_1 + c_2\,e^0 + \tfrac{1}{2} \cdot 0^2 - 0 = 3 \iff c_1 + c_2 = 3$$

und

$$\varphi'(0) = -1 \iff -c_2\,e^0 + 0 - 1 = -1 \iff -c_2 - 1 = -1 \iff c_2 = 0$$

ergibt sich auch $c_1 = 3$, und wir erhalten die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = 3 + \tfrac{1}{2}\,x^2 - x,$$

als eindeutig bestimmte Lösung des gestellten Anfangswertproblems.

8.35 Die homogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}_0) \qquad y'' - y' - 6\,y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)\,(\lambda + 2)$$

mit den beiden einfachen Nullstellen $\lambda_1 = 3$ sowie $\lambda_2 = -2$; damit bilden die beiden Funktionen $\varphi_1$, $\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{3x} \quad \text{und} \quad \varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{-2x}$$

ein Fundamentalsystem von $(\mathrm{D}_0)$. Die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = e^{-x},$$

ist von der Form $b(x) = p(x)\,e^{a\,x}$ mit der konstanten Funktion $p(x) = 1$ sowie $a = -1$. Da nun $a$ keine Nullstelle von $\chi$ ist, wählen wir für die partikuläre Lösung $\varphi_p$ von

$$(\mathrm{D}) \qquad y'' - y' - 6\,y = e^{-x}$$

den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q(x)\, e^{-x} = r\, e^{-x}$$

mit der ebenfalls konstanten Funktion $q(x) = r$. Wegen

$$\varphi_p'(x) = -r\, e^{-x} \quad \text{und} \quad \varphi_p''(x) = r\, e^{-x}$$

ist $\varphi_p$ genau dann Lösung von (D), wenn

$$\left(r\, e^{-x}\right) - \left(-r\, e^{-x}\right) - 6\left(r\, e^{-x}\right) = e^{-x},$$

also

$$-4\, r\, e^{-x} = e^{-x},$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; damit ergibt sich $-4\, r = 1$ und damit $r = -\frac{1}{4}$. Damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1\, \varphi_1 + c_2\, \varphi_2 + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1\, e^{3x} + c_2\, e^{-2x} - \frac{1}{4}\, e^{-x},$$

mit $c_1$, $c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D). Wegen

$$\varphi(x) = c_1 \cdot \underbrace{e^{3x}}_{\to +\infty} + \underbrace{c_2 \cdot \underbrace{e^{-2x}}_{\to 0} - \frac{1}{4} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}}_{\to 0} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \begin{cases} +\infty, & \text{für } c_1 > 0, \\ 0, & \text{für } c_1 = 0, \\ -\infty & \text{für } c_1 < 0, \end{cases}$$

ist die Lösung $\varphi$ genau dann im Intervall $[0; \infty[$ beschränkt, wenn $c_1 = 0$ ist; dabei erfüllt

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_2\, e^{-2x} - \frac{1}{4}\, e^{-x},$$

die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ wegen

$$\varphi(0) = 0 \iff c_2\, e^0 - \frac{1}{4}\, e^0 = 0 \iff c_2 - \frac{1}{4} = 0 \iff c_2 = \frac{1}{4}$$

genau für $c_2 = \frac{1}{4}$. Es gibt also genau eine Funktion mit den geforderten Eigenschaften, nämlich

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{4}.$$

8.36 Die homogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}_0) \qquad y'' + 2\, y' + 5\, y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\,\lambda + 5 = (\lambda + 1)^2 + 4 = (\lambda + 1 - 2i)\,(\lambda + 1 + 2i)$$

mit den beiden einfachen komplexen Nullstellen $\lambda_1 = -1 + 2i$ und $\lambda_2 = -1 - 2i$ mit dem Realteil $\varrho = -1$ und dem Imaginärteil $\pm\sigma$ mit $\sigma = 2$; damit bilden die beiden Funktionen $\varphi_1$, $\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_1(x) = e^{\varrho\, x} \cos(\sigma x) = e^{-x} \cos(2x) \quad \text{und} \quad \varphi_2(x) = e^{\varrho\, x} \sin(\sigma x) = e^{-x} \sin(2x)$$

ein Fundamentalsystem von ($\mathrm{D}_0$). Die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = 10\, e^{-2x},$$

ist von der Form $b(x) = p(x)\, e^{a\,x}$ mit der konstanten Funktion $p(x) = 10$ und $a = -2$. Da $a$ keine Nullstelle von $\chi$ ist, wählen wir für die partikuläre Lösung $\varphi_p$ von

$$(\mathrm{D}) \qquad y'' + 2\,y' + 5\,y = 10\, e^{-2x}$$

den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q(x)\, e^{-2x} = r\, e^{-2x}$$

ebenfalls mit einer konstanten Funktion $q(x) = r$. Wegen

$$\varphi_p'(x) = -2r\, e^{-2x} \qquad \text{und} \qquad \varphi_p''(x) = 4r\, e^{-2x}$$

ist $\varphi_p$ genau dann Lösung von (D), wenn

$$4r\, e^{-2x} + 2\left(-2\, r\, e^{-2x}\right) + 5\left(r\, e^{-2x}\right) = 10\, e^{-2x},$$

also

$$5r\, e^{-2x} = 10\, e^{-2x} \qquad \text{und damit} \qquad r = 2$$

ist; folglich erhalten wir

$$\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_p(x) = 2\, e^{-2x}.$$

Die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung (D) ist demnach die Menge aller Funktionen

$$\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$\varphi(x) = c_1\, e^{-x} \cos(2x) + c_2\, e^{-x} \sin(2x) + 2\, e^{-2x},$$

mit $c_1$, $c_2 \in \mathbb{R}$.

8.37 Die homogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}_0) \qquad y'' + y' - 6\,y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)\,(\lambda + 3)$$

mit den beiden einfachen Nullstellen $\lambda_1 = 2$ sowie $\lambda_2 = -3$; damit bilden die beiden Funktionen $\varphi_1$, $\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{2x} \quad \text{und} \quad \varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{-3x}$$

ein Fundamentalsystem von ($\mathrm{D}_0$). Die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = \cos x,$$

ist von der Form $b(x) = p(x)\, e^{a\,x}\, \cos(kx)$ mit der Polynomfunktion $p(x) = 1$ vom Grade $m = 0$ sowie $a = 0$ und $k = 1$. Da $a + ki = i$ keine Nullstelle von $\chi$ ist, wählen wir für die partikuläre Lösung $\varphi_p$ von

$$\text{(D)} \qquad y'' + y' - 6\,y = \cos x$$

den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q_1(x)\, \cos x + q_2(x)\, \sin x$$

mit Polynomfunktionen $q_1(x) = r$ und $q_2(x) = s$ vom Grade $m = 0$. Wegen

$$\varphi_p'(x) = -r \sin x + s \cos x \quad \text{und} \quad \varphi_p''(x) = -r \cos x - s \sin x$$

ist $\varphi_p$ genau dann Lösung von (D), wenn

$$(-r \cos x - s \sin x) + (-r \sin x + s \cos x) - 6\,(r \cos x + s \sin x) = \cos x,$$

also

$$(-7\,r + s) \cos x + (-r - 7\,s) \sin x = \cos x,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; damit ergibt sich $-7\,r + s = 1$ und $-r - 7\,s = 0$, also $r = -\frac{7}{50}$ und $s = \frac{1}{50}$, und folglich $\varphi_p(x) = -\frac{7}{50} \cos x + \frac{1}{50} \sin x$. Damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1\, \varphi_1 + c_2\, \varphi_2 + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{-3x} - \frac{7}{50} \cos x + \frac{1}{50} \sin x,$$

mit $c_1$, $c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D).

Die partikuläre Lösung $\varphi_p$ ist (als Linearkombination von Sinus und Cosinus) beschränkt. Damit ist die Lösung $\varphi$ wegen

$$\lim_{x\to\infty} \varphi_1(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} \varphi_2(x) = 0$$

genau dann auf $\mathbb{R}^+$ beschränkt, wenn $c_1 = 0$ gilt, und wegen

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi_1(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} \varphi_2(x) = \infty$$

genau dann auf $\mathbb{R}^-$ beschränkt, wenn $c_2 = 0$ gilt. Insgesamt ist $\varphi$ genau dann eine in $\mathbb{R}$ beschränkte Funktion, wenn $c_1 = c_2 = 0$ gilt, also für $\varphi = \varphi_p$.

8.38 Die homogene lineare Differentialgleichung

$$(\text{D}_0) \qquad y'' - 6\,y' + 9\,y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 6\,\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2$$

mit der doppelten reellen Nullstelle $\lambda = 3$; damit bilden die beiden Funktionen

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \varphi_1(x) = e^{\lambda\,x} = e^{3\,x},$$

und

$$\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \ \varphi_2(x) = x\, e^{\lambda\,x} = x\, e^{3\,x},$$

ein Fundamentalsystem von ($D_0$). Die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = e^x,$$

ist von der Form $b(x) = p(x)\, e^{a\,x}$ mit der konstanten Funktion $p(x) = 1$ und $a = 1$. Da $a$ keine Nullstelle von $\chi$ ist, wählen wir für die partikuläre Lösung $\varphi_p$ von

$$\text{(D)} \qquad y'' - 6\,y' + 9\,y = e^x$$

den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q(x)\, e^x = r\, e^x$$

ebenfalls mit einer konstanten Funktion $q(x) = r$. Wegen

$$\varphi_p'(x) = r\, e^x \qquad \text{und} \qquad \varphi_p''(x) = r\, e^x$$

ist $\varphi_p$ genau dann Lösung von (D), wenn

$$r\, e^x - 6\, r\, e^x + 9\, r\, e^x = e^x,$$

also

$$4r\, e^x = e^x \qquad \text{und damit} \qquad r = \frac{1}{4}$$

ist; folglich erhalten wir

$$\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_p(x) = \frac{1}{4}\, e^x.$$

Die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung (D) ist demnach die Menge aller Funktionen

$$\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1\, e^{3\,x} + c_2\, x\, e^{3\,x} + \frac{1}{4}\, e^x,$$

mit $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$.

8.39 In Abhängigkeit von einem positiven Parameter $k \in \mathbb{R}^+$ ist die lineare Differentialgleichung

$$\text{(D)} \qquad y'' + 2\,k\,y' + k^2\,y = 3\,x^2 - 2$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu betrachten.

a) Die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung

$$(\text{D}_0) \qquad y'' + 2\,k\,y' + k^2 y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\,k\,\lambda + k^2 = (\lambda + k)^2$$

mit der doppelten Nullstelle $\lambda = -k$; damit bilden die beiden Funktionen

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi_1(x) = e^{-k\,x}, \qquad \text{und} \qquad \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi_2(x) = x\, e^{-k\,x},$$

ein Fundamentalsystem von ($D_0$), und die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1 e^{-k\,x} + c_2\,x\,e^{-k\,x},$$

mit $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$ stellt die allgemeine Lösung von ($D_0$) dar. Die noch freien Konstanten passen wir den gegebenen Anfangswerten

$$y(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad y'(0) = 1$$

an; dabei ist

$$\varphi(x) = (c_1 + c_2\,x)\,e^{-k\,x}$$

und damit

$$\varphi'(x) = c_2\,e^{-k\,x} + (c_1 + c_2\,x)\left(e^{-k\,x}(-k)\right) = ((c_2 - k\,c_1) - k\,c_2\,x)\,e^{-k\,x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen

$$\varphi(0) = 0 \iff c_1\,e^0 = 0 \iff c_1 = 0$$

und

$$\varphi'(0) = 1 \iff (c_2 - k\,c_1)\,e^0 = 1 \underset{c_1=0}{\iff} c_2 = 1$$

ist die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = x\,e^{-k\,x},$$

die Lösung des gestellten Anfangswertproblems.

b) Die inhomogene lineare Differentialgleichung (D) besitzt die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = 3\,x^2 - 2,$$

der Form $b(x) = p(x)\,e^{a\,x}$ mit der Polynomfunktion $p(x) = 3\,x^2 - 2$ vom Grade $m = 2$ und $a = 0$. Wegen $k > 0$ ist $a$ keine Nullstelle von $\chi$, und wir wählen für die partikuläre Lösung $\varphi_p$ von (D) den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q(x) = r\,x^2 + s\,x + t$$

mit einer Polynomfunktion $q(x) = r\,x^2 + s\,x + t$ ebenfalls vom Grade $m = 2$. Wegen

$$\varphi_p'(x) = 2\,r\,x + s \qquad \text{und} \qquad \varphi_p''(x) = 2\,r$$

ist $\varphi_p$ genau dann Lösung von (D), wenn

$$2\,r + 2\,k\,(2\,r\,x + s) + k^2\left(r\,x^2 + s\,x + t\right) = 3\,x^2 - 2,$$

also

$$k^2 r\,x^2 + \left(4\,k\,r + k^2 s\right)x + \left(2\,r + 2\,k\,s + k^2 t\right) = 3\,x^2 - 2,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$k^2 r = 3, \quad 4\,k\,r + k^2 s = 0 \quad \text{und} \quad 2\,r + 2\,k\,s + k^2 t = -2,$$

also

$$r = \frac{3}{k^2}, \qquad \text{dann} \qquad s = -\frac{4\,k\,r}{k^2} = -\frac{12}{k^3}$$

schließlich
$$t = \frac{-2 - (2\,r + 2\,k\,s)}{k^2} = -\frac{2}{k^2} + \frac{18}{k^4},$$
und folglich
$$\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_p(x) = \frac{3}{k^2}\,x^2 - \frac{12}{k^3}\,x - \frac{2}{k^2} + \frac{18}{k^4}.$$
Damit ist die Gesamtheit der Funktionen
$$\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$\varphi(x) = c_1\,e^{-k\,x} + c_2\,x\,e^{-k\,x} + \frac{3}{k^2}\,x^2 - \frac{12}{k^3}\,x - \frac{2}{k^2} + \frac{18}{k^4},$$
mit $c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D).

8.40 Die gesuchten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 1$, deren Graph $G_f$ symmetrisch zur $y$–Achse ist und für die $f''(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, sind zunächst Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung
$$(\mathrm{D}_0) \qquad y'' = y \qquad \text{bzw.} \qquad y'' - y = 0$$
zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom
$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)\,(\lambda + 1)$$
besitzt die beiden einfachen reellen Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$, so daß die beiden Funktionen
$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = e^{\lambda_1\,x} = e^x,$$
und
$$\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x) = e^{\lambda_2\,x} = e^{-x},$$
ein Fundamentalsystem bilden; damit stellt die Gesamtheit der Funktionen
$$\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1\,e^x + c_2\,e^{-x}$$
mit Konstanten $c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von $(\mathrm{D}_0)$ dar. Dabei gilt
$$\varphi(0) = 1 \iff c_1\,e^0 + c_2\,e^{-0} = 1 \iff c_1 + c_2 = 1,$$
und der Graph $G_\varphi$ ist genau dann symmetrisch zur $y$–Achse, wenn $\varphi(x) = \varphi(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; wegen
$$\varphi(x) = \varphi(-x) \iff c_1\,e^x + c_2\,e^{-x} = c_1\,e^{-x} + c_2\,e^{-(-x)} \iff$$
$$(c_1 - c_2)\,e^x = (c_1 - c_2)\,e^{-x} \iff (c_1 - c_2)\left(e^x - e^{-x}\right) = 0$$
für alle $x \in \mathbb{R}$ ist dies (betrachtet man etwa $x = 1$) zu $c_1 - c_2 = 0$ gleichwertig. Aus den beiden Bedingungen
$$c_1 + c_2 = 1 \qquad \text{und} \qquad c_1 - c_2 = 0$$
erhält man wegen $c_1 = c_2$ dann $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, so daß genau die Funktion
$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2}\,e^x + \frac{1}{2}\,e^{-x} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x,$$
die geforderten Eigenschaften besitzt, es ist also $f$ der Cosinus hyperbolicus.

8.41 Die in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}^+$ gegebene homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(*) \qquad y'' + c^2\, y = 0$$

mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + c^2 = \lambda^2 - (c\,i)^2 = (\lambda - c\,i) \cdot (\lambda + c\,i)$$

mit den beiden konjugiert–komplexen Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm c\,i$ mit dem Realteil $\varrho = 0$ und dem Imaginärteil $\pm\sigma$ mit $\sigma = c$; damit bilden die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} \varphi_1 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi_1(x) = e^{\varrho x} \cos(\sigma x) = \cos(c\,x), \\ \varphi_2 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi_2(x) = e^{\varrho x} \sin(\sigma x) = \sin(c\,x), \end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem von $(*)$, und die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1 \cdot \cos(c\,x) + c_2 \cdot \sin(c\,x),$$

mit $c_1$, $c_2 \in \mathbb{R}$ stellt die allgemeine Lösung von $(*)$ dar. Dabei wird wegen

$$\varphi(0) = 0 \iff c_1 \cdot \underbrace{\cos 0}_{=1} + c_2 \cdot \underbrace{\sin 0}_{=0} = 0 \iff c_1 = 0$$

die erste Anfangsbedingung $\varphi(0) = 0$ genau von den Lösungen

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_2 \cdot \sin(c\,x),$$

erfüllt; wegen $\varphi'(x) = c_2\, c \cdot \cos(c\,x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich für die zweite Anfangsbedingung $\varphi'(1) = 0$ damit

$$\varphi'(1) = 0 \iff c_2\, c \cdot \cos c = 0 \underset{c \neq 0}{\iff} c_2 \cdot \cos c = 0,$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $\cos c \neq 0$ ist $\varphi'(1) = 0 \iff c_2 = 0$, und damit ist die Nullfunktion die einzige Lösung von $(*)$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi'(1) = 0$.
- Für $\cos c = 0$ ist $\varphi'(1) = 0$ für alle $c_2 \in \mathbb{R}$ erfüllt, und für jedes $c_2 \neq 0$ ist die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = c_2 \cdot \sin(c\,x)$, eine von der Nullfunktion verschiedene Lösung von $(*)$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi'(1) = 0$.

Damit besitzt die gegebene Differentialgleichung $(*)$ genau dann eine von der Nullfunktion verschiedene Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi'(1) = 0$, wenn $\cos c = 0$ gilt, also genau für $c \in \frac{\pi}{2} + \mathbb{N}_0 \cdot \pi$.

8.42 Die in Abhängigkeit von $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ gegebene homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(*) \qquad y'' - 2\,a\,y' + b\,y = 0$$

mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 2\,a\,\lambda + b$$

mit den Nullstellen

$$\frac{-(-2\,a) \pm \sqrt{(-2\,a)^2 - 4 \cdot b}}{2} = \frac{2\,a \pm \sqrt{4\,(a^2 - b)}}{2} = a \pm \sqrt{a^2 - b};$$

wir treffen hinsichtlich des Radikanden $\Delta = a^2 - b$ folgende Fallunterscheidung:

- Im Falle $\Delta > 0$ besitzt $\chi(\lambda)$ zwei reelle Nullstellen $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$, und wir können $\lambda_1 \neq 0$ annehmen; damit besitzt $(*)$ insbesondere die Lösung

  $$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x},$$

  die wegen

  $$\lim_{x\to+\infty} \varphi_1(x) = +\infty \qquad \text{für} \qquad \lambda_1 > 0$$

  und

  $$\lim_{x\to-\infty} \varphi_1(x) = +\infty \qquad \text{für} \qquad \lambda_1 < 0$$

  auf $\mathbb{R}$ nicht beschränkt ist.
- Im Falle $\Delta = 0$ besitzt $\chi(\lambda)$ eine doppelte reelle Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt $(*)$ insbesondere die Lösung

  $$\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x) = x\, e^{\lambda x},$$

  die wegen

  $$\lim_{x\to+\infty} \varphi_2(x) = \lim_{x\to+\infty} \big(x \cdot \underbrace{e^{\lambda x}}_{\geq 1 \text{ für } x>0}\big) = +\infty \qquad \text{für} \qquad \lambda \geq 0$$

  und

  $$\lim_{x\to-\infty} \varphi_2(x) = \lim_{x\to-\infty} \big(x \cdot \underbrace{e^{\lambda x}}_{\geq 1 \text{ für } x<0}\big) = -\infty \qquad \text{für} \qquad \lambda \leq 0$$

  auf $\mathbb{R}$ nicht beschränkt ist.
- Im Falle $\Delta < 0$ besitzt $\chi(\lambda)$ zwei konjugiert–komplexe Nullstellen $\varrho \pm i\,\sigma$ mit $\varrho = a \in \mathbb{R}$ und $\sigma = \sqrt{b - a^2} \in \mathbb{R}^+$; damit bilden die beiden Funktionen

  $$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi_1(x) = e^{\varrho x} \cos(\sigma x), \ \text{ und } \ \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi_2(x) = e^{\varrho x} \sin(\sigma x),$$

  ein Fundamentalsystem von $(*)$. Dabei ist die Lösung $\varphi_1$ von $(*)$ wegen

  $$\varphi_1(\tfrac{2n\pi}{\sigma}) = e^{\frac{2\pi\varrho}{\sigma} n} \cos(2n\pi) = e^{\frac{2\pi\varrho}{\sigma} n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \qquad \text{für} \qquad \varrho > 0$$

  und

  $$\varphi_1(-\tfrac{2n\pi}{\sigma}) = e^{-\frac{2\pi\varrho}{\sigma} n} \cos(-2n\pi) = e^{-\frac{2\pi\varrho}{\sigma} n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \qquad \text{für} \qquad \varrho < 0$$

  auf $\mathbb{R}$ nicht beschränkt. Für $\varrho = 0$ ist die Gesamtheit der Funktionen

  $$\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1 \cdot \cos(\sigma x) + c_2 \cdot \sin(\sigma x),$$

  mit $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von $(*)$; wegen

  $$\begin{aligned} |\varphi(x)| = |c_1 \cdot \cos(\sigma x) + c_2 \cdot \sin(\sigma x)| &\leq \\ &\leq |c_1| \cdot \underbrace{|\cos(\sigma x)|}_{\leq 1} + |c_2| \cdot \underbrace{|\sin(\sigma x)|}_{\leq 1} \leq |c_1| + |c_2| \end{aligned}$$

  für alle $x \in \mathbb{R}$ ist jede Lösung $\varphi$ von $(*)$ auf $\mathbb{R}$ beschränkt.

Zusammenfassend gilt: es ist genau dann jede Lösung der Differentialgleichung $(*)$ auf $\mathbb{R}$ beschränkt, wenn

$$\Delta = a^2 - b < 0 \qquad \text{und} \qquad \varrho = a = 0$$

ist, also genau für $a = 0$ und $b > 0$.

8.43 Die gegebene homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(\mathrm{D}_0) \qquad y'' + 2\,y' + 2\,y = 0$$

mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned}\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\,\lambda + 2 = (\lambda^2 + 2\,\lambda + 1) + 1 = \\ = (\lambda + 1)^2 - i^2 = (\lambda + 1 - i)(\lambda + 1 + i)\end{aligned}$$

mit den beiden konjugiert–komplexen Nullstellen $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$; dabei ist $\varrho = -1$ der Realteil sowie $\pm\sigma$ mit $\sigma = 1$ der Imaginärteil. Folglich bilden die beiden Funktionen

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = e^{\varrho x} \cos(\sigma x) = e^{-x} \cos x,$$

und

$$\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x) = e^{\varrho x} \sin(\sigma x) = e^{-x} \sin x,$$

ein Fundamentalsystem von $(\mathrm{D}_0)$, und die Gesamtheit aller Funktionen

$$\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1 \cdot e^{-x} \cos x + c_2 \cdot e^{-x} \sin x,$$

mit $c_1$, $c_2 \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung von $(\mathrm{D}_0)$. Damit nun die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte und differenzierbare Funktion $\varphi$ in $a = 0$ ein lokales Extremum besitzt, muß notwendig $\varphi'(0) = 0$ gelten; wegen

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= c_1 \cdot \big(-e^{-x} \cos x + e^{-x}(-\sin x)\big) + c_2 \cdot \big(-e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x\big) \\ &= (c_2 - c_1) \cdot e^{-x} \cos x - (c_1 + c_2) \cdot e^{-x} \sin x\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}\varphi'(0) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (c_2 - c_1) \cdot e^0 \cos 0 - (c_1 + c_2) \cdot e^0 \sin 0 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (c_2 - c_1) \cdot 1 - (c_1 + c_2) \cdot 0 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad c_2 - c_1 = 0 \iff c_1 = c_2\end{aligned}$$

kommen hierfür also nur die Lösungsfunktionen

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1 \cdot e^{-x} (\cos x + \sin x)\,,$$

mit $c_1 \in \mathbb{R}$ in Frage. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\varphi'(x) = -2c_1 \cdot e^{-x} \sin x$$

und damit

$$\varphi''(x) = -2c_1 \cdot \big(-e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x\big)\,,$$

also

$$\varphi''(0) = -2c_1 \cdot \big(-e^0 \sin 0 + e^0 \cos 0\big) = -2c_1 \begin{cases} < 0, & \text{für } c_1 > 0, \\ = 0, & \text{für } c_1 = 0, \\ > 0, & \text{für } c_1 < 0. \end{cases}$$

Folglich besitzt $\varphi$ in $a = 0$ für $c_1 < 0$ ein isoliertes lokales Minimum und für $c_1 > 0$ ein isoliertes lokales Maximum, insbesondere also kein lokales Minimum; für $c_1 = 0$ ist $\varphi$ die Nullfunktion, die in $a = 0$ ein (nicht isoliertes) lokales Minimum besitzt.

8.44 Es handelt sich um die homogene lineare Differentialgleichung

$$y''' - 2\,y'' + 5\,y' = 0$$

dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 - 2\,\lambda^2 + 5\,\lambda = \lambda\,\big(\lambda^2 - 2\,\lambda + 5\big)$$

besitzt die einfache reelle Nullstelle $\lambda_1 = 0$ sowie (unter Verwendung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen) die beiden konjugiert–komplexen Nullstellen

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}\Big(-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 5}\Big) = \frac{1}{2}\big(2 \pm \sqrt{-16}\big) = 1 \pm 2\,i,$$

so daß die drei (reellwertigen) Funktionen $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_1(x) = e^0 = 1 \quad \text{sowie} \quad \varphi_2(x) = e^x \cos(2x) \quad \text{und} \quad \varphi_3(x) = e^x \sin(2x)$$

ein Fundamentalsystem von $y''' - 2\,y'' + 5\,y' = 0$ bilden; damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 + c_3 \cdot \varphi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi(x) = c_1 + c_2\, e^x \cos(2x) + c_3\, e^x \sin(2x)$$

mit den Konstanten $c_1$, $c_2$, $c_3 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y''' - 2\,y'' + 5\,y' = 0$, welche nun den gegebenen Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$ und $y''(0) = -11$ anpaßt werden. Wegen

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= c_2\,(e^x \cos(2x) - 2\,e^x \sin(2x)) + c_3\,(e^x \sin(2x) + 2\,e^x \cos(2x)) = \\ &= (c_2 + 2\,c_3)\,e^x \cos(2x) + (-2\,c_2 + c_3)\,e^x \sin(2x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= (c_2 + 2\,c_3)\,(e^x \cos(2x) - 2\,e^x \sin(2x)) + \\ &\quad + (-2\,c_2 + c_3)\,(e^x \sin(2x) + 2\,e^x \cos(2x)) = \\ &= (-3\,c_2 + 4\,c_3)\,e^x \cos(2x) + (-4\,c_2 - 3\,c_3)\,e^x \sin(2x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich

$$\varphi(0) = 0 \iff c_1 + c_2 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \iff c_1 + c_2 = 0$$

sowie entsprechend

$$\varphi'(0) = -3 \iff c_2 + 2\,c_3 = -3$$

und

$$\varphi''(0) = -11 \iff -3\,c_2 + 4\,c_3 = -11,$$

woraus man zunächst $c_2 = 1$ und $c_3 = -2$ und dann $c_1 = -1$ erhält. Folglich ist die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -1 + e^x \cos(2x) - 2\,e^x \sin(2x),$$

die Lösung des gestellten Anfangswertproblems.

8.45 Es handelt sich um die homogene lineare Differentialgleichung

$$y'''' - 16\,y = 0$$

vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten; das charakteristische Polynom ist

$$\chi(\lambda) = \lambda^4 - 16 = \left(\lambda^2 - 4\right)\left(\lambda^2 + 4\right) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 2i)(\lambda + 2i)$$

mit den beiden reellen Nullstellen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -2$ sowie den beiden komplexen Nullstellen $\lambda_3 = 2i$ und $\lambda_4 = -2i$ mit dem Realteil $\varrho = 0$ und dem Imaginärteil $\pm\sigma$ mit $\sigma = 2$.

Folglich bilden die Funktionen $\varphi_1,\ \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{2x} \qquad \text{und} \qquad \varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{-2x}$$

sowie $\varphi_3,\ \varphi_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_3(x) = \cos(\sigma x) = \cos(2x) \qquad \text{und} \qquad \varphi_4(x) = \sin(\sigma x) = \sin(2x)$$

ein reelles Fundamentalsystem der Differentialgleichung. Damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3 + c_4\varphi_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$\varphi(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos(2x) + c_4 \sin(2x),$$

mit $c_1, \ldots, c_4 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von $(\mathrm{D}_0)$; wegen

$$\varphi(0) = 0 \iff c_1 + c_2 + c_3 = 0 \iff c_3 = -\left(c_1 + c_2\right)$$

lösen genau die Funktionen

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \left(c_1 + c_2\right)\cos(2x) + c_4 \sin(2x),$$

mit $c_1,\ c_2,\ c_4 \in \mathbb{R}$ die gestellte Anfangswertaufgabe.

8.46 a) Die homogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}_0) \qquad y''' - 3\,y'' + y' - 3\,y = 0$$

dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned}\chi(\lambda) &= \lambda^3 - 3\,\lambda^2 + \lambda - 3 \;=\; (\lambda - 3)\cdot\lambda^2 + (\lambda - 3)\\ &= (\lambda - 3)\left(\lambda^2 + 1\right) \;=\; (\lambda - 3)(\lambda - i)(\lambda + i)\end{aligned}$$

mit der einfachen reellen Nullstelle $\lambda_1 = 3$ sowie den beiden einfachen konjugiert–komplexen Nullstellen $\lambda_{2,3} = \pm i$ mit dem Realteil $\varrho = 0$ und dem Imaginärteil $\pm\sigma$ mit $\sigma = 1$; damit bilden die drei Funktionen

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad & \varphi_1(x) &= e^{\lambda_1 x} = e^{3x}, \\
\varphi_2 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad & \varphi_2(x) &= e^{\varrho x} \cos(\sigma x) = \cos x, \\
\varphi_3 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad & \varphi_3(x) &= e^{\varrho x} \sin(\sigma x) = \sin x,
\end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem von $(\mathrm{D}_0)$, und die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + c_3 \varphi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1 e^{3x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x,$$

mit $c_1$, $c_2$, $c_3 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von $(\mathrm{D}_0)$. Dabei sind beispielsweise $\varphi_2$ und $\varphi_3$ periodische Lösungen von $(\mathrm{D}_0)$, während etwa die Lösung $\varphi_1$ nicht periodisch ist.

b) Die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}) \qquad y''' - 3y'' + y' - 3y = 17 e^{4x}$$

dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = 17 e^{4x},$$

von der Form $b(x) = p(x) e^{a x}$ mit der konstanten Funktion $p(x) = 17$ sowie $a = 4$. Da nun $a$ keine Nullstelle von $\chi$ ist, wählen wir für die partikuläre Lösung $\varphi_p$ von (D) den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q(x) e^{4x} = r e^{4x}$$

mit der ebenfalls konstanten Funktion $q(x) = r$. Wegen

$$\varphi_p'(x) = 4 r e^{4x}, \qquad \varphi_p''(x) = 16 r e^{4x} \quad \text{und} \quad \varphi_p'''(x) = 64 r e^{4x}$$

ist $\varphi_p$ genau dann Lösung von (D), wenn

$$\left(64 r e^{4x}\right) - 3\left(16 r e^{4x}\right) + \left(4 r e^{4x}\right) - 3\left(r e^{4x}\right) = 17 e^{4x},$$

also

$$17 r e^{4x} = 17 e^{4x},$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; damit ergibt sich $17 r = 17$ und damit $r = 1$. Damit ist

$$\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_p(x) = e^{4x},$$

eine spezielle Lösung sowie die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + c_3 \varphi_3 + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = c_1 e^{3x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x + e^{4x},$$

mit $c_1$, $c_2$, $c_3 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D). Wegen

$$\varphi'(x) = 3 c_1 e^{3x} - c_2 \sin x + c_3 \cos x + 4 e^{4x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich

$$\varphi(0) = 0 \iff c_1\, e^0 + c_2\, \cos 0 + c_3\, \sin 0 + e^0 = 0 \iff$$
$$\iff c_1 + c_2 + 1 = 0 \iff c_2 = -(c_1 + 1)$$

und

$$\varphi'(0) = 0 \iff 3\, c_1\, e^0 - c_2\, \sin 0 + c_3\, \cos 0 + 4\, e^0 = 0 \iff$$
$$\iff 3\, c_1 + c_3 + 4 = 0 \iff c_3 = -(3\, c_1 + 4)$$

stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1\, e^{3x} - (c_1 + 1)\, \cos x - (3\, c_1 + 4)\, \sin x + e^{4x},$$

mit $c_1 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung des gestellten Anfangswertproblems dar.

8.47 Die homogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}_0) \qquad y'''' + 2\, y''' - 8\, y'' = 0$$

vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^4 + 2\, \lambda^3 - 8\, \lambda^2 = \left(\lambda^2 + 2\, \lambda - 8\right) \cdot \lambda^2 = (\lambda - 2) \cdot (\lambda + 4) \cdot \lambda^2$$

mit den beiden einfachen reellen Nullstellen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -4$ sowie der doppelten reellen Nullstelle $\lambda_3 = 0$; damit bilden die vier Funktionen

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{2\, x}, \quad \text{und} \quad \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x} = x\, e^{-4\, x},$$

sowie

$$\varphi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi_3(x) = e^{\lambda_3 x} = 1, \quad \text{und} \quad \varphi_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi_4(x) = x\, e^{\lambda_3 x} = x,$$

ein Fundamentalsystem von $(\mathrm{D}_0)$. Die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = e^x,$$

ist von der Form $b(x) = p(x)\, e^{a\, x}$ mit der konstanten Funktion $p(x) = 1$ und $a = 1$. Da $a$ keine Nullstelle von $\chi$ ist, wählen wir für die partikuläre Lösung $\varphi_p$ von

$$(\mathrm{D}) \qquad y'''' + 2\, y''' - 8\, y'' = e^x$$

den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q(x)\, e^x = r\, e^x$$

ebenfalls mit einer konstanten Funktion $q(x) = r$. Wegen

$$\varphi_p'(x) = r\, e^x, \quad \varphi_p''(x) = r\, e^x, \quad \varphi_p'''(x) = r\, e^x \quad \text{und} \quad \varphi_p''''(x) = r\, e^x$$

ist $\varphi_p$ genau dann Lösung von (D), wenn

$$r\, e^x + 2\, r\, e^x - 8\, r\, e^x = e^x,$$

also

$$-5\,r\,e^x = e^x \qquad \text{und damit} \qquad r = -\frac{1}{5}$$

ist; folglich erhalten wir

$$\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_p(x) = -\frac{1}{5}\,e^x.$$

Die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung (D) ist demnach die Menge aller Funktionen

$$\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 + c_3 \cdot \varphi_3 + c_4 \cdot \varphi_4 + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$\varphi(x) = c_1\,e^{2\,x} + c_2\,e^{-4\,x} + c_3 + c_4\,x - \frac{1}{5}\,e^x,$$

mit $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4 \in \mathbb{R}$.

8.48 Die homogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}_0) \qquad y'' + 2\,y' + y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\,\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

mit der doppelten Nullstelle $\lambda = -1$; damit bilden die beiden Funktionen

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi_1(x) = e^{-x}, \qquad \text{und} \qquad \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi_2(x) = x\,e^{-x},$$

ein Fundamentalsystem von $(\mathrm{D}_0)$. Die gegebene inhomogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}) \qquad y'' + 2\,y' + y = e^{-x}$$

besitzt die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = e^{-x},$$

der Form $b(x) = p(x)\,e^{a\,x}$ mit der Polynomfunktion $p(x) = 1$ vom Grade $m = 0$ und der Nullstelle $a = -1$ von $\chi$ der Ordnung $\alpha = 2$. Für die partikuläre Lösung $\varphi_p$ von (D) wählen wir den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q(x)\,e^{-x} = \big(r\,x^2 + s\,x + t\big)\,e^{-x}$$

mit einer Polynomfunktion $q(x) = r\,x^2 + s\,x + t$ vom Grade $m + \alpha = 2$; nachdem $e^{-x}$ und $x\,e^{-x}$ die homogene Gleichung $(\mathrm{D}_0)$ lösen, können wir $s = t = 0$ wählen. Wegen

$$\varphi_p'(x) = 2\,r\,x\,e^{-x} - r\,x^2\,e^{-x} = \big(2\,r\,x - r\,x^2\big)\,e^{-x}$$

und

$$\varphi_p''(x) = (2\,r - 2\,r\,x)\,e^{-x} - \big(2\,r\,x - r\,x^2\big)\,e^{-x} = \big(2\,r - 4\,r\,x + r\,x^2\big)\,e^{-x}$$

ist $\varphi_p$ genau dann Lösung von (D), wenn

$$\big(2\,r - 4\,r\,x + r\,x^2\big)\,e^{-x} + 2\,\big(2\,r\,x - r\,x^2\big)\,e^{-x} + r\,x^2\,e^{-x} = e^{-x},$$

also
$$2\,r\,e^{-x}=e^{-x},$$
für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt; damit ergibt sich $r=\frac{1}{2}$ und folglich $\varphi_p(x)=\frac{1}{2}\,x^2\,e^{-x}$. Damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi=c_1\,\varphi_1+c_2\,\varphi_2+\varphi_p:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \varphi(x)=\left(c_1+c_2\,x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x},$$

mit $c_1$, $c_2\in\mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D); dabei ist

$$\varphi'(x)=(c_2+x)\,e^{-x}-\left(c_1+c_2\,x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}=\left((c_2-c_1)+(1-c_2)\;x-\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}$$

für alle $x\in\mathbb{R}$. Unter Berücksichtigung der gegebenen Anfangswerte ergibt sich

$$\varphi(0)=1\iff c_1\cdot e^0=1\iff c_1=1$$

und damit

$$\varphi'(0)=1\iff (c_2-c_1)\cdot e^0=1\iff c_2=1+c_1\iff c_2=2;$$

folglich ist
$$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \varphi(x)=\left(1+2\,x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x},$$
die maximale Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

8.49 In Abhängigkeit von einem Parameter $a\in\mathbb{R}$ ist das lineare Anfangswertproblem

$$y''-2a\,y'+a^2y=2e^{ax}\qquad\text{mit}\qquad y(0)=0\quad\text{und}\quad y'(0)=0$$

zu betrachten, und dabei diejenigen $a\in\mathbb{R}$ zu bestimmen, für die die Lösung die zusätzliche Bedingung $y(1)=1$ erfüllt.

Die homogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}_0)\qquad y''-2ay'+a^2y=0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom
$$\chi(\lambda)=\lambda^2-2\,a\,\lambda+a^2=(\lambda-a)^2$$
mit der doppelten Nullstelle $\lambda=a$; damit bilden die beiden Funktionen

$$\varphi_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \varphi_1(x)=e^{a\,x},\qquad\text{und}\qquad \varphi_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \varphi_2(x)=x\,e^{a\,x},$$

ein Fundamentalsystem von $(\mathrm{D}_0)$. Die gegebene inhomogene lineare Differentialgleichung
$$(\mathrm{D})\qquad y''-2a\,y'+a^2y=2\,e^{ax}$$
besitzt die rechte Seite

$$b:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad b(x)=2\,e^{a\,x},$$

der Form $b(x) = p(x)\, e^{a\,x}$ mit der Polynomfunktion $p(x) = 2$ vom Grade $m = 0$ und der Nullstelle $a$ von $\chi$ der Ordnung $\alpha = 2$. Für die partikuläre Lösung $\varphi_p$ von (D) wählen wir den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q(x)\, e^{ax} = \left(rx^2 + sx + t\right) e^{ax}$$

mit einer Polynomfunktion $q(x) = rx^2 + sx + t$ vom Grade $m + \alpha = 2$; nachdem $e^{ax}$ und $x\, e^{ax}$ die homogene Gleichung $(\mathrm{D}_0)$ lösen, können wir $s = t = 0$ wählen. Wegen

$$\varphi_p'(x) = 2r\, x \cdot e^{ax} + r\, x^2 \cdot ae^{ax} = \left(2r\, x + ra\, x^2\right) e^{ax}$$

und

$$\varphi_p''(x) = (2r + 2rax) \cdot e^{ax} + \left(2rx + rax^2\right) \cdot ae^{ax} = \left(2r + 4rax + ra^2x^2\right) e^{ax}$$

ist $\varphi_p$ genau dann Lösung von (D), wenn

$$\left(2r + 4rax + ra^2x^2\right) e^{ax} - 2a \left(2rx + rax^2\right) e^{ax} + a^2 \left(rx^2 e^{ax}\right) = 2e^{ax},$$

also

$$2rae^{ax} = 2e^{ax},$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; damit ergibt sich $r = 1$ und folglich $\varphi_p(x) = x^2 e^{ax}$. Damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1\, \varphi_1 + c_2\, \varphi_2 + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \left(c_1 + c_2\, x + x^2\right) e^{ax},$$

mit $c_1$, $c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D); dabei ist

$$\begin{aligned}\varphi'(x) = (c_2 + 2x) \cdot e^{ax} + \left(c_1 + c_2\, x + x^2\right) \cdot ae^{ax} =& \\ = \left((c_2 + ac_1) + (2 + ac_2)\; x + ax^2\right) e^{ax}&\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Unter Berücksichtigung der gegebenen Anfangswerte ergibt sich

$$\varphi(0) = 0 \iff c_1 \cdot e^0 = 0 \iff c_1 = 0$$

und damit

$$\varphi'(0) = 0 \iff c_2 + a\, c_1 \cdot e^0 = 0 \underset{c_1=0}{\iff} c_2 = 0,$$

insgesamt also

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = x^2\, e^{ax}.$$

Diese Lösung des gestellten Anfangswertproblems erfüllt nun wegen

$$\varphi(1) = 1 \iff 1^2 \cdot e^a = 1 \iff e^a = 1 \iff a = 0$$

genau dann die zusätzliche Bedingung $y(1) = 1$, wenn $a = 0$ gilt; in diesem Fall ergibt sich als Lösungsfunktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = x^2.$$

8.50 Die homogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}_0) \qquad y'' + 4\,y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 4 = (\lambda - 2i)(\lambda + 2i)$$

mit den beiden konjugiert–komplexen Nullstellen $\lambda_{1,2} = \varrho \pm i\sigma$ mit $\varrho = 0$ und $\sigma = 2$; damit bilden die beiden Funktionen

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = e^{\varrho x}\cos(\sigma x) = \cos(2x),$$

und

$$\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x) = e^{\varrho x}\sin(\sigma x) = \sin(2x),$$

ein Fundamentalsystem von $(\mathrm{D}_0)$. Die gegebene inhomogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}) \qquad y'' + 4\,y = \sin(2x)$$

besitzt die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = \sin(2x),$$

der Form $b(x) = p(x)\,e^{a\,x}\,\sin(k\,x)$ mit der Polynomfunktion $p(x) = 1$ vom Grade $m = 0$ und der Nullstelle $a+ik = 2i$ von $\chi$ der Ordnung $\alpha = 1$. Für die partikuläre Lösung $\varphi_p$ von (D) wählen wir den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q_1(x)\,\cos(2x) + q_2(x)\,\sin(2x)$$

mit Polynomfunktionen $q_1(x) = r_1\,x + s_1$ und $q_2(x) = r_2\,x + s_2$ vom Grade $m + \alpha = 1$; nachdem $\cos(2x)$ und $\sin(2x)$ die homogene Gleichung $(\mathrm{D}_0)$ lösen, können wir $s_1 = s_2 = 0$ wählen. Wegen

$$\begin{aligned} \varphi_p'(x) &= r_1\,(\cos(2x) - 2x\,\sin(2x)) + r_2\,(\sin(2x) + 2x\,\cos(2x)) \\ &= (r_1 + 2r_2x)\cos(2x) + (r_2 - 2r_1x)\sin(2x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi_p''(x) &= (2r_2\cos(2x) - 2\,(r_1 + 2r_2x)\sin(2x)) + \\ &\qquad + (-2r_1\sin(2x) + 2\,(r_2 - 2r_1x)\cos(2x)) \\ &= 4\,(r_2 - r_1x)\cos(2x) - 4\,(r_1 + r_2x)\sin(2x) \end{aligned}$$

ist $\varphi_p$ genau dann Lösung von (D), wenn

$$4\,(r_2 - r_1x)\cos(2x) - 4\,(r_1 + r_2x)\sin(2x) + 4\,(r_1x\cos(2x) + r_2x\sin(2x)) = \sin(2x),$$

also

$$4\,r_2\,\cos(2x) - 4\,r_1\,\sin(2x) = \sin(2x),$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; damit erhält man $r_1 = -\frac{1}{4}$ und $r_2 = 0$, insgesamt also $\varphi_p(x) = -\frac{1}{4}\,x\,\cos(2x)$. Damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1\,\varphi_1 + c_2\,\varphi_2 + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \left(c_1 - \frac{x}{4}\right)\cos(2x) + c_2\sin(2x),$$

mit $c_1$, $c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D); dabei ist

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= -\frac{1}{4}\cos(2x) - 2\left(c_1 - \frac{x}{4}\right)\sin(2x) + 2c_2\cos(2x) \\ &= \left(2c_2 - \frac{1}{4}\right)\cos(2x) - 2\left(c_1 - \frac{x}{4}\right)\sin(2x)\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Unter Berücksichtigung der gegebenen Anfangswerte ergibt sich

$$\varphi(0) = 0 \iff c_1\cos 0 + c_2\sin 0 = 0 \iff c_1 = 0$$

und

$$\varphi'(0) = 0 \iff \left(2c_2 - \frac{1}{4}\right)\cos 0 - 2c_1\sin 0 = 0 \iff 2c_2 = \frac{1}{4} \iff c_2 = \frac{1}{8};$$

folglich ist

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = -\frac{x}{4}\cos(2x) + \frac{1}{8}\sin(2x),$$

die maximale Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

8.51 Die homogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}_0) \qquad y'' + y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$$

mit den beiden konjugiert–komplexen Nullstellen $\lambda_{1,2} = \varrho \pm i\sigma$ mit $\varrho = 0$ und $\sigma = 1$; damit bilden die beiden Funktionen

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = e^{\varrho x}\cos(\sigma x) = \cos x,$$

und

$$\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x) = e^{\varrho x}\sin(\sigma x) = \sin x,$$

ein Fundamentalsystem von $(\mathrm{D}_0)$. Die gegebene inhomogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}) \qquad y'' + 4\,y = 2\cos x - 2\sin x$$

besitzt die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = 2\cos x - 2\sin x,$$

der Form $b(x) = p_1(x)\,e^{a\,x}\cos(k\,x) + p_2(x)\,e^{a\,x}\sin(k\,x)$ mit Polynomfunktionen $p_1(x) = 1$ und $p_2(x) = 1$ jeweils vom Grade $m = 0$ und der Nullstelle $a + ik = i$ von $\chi$ der Ordnung $\alpha = 1$. Für die partikuläre Lösung $\varphi_p$ von (D) wählen wir den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q_1(x)\,\cos x + q_2(x)\,\sin x$$

mit Polynomfunktionen $q_1(x) = r_1\,x + s_1$ und $q_2(x) = r_2\,x + s_2$ vom Grade $m + \alpha = 1$; nachdem $\cos x$ und $\sin x$ die homogene Gleichung $(\mathrm{D}_0)$ lösen, können wir $s_1 = s_2 = 0$ wählen. Wegen

$$\begin{aligned}\varphi_p'(x) &= r_1\,(\cos x - x\,\sin x) + r_2\,(\sin x + x\,\cos x) \\ &= (r_1 + r_2 x)\cos x + (r_2 - r_1 x)\sin x\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\varphi_p''(x) &= (r_2\cos x - (r_1 + r_2 x)\sin x) + (-r_1\sin x + (r_2 - r_1 x)\cos x)\\ &= (2\,r_2 - r_1 x)\cos x - (2\,r_1 + r_2 x)\sin x\end{aligned}$$

ist $\varphi_p$ genau dann Lösung von (D), wenn

$$(2\,r_2 - r_1 x)\cos x - (2\,r_1 + r_2 x)\sin x + (r_1 x\cos x + r_2 x\sin x) = 2\,\cos x - 2\sin x,$$

also

$$2\,r_2\,\cos x - 2\,r_1\,\sin x = 2\,\cos x - 2\sin x,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; damit erhält man $r_1 = 1$ und $r_2 = 1$, insgesamt also die partikuläre Lösung $\varphi_p(x) = x\cos x + x\sin x$. Damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1\,\varphi_1 + c_2\,\varphi_2 + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + x\cos x + x\sin x,$$

mit $c_1$, $c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D).

8.52 In Abhängigkeit von einem Parameter $a \in \mathbb{R}^+$ ist die Differentialgleichung

$$\text{(D)} \qquad y'' + a^2 y = \cos x$$

zu betrachten, und dabei diejenigen $a \in \mathbb{R}^+$ zu bestimmen, für die jede reellwertige Lösung unbeschränkt ist.

Die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(\mathrm{D}_0) \qquad y'' + a^2\,y = 0$$

mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + a^2 = \lambda^2 - (a\,i)^2 = (\lambda - a\,i)\cdot(\lambda + a\,i)$$

mit den beiden konjugiert–komplexen Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm a\,i$ mit dem Realteil $\varrho = 0$ und dem Imaginärteil $\pm\sigma$ mit $\sigma = a$; damit bilden die beiden Funktionen

$$\begin{aligned}\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\qquad \varphi_1(x) = e^{\varrho x}\cos(\sigma x) = \cos(ax),\\ \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\qquad \varphi_2(x) = e^{\varrho x}\sin(\sigma x) = \sin(ax),\end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem von $(\mathrm{D}_0)$. Die gegebene inhomogene lineare Differentialgleichung (D) besitzt die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = \cos x,$$

der Form $b(x) = p(x)\,e^{c\,x}\cos(k\,x)$ mit der Polynomfunktion $p(x) = 1$ vom Grade $m = 0$ sowie $c = 0$ und $k = 1$; zur Bestimmung einer partikulären Lösung $\varphi_p$ von (D) treffen wir bezüglich des Parameters $a \in \mathbb{R}^+$ die folgende Fallunterscheidung:

- Im Falle $a \neq 1$ ist $c + k\,i = i$ keine Nullstelle von $\chi$, und wir wählen für die partikuläre Lösung $\varphi_p$ von (D) daher den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q_1(x)\,\cos x + q_2(x)\,\sin x$$

mit Polynomfunktionen $q_1(x) = r_1$ und $q_2(x) = r_2$ vom Grade $m = 0$. Wegen

$$\varphi_p'(x) = -r_1 \sin x + r_2 \cos x \qquad \text{und} \qquad \varphi_p''(x) = -r_1 \cos x - r_2 \sin x$$

ist $\varphi_p$ genau dann Lösung von (D), wenn

$$(-r_1 \cos x - r_2 \sin x) + a^2 (r_1 \cos x + r_2 \sin x) = \cos x,$$

also

$$\left(a^2 - 1\right) r_1 \cos x + \left(a^2 - 1\right) r_2 \sin x = \cos x,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; damit erhält man

$$\left(a^2 - 1\right) r_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad \left(a^2 - 1\right) r_2 = 0,$$

wegen $0 < a \neq 1$ und damit $a^2 \neq 1$ bzw. $a^2 - 1 \neq 0$ also

$$r_1 = \frac{1}{a^2 - 1} \qquad \text{und} \qquad r_2 = 0,$$

insgesamt also die partikuläre Lösung $\varphi_p(x) = \frac{1}{a^2-1} \cos x$. Damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \varphi(x) = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax) + \frac{1}{a^2 - 1} \cos x,$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D); wegen

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &= \left| c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax) + \frac{1}{a^2 - 1} \cos x \right| \\ &\leq |c_1 \cos(ax)| + |c_2 \sin(ax)| + \left| \frac{1}{a^2 - 1} \cos x \right| \\ &= |c_1| \cdot \underbrace{|\cos(ax)|}_{\leq 1} + |c_2| \cdot \underbrace{|\sin(ax)|}_{\leq 1} + \left| \frac{1}{a^2 - 1} \right| \cdot \underbrace{|\cos x|}_{\leq 1} \\ &\leq |c_1| + |c_2| + \frac{1}{|a^2 - 1|} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ sind sogar alle Lösungsfunktionen $\varphi$ beschränkt.

- Im Falle $a = 1$ ist $c + k\,i = i$ eine Nullstelle von $\chi$ der Ordnung $\alpha = 1$. Für die partikuläre Lösung $\varphi_p$ von (D) wählen wir daher den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q_1(x) \cos x + q_2(x) \sin x$$

mit Polynomfunktionen $q_1(x) = r_1 x + s_1$ und $q_2(x) = r_2 x + s_2$ vom Grade $m + \alpha = 1$; nachdem $\cos x$ und $\sin x$ die homogene Gleichung ($\mathrm{D}_0$) lösen, können wir $s_1 = s_2 = 0$ wählen. Wegen

$$\begin{aligned} \varphi_p'(x) &= r_1 (\cos x - x \sin x) + r_2 (\sin x + x \cos x) \\ &= (r_1 + r_2 x) \cos x + (r_2 - r_1 x) \sin x \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\varphi_p''(x) &= (r_2\cos x - (r_1 + r_2 x)\sin x) + (-r_1 \sin x + (r_2 - r_1 x)\cos x)\\ &= (2\,r_2 - r_1 x)\cos x - (2\,r_1 + r_2 x)\sin x\end{aligned}$$

ist $\varphi_p$ genau dann Lösung von (D), wenn

$$(2\,r_2 - r_1 x)\cos x - (2\,r_1 + r_2 x)\sin x + (r_1 x\cos x + r_2 x\sin x) = \cos x,$$

also

$$2\,r_2\,\cos x - 2\,r_1\,\sin x = \cos x,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; damit erhält man $r_1 = 0$ und $r_2 = \frac{1}{2}$, insgesamt also die partikuläre Lösung $\varphi_p(x) = \frac{1}{2} x \sin x$. Damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1\,\varphi_1 + c_2\,\varphi_2 + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x}{2}\sin x,$$

mit $c_1$, $c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D); für $x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi(x_n) &= c_1 \cos x_n + \left(c_2 + \frac{x_n}{2}\right)\sin x_n\\ &= c_1 \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \left(c_2 + \frac{2n\pi + \frac{\pi}{2}}{2}\right)\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\\ &= c_1 \cos\frac{\pi}{2} + \left(c_2 + n\pi + \frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{2}\\ &= c_2 + n\pi + \frac{\pi}{4} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty,\end{aligned}$$

so daß alle Lösungsfunktionen $\varphi$ unbeschränkt sind.

8.53 Für die homogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}_0) \qquad y'' + (n-1)\,y' - n\,y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ergibt sich das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + (n-1)\,\lambda - n = (\lambda - 1)\,(\lambda + n),$$

das wegen $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die beiden einfachen reellen Nullstellen $\lambda_1 = 1$ sowie $\lambda_2 = -n$ besitzt; damit bilden die beiden Funktionen

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^x,$$

und

$$\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{-n\,x},$$

ein Fundamentalsystem von $(\mathrm{D}_0)$. Die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = n\,x,$$

ist von der Form $b(x) = p(x)\, e^{a\,x}$ mit der Polynomfunktion $p(x) = n\,x$ vom Grade $m = 1$ und $a = 0$. Da $a$ keine Nullstelle von $\chi$ ist, wählen wir für die partikuläre Lösung $\varphi_p$ von

$$\text{(D)} \qquad y'' + (n-1)\,y' - n\,y = n\,x$$

den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q(x)\, e^{a\,x} = q(x)$$

ebenfalls mit einer Polynomfunktion $q(x) = r\,x + s$ vom Grade $m = 1$. Wegen

$$\varphi_p'(x) = r \qquad \text{und} \qquad \varphi_p''(x) = 0$$

ist $\varphi_p$ genau dann Lösung von (D), wenn

$$0 + (n-1)\cdot r - n\cdot(r\,x + s) = n\,x,$$

also

$$(-n\,r)\,x + ((n-1)\,r - n\,s) = n\,x,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, und ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$-n\,r = n \;\text{ und }\; (n-1)\,r - n\,s = 0, \qquad \text{also} \qquad r = -1 \;\text{ und }\; s = \frac{1-n}{n},$$

und wir erhalten

$$\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_p(x) = -x + \frac{1-n}{n}.$$

Die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung (D) ist demnach die Menge aller Funktionen

$$\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1\, e^x + c_2\, e^{-n\,x} - x + \frac{1-n}{n},$$

mit $c_1$, $c_2 \in \mathbb{R}$; dabei ist

$$\varphi'(x) = c_1\, e^x - n\, c_2\, e^{-n\,x} - 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Unter Berücksichtigung der gegebenen Anfangswerte ergibt sich

$$\varphi(0) = \frac{1-n}{n} \iff c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^0 - 0 + \frac{1-n}{n} = \frac{1-n}{n} \iff c_1 + c_2 = 0$$

sowie

$$\varphi'(0) = n \iff c_1 \cdot e^0 - n\, c_2 \cdot e^0 - 1 = n \iff c_1 - n\, c_2 = n + 1,$$

also $c_1 = 1$ und $c_2 = -1$; damit ist

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = e^x - e^{-n\,x} - x + \frac{1-n}{n},$$

die maximale Lösung des gestellten Anfangswertproblems.

8.54 a) Für ein gegebenes $k \in \mathbb{N}$ ist die Differentialgleichung

$$y^{(k+2)} = 2\,y^{(k+1)} - y^{(k)} \qquad \text{bzw.} \qquad y^{(k+2)} - 2\,y^{(k+1)} + y^{(k)} = 0$$

zu betrachten; es handelt sich also um eine homogene lineare Differentialgleichung $(k+2)$–ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^{k+2} - 2\,\lambda^{k+1} + \lambda^k = \lambda^k\left(\lambda^2 - 2\,\lambda + 1\right) = \lambda^k\,(\lambda-1)^2$$

besitzt die $k$–fache Nullstelle $\lambda_1 = 0$ sowie die doppelte Nullstelle $\lambda_2 = 1$; Damit bilden die $k$ Funktionen

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & \varphi_1(x) &= e^{\lambda_1 x} = 1,\\
\varphi_2 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & \varphi_2(x) &= x\,e^{\lambda_1 x} = x,\\
&\vdots & &\vdots\\
\varphi_k &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & \varphi_k(x) &= x^{k-1}e^{\lambda_1 x} = x^{k-1},
\end{aligned}$$

zusammen mit den beiden Funktionen

$$\begin{aligned}
\varphi_{k+1} &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & \varphi_{k+1}(x) &= e^{\lambda_2 x} = e^x,\\
\varphi_{k+2} &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & \varphi_{k+2}(x) &= x\,e^{\lambda_2 x} = x\,e^x,
\end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem und die Gesamtheit aller Linearkombinationen

$$\begin{aligned}
\varphi = c_1\,\varphi_1 + c_2\,\varphi_2 + \ldots + c_k\,\varphi_k + c_{k+1}\,\varphi_{k+1} + c_{k+2}\,\varphi_{k+2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\\
\varphi(x) = c_1 + c_2\,x + \ldots + c_k\,x^{k-1} + c_{k+1}\,e^x + c_{k+2}\,x\,e^x,
\end{aligned}$$

mit $c_1,\ c_2, \ldots, c_k,\ c_{k+1},\ c_{k+2} \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

b) Zu betrachten ist die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y'' = 2\,y' - y + x^2 \qquad \text{bzw.} \qquad \text{(D)} \quad y'' - 2\,y' + y = x^2$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die dazugehörige homogene Differentialgleichung $(\mathrm{D}_0)$ $y'' - 2\,y + y = 0$ entspricht den in a) betrachteten Differentialgleichungen für $k = 0$, so daß entsprechend die beiden Funktionen

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = e^x, \qquad \text{und} \qquad \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x) = x\,e^x,$$

ein Fundamentalsystem von $(\mathrm{D}_0)$ bilden. Die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = x^2,$$

ist von der Form $b(x) = p(x)\,e^{a\,x}$ mit der Polynomfunktion $p(x) = x^2$ vom Grade $m = 2$ und $a = 0$. Da $a$ keine Nullstelle von $\chi(\lambda) = (\lambda-1)^2$ ist, wählen wir für die partikuläre Lösung $\varphi_p$ von (D) den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q(x) = r\,x^2 + s\,x + t$$

mit einer Polynomfunktion $q(x) = r\,x^2 + s\,x + t$ vom Grade $m = 2$. Wegen

$$\varphi_p'(x) = 2\,r\,x + s \qquad \text{und} \qquad \varphi_p''(x) = 2\,r$$

ist $\varphi_p$ genau dann Lösung von (D), wenn

$$2\,r - 2\,(2\,r\,x + s) + \big(r\,x^2 + s\,x + t\big) = x^2,$$

also

$$r\,x^2 + (-4\,r + s)\,x + (2\,r - 2\,s + t) = x^2,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$r = 1, \quad -4\,r + s = 0 \quad \text{und} \quad 2\,r - 2\,s + t = 0,$$

also $r = 1$, $s = 4$ und $t = 6$, und folglich

$$\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_p(x) = x^2 + 4\,x + 6.$$

Damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1\,e^x + c_2\,x\,e^x + x^2 + 4\,x + 6,$$

mit $c_1$, $c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D).