LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Differential– und Integralrechnung 7 — Lösungsvorschlag —

7.1 Das gegebene Dreieck

$$\Delta = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x,\ 0 \le y,\ x+y \le 3\big\}$$

wird von den Geraden $x = 0$, $y = 0$ und $x + y = 3$ begrenzt und besitzt damit die Eckpunkte $(0,0)$, $(3,0)$ und $(0,3)$; es ist insbesondere eine kompakte und zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Die gegebene Funktion

$$f : \Delta \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \big(3 - (x+y)\big)\, e^x\, y^2,$$

ist (als Produkt von Polynomfunktionen und der Exponentialfunktion) insbesondere stetig und besitzt daher auf dem Kompaktum $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ nach dem Satz von Weierstraß mindestens eine globale Minimalstelle $(a,b) \in \Delta$ und mindestens eine globale Maximalstelle $(c,d) \in \Delta$ mit

$$f(a,b) \le f(x,y) \le f(c,d) \qquad \text{für alle} \quad (x,y) \in \Delta;$$

da $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ zudem zusammenhängend ist, gilt für den Wertebereich

$$f(\Delta) = \big[f(a,b),\ f(c,d)\big].$$

Dabei gilt für alle $(x,y) \in \Delta$ zunächst

$$f(x,y) = \underbrace{\big(3 - (x+y)\big)}_{\ge 0} \cdot \underbrace{e^x}_{>0} \cdot \underbrace{y^2}_{\ge 0} \ge 0$$

mit

$$f(x,y) = 0 \iff x + y = 3 \quad \text{oder} \quad y = 0;$$

folglich nimmt die Funktion f genau in den Punkten $(a,b) \in \Delta$ auf den beiden Dreiecksseiten mit den Ecken $(3,0)$ und $(0,3)$ bzw. $(0,0)$ und $(3,0)$ ihr globales Minimum $f(a,b) = 0$ an. Für eine globale Maximalstelle $(c,d) \in \Delta$ gibt es nun die folgenden beiden Möglichkeiten:

- Der Punkt (c,d) liegt ebenfalls auf dem Rand von Δ und damit auf der offenen Dreicksseite mit den Ecken $(0,0)$ und $(0,3)$; er besitzt daher die Gestalt $(0,t)$ für ein $t \in \,]0,3[$ mit

$$f(0,t) = \big(3 - (0+t)\big)\, e^0\, t^2 = \big(3 - t\big)\, t^2 = 3\,t^2 - t^3.$$

Da die (als Polynomfunktion) differenzierbare Hilfsfunktion

$$h :]0,3[\to \mathbb{R}, \quad h(t) = 3\,t^2 - t^3$$

auf dem offenen Intervall $]0,3[$ ihre Extremwerte nur in den Nullstellen ihrer Ableitung h' mit

$$h'(t) = 6\,t - 3\,t^2 = 3\,t\,(2-t) \qquad \text{für alle} \quad t \in]0,3[\,,$$

also in $t = 2$ annehmen kann, kommt für (c,d) nur der Punkt $(0,2)$ in Frage.

- Der Punkt (c,d) liegt im Innern $\overset{\circ}{\Delta}$ von Δ mit

$$\overset{\circ}{\Delta} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x,\ 0 < y,\ x + y < 3\big\}\,;$$

da f (als Produkt von Polynomfunktionen und der Exponentialfunktion) insbesondere partiell differenzierbar ist, kommen hierfür nur die kritischen Stellen von f, also die Nullstellen von $\operatorname{grad} f$ in Frage. Wegen

$$\partial_x f(x,y) = (-1)\cdot e^x \cdot y^2 + \big(3 - (x+y)\big)\cdot e^x \cdot y^2 = \big(2 - (x+y)\big)\cdot e^x \cdot y^2$$

und

$$\partial_y f(x,y) = (-1)\cdot e^x \cdot y^2 + \big(3 - (x+y)\big)\cdot e^x \cdot 2\,y$$

für alle $(x,y) \in \overset{\circ}{\Delta}$ folgt aus $\operatorname{grad} f(c,d) = (0,0)$ zum einen

$$\partial_x f(c,d) = \big(2 - (c+d)\big)\cdot \underbrace{e^c}_{>0} \cdot \underbrace{d^2}_{>0} = 0, \qquad \text{also} \qquad c + d = 2,$$

und damit zum anderen

$$\begin{aligned} \partial_y f(c,d) &= (-1)\cdot e^c \cdot d^2 + \underbrace{\big(3 - (c+d)\big)}_{=3-2=1}\cdot e^c \cdot 2\,d \\ &= e^c \cdot \big(-d^2 + 2\,d\big) = \underbrace{e^c}_{>0} \cdot \underbrace{d}_{>0} \cdot (2-d) = 0, \end{aligned}$$

also $d = 2$ und damit $c = 0$; damit liegt aber (c,d) nicht im Innern von Δ.

Folglich nimmt die Funktion f im Punkt $(c,d) = (0,2)$ ihr globales Maximum

$$f(c,d) = f(0,2) = f(x,y) = \big(3 - (0+2)\big)\cdot e^0 \cdot 2^2 = 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4$$

an, und wir erhalten $f(\Delta) = [f(a,b),\ f(c,d)] = [0,4]$.

7.2 Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = e^{-x^2-y^2-5}(x^2+y^2)^2,$$

ist (als Produkt und Verkettung von Polynomfunktionen und der Exponentialfunktion) partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y) &= \Big(e^{-x^2-y^2-5}\cdot(-2x)\Big)\cdot(x^2+y^2)^2 + e^{-x^2-y^2-5}\cdot\big(2\,(x^2+y^2)\cdot(2x)\big) \\ &= -2x\,e^{-x^2-y^2-5}\,(x^2+y^2)\cdot\big(x^2+y^2-2\big) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\partial_y f(x,y) &= \Big(e^{-x^2-y^2-5}\cdot(-2y)\Big)\cdot(x^2+y^2)^2 + e^{-x^2-y^2-5}\cdot\big(2\,(x^2+y^2)\cdot(2y)\big)\\ &= -2y\,e^{-x^2-y^2-5}\,(x^2+y^2)\cdot\big(x^2+y^2-2\big)\,.\end{aligned}$$

Die kritischen Punkte $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ von f sind genau die Nullstellen des Gradienten $\operatorname{grad} f$ von f, wegen

$$\begin{aligned}\partial_x f(x,y)=0 &\iff -2x\cdot\underbrace{e^{-x^2-y^2-5}}_{>0}\cdot(x^2+y^2)\cdot\big(x^2+y^2-2\big)\\ &\iff x=0 \quad\text{oder}\quad x^2+y^2=0 \quad\text{oder}\quad x^2+y^2-2=0\\ &\iff x=0 \quad\text{oder}\quad x^2+y^2=2\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\partial_y f(x,y)=0 &\iff -2y\cdot\underbrace{e^{-x^2-y^2-5}}_{>0}\cdot(x^2+y^2)\cdot\big(x^2+y^2-2\big)\\ &\iff y=0 \quad\text{oder}\quad x^2+y^2=0 \quad\text{oder}\quad x^2+y^2-2=0\\ &\iff y=0 \quad\text{oder}\quad x^2+y^2=2,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(x,y)=(0,0) &\iff \big(\partial_x f(x,y)=0 \quad\text{und}\quad \partial_y f(x,y)=0\big) \iff\\ &\big(x=0 \quad\text{oder}\quad x^2+y^2=2\big) \quad\text{und}\quad \big(y=0 \quad\text{oder}\quad x^2+y^2=2\big) \iff\\ &\iff \big(x=0 \quad\text{und}\quad y=0\big) \quad\text{oder}\quad x^2+y^2=2,\end{aligned}$$

sind dies genau der Ursprung $(0,0)$ sowie die Punkte der Kreislinie $x^2+y^2=2$ mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und dem Radius $\sqrt{2}$. Wegen

$$f(x,y)=\underbrace{e^{-x^2-y^2-5}}_{>0}\cdot\underbrace{(x^2+y^2)^2}_{\geq 0}\geq 0=f(0,0)$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ nimmt die Funktion f in $(0,0)$ ihr globales (und damit auch ein lokales) Minimum an. Des weiteren betrachten wir für die Punkte $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ die Darstellung in Polarkoordinaten $x=r\cos\varphi$ und $y=r\sin\varphi$ mit $r\in\mathbb{R}_0^+$ und $\varphi\in[0,2\pi]$, und wegen

$$x^2+y^2=(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2=r^2\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1}=r^2$$

ergibt sich

$$f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)-5}(x^2+y^2)^2=e^{-r^2-5}(r^2)^2=e^{-r^2-5}\,r^4.$$

Die Hilfsfunktion

$$h:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R},\quad h(r)=e^{-r^2-5}\cdot r^4,$$

ist (als Produkt und Verkettung von Polynomfunktionen und der Exponentialfunktion) differenzierbar, und für alle $r>0$ gilt

$$h'(r)=\Big(e^{-r^2-5}\cdot(-2\,r)\Big)\cdot r^4+e^{-r^2-5}\cdot 4\,r^3=-2\cdot\underbrace{e^{-r^2-5}}_{>0}\cdot\underbrace{r^3}_{>0}\cdot\big(r^2-2\big)\,;$$

es ergibt sich demnach:

- für alle $r \in \left]0, \sqrt{2}\right[$ gilt $r^2 < 2$ und damit

$$h'(r) = \underbrace{-2 \cdot e^{-r^2-5} \cdot r^3}_{<0} \cdot \underbrace{\left(r^2 - 2\right)}_{<0} > 0,$$

  so daß die stetige Funktion h auf $\left[0, \sqrt{2}\right]$ streng monoton wächst,

- für alle $r \in \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$ gilt $r^2 > 2$ und damit

$$h'(r) = \underbrace{-2 \cdot e^{-r^2-5} \cdot r^3}_{<0} \cdot \underbrace{\left(r^2 - 2\right)}_{>0} < 0,$$

  so daß die stetige Funktion h auf $\left[\sqrt{2}, +\infty\right[$ streng monoton fällt.

Folglich ist $\sqrt{2}$ eine globale Maximalstelle von h, und wir erhalten

$$f(x, y) = h(r) \leq h(\sqrt{2}) \qquad \text{für alle} \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2;$$

da aber $h(\sqrt{2})$ der gemeinsame Funktionswert aller Punkte auf der Kreislinie um $(0, 0)$ mit Radius $\sqrt{2}$ unter der Funktion f ist, nimmt diese dort ihr globales Maximum (und damit auch lokale Maxima) an.

7.3 a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = (x + y)^2 - \cos x,$$

ist (als Differenz einer quadratischen Funktion und des Cosinus) zweimal stetig partiell differenzierbar, und für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\partial_x f(x, y) = 2(x + y) + \sin x \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(x, y) = 2(x + y),$$

also

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \left(2(x + y) + \sin x,\ 2(x + y)\right),$$

sowie

$$\partial_x \partial_x f(x, y) = 2 + \cos x \qquad \text{und} \qquad \partial_y \partial_y f(x, y) = 2$$

und

$$\partial_x \partial_y f(x, y) = 2 = \partial_y \partial_x f(x, y),$$

also

$$\operatorname{Hess} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + \cos x & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die kritischen Punkte von f sind definitionsgemäß genau die Nullstellen von $\operatorname{grad} f$, und für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt dabei

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} f(x, y) = (0, 0) \quad &\iff \quad \left(2(x + y) + \sin x,\ 2(x + y)\right) = (0, 0) \\
&\iff \quad 2(x + y) + \sin x = 0 \quad \text{und} \quad 2(x + y) = 0 \\
&\iff \quad \sin x = 0 \quad \text{und} \quad x + y = 0 \\
&\iff \quad x \in \mathbb{Z} \cdot \pi \quad \text{und} \quad y = -x \\
&\iff \quad (x, y) = (k\pi,\ -k\pi) \quad \text{für ein} \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Um den Typ des kritischen Punktes $(k\pi,\ -k\pi)$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ der Funktion f zu ermitteln, betrachten wir

$$H_k = \operatorname{Hess} f(k\pi,\ -k\pi) = \begin{pmatrix} 2+\cos(k\pi) & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-1)^k & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};$$

dadurch wird die folgende Fallunterscheidung motiviert:

- Ist $k \in \mathbb{Z}$ gerade, so ergibt sich wegen $(-1)^k = 1$ dann

$$H_k = \begin{pmatrix} 2+(-1)^k & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};$$

  wegen $\det H_k = 2 > 0$ und $\operatorname{Spur} H_k = 5 > 0$ ist H_k positiv definit, so daß f in $(k\pi,\ -k\pi)$ ein (isoliertes) lokales Minimum besitzt.
- Ist $k \in \mathbb{Z}$ ungerade, so ergibt sich wegen $(-1)^k = -1$ dann

$$H_k = \begin{pmatrix} 2+(-1)^k & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};$$

  wegen $\det H_k = -2 < 0$ ist H_k indefinit, so daß f in $(k\pi,\ -k\pi)$ einen Sattelpunkt besitzt.

b) Gemäß a) besitzt die Funktion in allen Punkten $(2\ell\pi,\ -2\ell\pi)$ mit $\ell \in \mathbb{Z}$ ein (isoliertes) lokales Minimum; dabei gilt

$$f(2\ell\pi,\ -2\ell\pi) = ((2\ell\pi + (-2\ell\pi))^2 - \cos(2\ell\pi) = 0^2 - 1 = -1.$$

Wegen

$$f(x,y) = (x+y)^2 - \cos x = \underbrace{(x+y)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(-\cos x)}_{\geq -1} \geq 0 + (-1) = -1$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ besitzt f in $(2\ell\pi,\ -2\ell\pi)$ sogar ein globales Minimum.

7.4 Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^4 - 3\,x^2\,y + y^2.$$

a) Für alle $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ ist die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(t) = f(ta,tb),$$

zu betrachten; für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt damit

$$\begin{aligned} g(t) &= f(ta,tb) = (ta)^4 - 3\,(ta)^2\,(tb) + (tb)^2 = \\ &= t^4a^4 - 3\,t^3a^2b + t^2b^2 = t^2\left(t^2a^4 - 3\,t\,a^2b + b^2\right), \end{aligned}$$

also $g(0) = 0$, und wir treffen die folgende Fallunterscheidung:

- Im Falle $b = 0$ ist

$$g(t) = t^4a^4 \geq 0 = g(0) \qquad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R},$$

  damit besitzt g in $t = 0$ ein globales Minimum, insbesondere also ein lokales Minimum.

- Im Falle $b \neq 0$ ist $b^2 > 0$, und wegen

$$\underbrace{t^2 a^4}_{\to 0} - \underbrace{3\,t\,a^2 b}_{\to 0} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $t \in]-\delta, \delta[$ stets

$$\left|t^2 a^4 - 3\,t\,a^2 b\right| < b^2 \quad \text{bzw.} \quad -b^2 < t^2 a^4 - 3\,t\,a^2 b < b^2$$

und damit

$$g(t) = \underbrace{t^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\big(\underbrace{t^2 a^4 - 3\,t\,a^2 b}_{>-b^2} + b^2\big)}_{>0} \geq 0 = g(0)$$

gilt; damit besitzt g in $t = 0$ ein lokales Minimum.

b) Es ist $f(0,0) = 0$. Wegen

$$\lim_{t\to 0+} t = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t\to 0+} t^2 = 0, \qquad \text{also} \qquad \lim_{t\to 0+} \left(t, t^2\right) = (0,0),$$

gibt es zu jedem $r > 0$ ein $t_0 \in \mathbb{R}^+$ mit $(t_0, t_0^2) \in K_r(0,0)$, und es gilt

$$f\left(t_0, t_0^2\right) = t_0^4 - 3\,t_0^2\,t_0^2 + (t_0^2)^2 = -t_0^4 \underset{\text{wegen } t_0>0}{<} 0 \leq f(0,0);$$

dabei bezeichnet $K_r(0,0)$ die offene Kreisscheibe um $(0,0)$ mit Radius r. Folglich besitzt f in $(0,0)$ kein lokales Minimum.

7.5 Das Quadrat

$$D = [-2,2] \times [-2,2] \subseteq \mathbb{R}^2$$

mit den Eckpunkten $(-2,-2)$, $(2,-2)$, $(2,2)$ und $(-2,2)$ ist eine sowohl abgeschlossene als auch beschränkte und damit kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$; darüber hinaus ist die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 2\,x\,y - x + y,$$

als Polynomfunktion insbesondere stetig. Nach dem Satz von Weierstraß besitzt damit die stetige Funktion f auf der kompakten Menge D eine globale Minimalstelle $(p_1, q_1) \in D$ und eine globale Maximalstelle $(p_2, q_2) \in D$, für alle $(x,y) \in D$ gilt also $f(p_1,q_1) \leq f(x,y) \leq f(p_2,q_2)$. Zur Ermittlung der globalen Extremstellen $(p,q) \in D$ von f haben wir die beiden folgenden Fälle zu unterscheiden:

- Der Punkt (p,q) liegt auf dem Rand ∂D des Quadrats D, also auf einer der vier Quadratseiten:
  - Für die Punkte $(-2,t)$ mit $t \in [-2,2]$ der linken Quadratseite gilt

$$f(-2,t) = 2 \cdot (-2) \cdot t - (-2) + t = -3\,t + 2;$$

da die lineare Hilfsfunktion

$$h_1 : [-2,2] \to \mathbb{R}, \quad h_1(t) = -3\,t + 2,$$

ihre Extrema nur in den beiden Randpunkten ihres Definitionsintervalls, also in $t = -2$ und $t = 2$ annehmen kann, kommen für (p,q) nur die Eckpunkte $(-2,-2)$ und $(-2,2)$ in Frage.

– Für die Punkte $(2,t)$ mit $t \in [-2,2]$ der rechten Quadratseite gilt

$$f(2,t) = 2 \cdot 2 \cdot t - 2 + t = 5\,t - 2;$$

da die lineare Hilfsfunktion

$$h_2 : [-2,2] \to \mathbb{R}, \quad h_2(t) = 5\,t - 2,$$

ihre Extrema nur in den beiden Randpunkten ihres Definitionsintervalls, also in $t = -2$ und $t = 2$ annehmen kann, kommen für (p,q) nur die Eckpunkte $(2,-2)$ und $(2,2)$ in Frage.

– Für die Punkte $(t,-2)$ mit $t \in [-2,2]$ der unteren Quadratseite gilt

$$f(t,-2) = 2 \cdot t \cdot (-2) - t + (-2) = -5\,t - 2;$$

da die lineare Hilfsfunktion

$$h_3 : [-2,2] \to \mathbb{R}, \quad h_3(t) = -5\,t - 2,$$

ihre Extrema nur in den beiden Randpunkten ihres Definitionsintervalls, also in $t = -2$ und $t = 2$ annehmen kann, kommen für (p,q) nur die Eckpunkte $(-2,-2)$ und $(2,-2)$ in Frage.

– Für die Punkte $(t,2)$ mit $t \in [-2,2]$ der oberen Quadratseite gilt

$$f(t,2) = 2 \cdot t \cdot 2 - t + 2 = 3\,t + 2;$$

da die lineare Hilfsfunktion

$$h_4 : [-2,2] \to \mathbb{R}, \quad h_4(t) = 3\,t + 2,$$

ihre Extrema nur in den beiden Randpunkten ihres Definitionsintervalls, also in $t = -2$ und $t = 2$ annehmen kann, kommen für (p,q) nur die Eckpunkte $(-2,2)$ und $(2,2)$ in Frage.

- Der Punkt (p,q) liegt im Innern $\overset{\circ}{D}$ des Quadrats D; da f als Polynomfunktion insbesondere partiell differenzierbar ist, ist dann (p,q) ein kritischer Punkt von f mit $\operatorname{grad} f(p,q) = (0,0)$. Wegen

$$\partial_x f(x,y) = 2\,y - 1 \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(x,y) = 2\,x + 1$$

für alle $(x,y) \in D$ kommt für (p,q) nur der Punkt $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ in Frage.

Mit Hilfe der Wertetabelle

(p,q)	$(-2,-2)$	$(-2,2)$	$(2,-2)$	$(2,2)$	$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
$f(p,q)$	8	-4	-12	8	$\frac{1}{2}$

erkennt man, daß f den maximalen Funktionswert 8 in den Punkten $(-2,-2)$ und $(2,2)$ sowie den minimalen Funktionswert -12 im Punkt $(2,-2)$ annimmt.

7.6 a) Für die in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$ gegebene Funktion

$$f_c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_c(x,y) = x^2 + y^2 + c\,x\,y,$$

gilt $f_c(0,0) = 0^2 + 0^2 + c \cdot 0 \cdot 0 = 0$; im Falle $|c| \le 2$ gilt damit

$$\begin{aligned} f_c(x,y) &= x^2 + c\,x\,y + y^2 \\ &= \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{c}{2}\,y + \left(\frac{c}{2}\,y\right)^2\right) + y^2 - \left(\frac{c}{2}\,y\right)^2 \\ &= \underbrace{\left(x + \frac{c}{2}\,y\right)^2}_{\ge 0} + \underbrace{\left(1 - \underbrace{\left(\frac{c}{2}\right)^2}_{\le 1,\ \text{da } \left|\frac{c}{2}\right| \le 1}\right)}_{\ge 0} \underbrace{y^2}_{\ge 0} \ge 0 = f_c(0,0), \end{aligned}$$

so daß f_c die absolute Minimalstelle $(0,0)$ besitzt.

b) Zu der gegebenen Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = x^2 + y^2 + e^{xy},$$

ist für ein festes $(x,y) \neq (0,0)$ die Hilfsfunktion

$$h : [0,\infty[\to \mathbb{R}, \quad h(t) = g(tx,ty),$$

zu betrachten; für alle $t \ge 0$ gilt dabei

$$h(t) = g(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2 + e^{(tx)(ty)} = t^2\left(x^2 + y^2\right) + e^{t^2\,xy}.$$

Damit ist h (als Summe und Komposition quadratischer Funktionen und der Exponentialfunktion) differenzierbar, und für alle $t \ge 0$ gilt

$$h'(t) = 2t\left(x^2 + y^2\right) + e^{t^2\,xy} \cdot (2t\,xy) = 2t\left(x^2 + y^2 + e^{t^2\,xy}xy\right);$$

dabei gilt:

- Für $xy \ge 0$ ergibt sich direkt

$$h'(t) = \underbrace{2t}_{>0}\left(\underbrace{x^2 + y^2}_{\ge 0} + \underbrace{e^{t^2\,xy}}_{\ge 0}\underbrace{xy}_{\ge 0}\right) \ge 0$$

  für alle $t \ge 0$.
- Für $xy \le 0$ ist $t^2\,xy \le 0$ und damit $e^{t^2\,xy} \le e^0 = 1$, woraus sich mit dem Inversionsgesetz $e^{t^2\,xy}\,xy \ge xy$ und unter Verwendung von a) damit

$$\begin{aligned} h'(t) = 2t\left(x^2 + y^2 + e^{t^2\,xy}xy\right) &\underset{2t \ge 0}{\ge} 2t\left(x^2 + y^2 + xy\right) = \\ &= 2t\,f_1(x,y) \underset{2t \ge 0}{\ge} 2t\,f_1(0,0) = 2t \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

  für alle $t \ge 0$ ergibt.

Die differenzierbare Funktion h genügt auf dem abgeschlossenen Intervall $[0,1]$ insbesondere den Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, und damit existiert ein $\xi \in]0,1[$ mit

$$h(1) - h(0) = h'(\xi) \cdot (1-0) = h'(\xi) \geq 0;$$

folglich ist

$$g(x,y) = h(1) \geq h(0) = g(0,0).$$

Damit besitzt g die absolute Minimalstelle $(0,0)$.

7.7 a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^3 + y^2 - x\,y - x,$$

ist (als Polynomfunktion) beliebig oft stetig differenzierbar, und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt zum einen

$$\partial_x f(x,y) = 3\,x^2 - y - 1 \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(x,y) = 2\,y - x,$$

also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(3\,x^2 - y - 1,\ 2\,y - x\right),$$

und zum anderen

$$\partial_x \partial_x f(x,y) = 6\,x \qquad \text{und} \qquad \partial_y \partial_y f(x,y) = 2$$

sowie

$$\partial_x \partial_y f(x,y) = -1 = \partial_y \partial_x f(x,y),$$

also

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6\,x & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Als lokale Extremstellen oder Sattelpunkte der auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierten und partiell differenzierbaren Funktion f kommen ausschließlich ihre kritischen Stellen, also die Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$ in Frage. Mit

$$\partial_y f(x,y) = 0 \iff 2\,y - x = 0 \iff x = 2\,y$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x,y) = 0 \quad &\iff \quad 3\,x^2 - y - 1 = 0 \\
&\underset{x=2\,y}{\iff} \quad 3\,(2\,y)^2 - y - 1 = 0 \iff 12\,y^2 - y - 1 = 0 \\
&\iff \quad y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-1)}}{2 \cdot 12} \\
&\iff \quad y = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{24} = \frac{1 \pm 7}{24} \iff y \in \left\{ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4} \right\};
\end{aligned}$$

damit besitzt f genau die beiden kritischen Punkte $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ und $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, die wir nun mit Hilfe der Hessematrix näher untersuchen:

- Es ist $\operatorname{grad} f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = (0,0)$ mit

$$H_1 = \operatorname{Hess} f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

wegen $\det(H_1) = 7 > 0$ und $\operatorname{Spur}(H_1) = 6 > 0$ ist H_1 positiv definit, so daß f in $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ein isoliertes lokales Minimum besitzt.

- Es ist $\operatorname{grad} f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = (0,0)$ mit

$$H_2 = \operatorname{Hess} f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

wegen $\det(H_2) = -7 < 0$ ist H_2 indefinit, so daß f in $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ einen Sattelpunkt besitzt.

b) Das gegebene Rechteck

$$R = [-1,1] \times [-1,2] \subseteq \mathbb{R}^2$$

mit den Ecken $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,2)$ und $(-1,2)$ ist eine abgeschlossene wie auch beschränkte und damit kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, so daß die (als Polynomfunktion insbesondere) stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nach dem Satz von Weierstraß auf R (mindestens) eine globale Minimalstelle und (mindestens) eine globale Maximalstelle besitzt.

Da die Funktion f darüber hinaus partiell differenzierbar ist, kommen für globale Extremstellen $(a,b) \in R$ von f neben der in a) ermittelten lokalen Minimalstelle $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ nur Punkte auf dem Rand ∂R des Rechtecks R in Frage:

- Für die Punkte $(-1,t)$ mit $t \in [-1,2]$ der linken Rechteckseite gilt

$$f(-1,t) = (-1)^3 + t^2 - (-1) \cdot t - (-1) = t^2 + t;$$

da die quadratische Hilfsfunktion

$$h_1 : [-1,2] \to \mathbb{R}, \quad h_1(t) = t^2 + t,$$

ihre Extrema nur in den beiden Randpunkten ihres Definitionsintervalls, also in $t = -1$ und $t = 2$, sowie in den Nullstellen ihrer Ableitung

$$h_1'(t) = 2\,t + 1,$$

also in $t = -\frac{1}{2}$ annehmen kann, kommen für (a,b) nur die Punkte $(-1,-1)$, $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ und $(-1,2)$ in Frage.

- Für die Punkte $(1,t)$ mit $t \in [-1,2]$ der rechten Rechteckseite gilt

$$f(1,t) = 1^3 + t^2 - 1 \cdot t - (-1) = t^2 - t;$$

da die quadratische Hilfsfunktion

$$h_2 : [-1,2] \to \mathbb{R}, \quad h_2(t) = t^2 - t,$$

ihre Extrema nur in den beiden Randpunkten ihres Definitionsintervalls, also in $t = -1$ und $t = 2$, sowie in den Nullstellen ihrer Ableitung

$$h_1'(t) = 2\,t - 1,$$

also in $t = \frac{1}{2}$ annehmen kann, kommen für (a,b) nur die Punkte $(1,-1)$, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ und $(1,2)$ in Frage.

- Für die Punkte $(t,-1)$ mit $t \in [-1,1]$ der unteren Rechteckseite gilt

$$f(t,-1) = t^3 + (-1)^2 - t \cdot (-1) - t = t^3 + 1;$$

da die kubische Hilfsfunktion

$$h_3 : [-1;1] \to \mathbb{R}, \quad h_3(t) = t^3 + 1,$$

bekanntlich streng monoton wächst und damit ihre Extrema nur in den beiden Randpunkten ihres Definitionsintervalls, also in $t = -1$ und $t = 1$, annehmen kann, kommen für (a,b) nur die Punkte $(-1,-1)$ und $(1,-1)$ in Frage.

- Für die Punkte $(t,2)$ mit $t \in [-1,1]$ der oberen Rechteckseite gilt

$$f(t,2) = t^3 + 2^2 - t \cdot 2 - t = t^3 - 3\,t + 4;$$

da die kubische Hilfsfunktion

$$h_4 : [-1;1] \to \mathbb{R}, \quad h_4(t) = t^3 - 3\,t + 4,$$

ihre Extrema nur in den beiden Randpunkten ihres Definitionsintervalls, also in $t = -1$ und $t = 1$, die hier mit den Nullstellen ihrer Ableitung

$$h_4'(t) = 3\,t^2 - 3 = 3\left(t^2 - 1\right) = 3(t-1)(t+1)$$

zusammenfallen, annehmen kann, kommen für (a,b) nur die Punkte $(-1,2)$ und $(1,2)$ in Frage.

Mit Hilfe der Wertetabelle

(a,b)	$(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$	$(-1,-1)$	$(-1,-\frac{1}{2})$	$(-1,2)$	$(1,-1)$	$(1,\frac{1}{2})$	$(1,2)$
$f(a,b)$	$-\frac{13}{27}$	0	$-\frac{1}{4}$	6	2	$-\frac{1}{4}$	2

erkennt man, daß f den maximalen Funktionswert 6 im Punkt $(-1,2)$ sowie den minimalen Funktionswert $-\frac{13}{27}$ im Punkt $(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ annimmt.

7.8 Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \left(x^2+1\right)\left(\sin(\pi y) + 2\right),$$

ist (als Produkt einer quadratischen und einer trigonometrischen Funktion) beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\partial_x f(x,y) = 2\,x\left(\sin(\pi y) + 2\right) \quad \text{und} \quad \partial_y f(x,y) = \left(x^2+1\right)\pi\,\cos(\pi y),$$

also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(2\,x\left(\sin(\pi y) + 2\right),\ \left(x^2+1\right)\pi\,\cos(\pi y)\right),$$

sowie

$$\partial_x\partial_x f(x,y) = 2\left(\sin(\pi y) + 2\right) \quad \text{und} \quad \partial_y\partial_y f(x,y) = -\left(x^2+1\right)\pi^2 \sin(\pi y)$$

mit

$$\partial_x\partial_y f(x,y) = 2\,x\,\pi\cos(\pi y) = \partial_y\partial_x f(x,y),$$

also

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,(\sin(\pi y)+2) & 2\,x\,\pi\cos(\pi y) \\ 2\,x\,\pi\cos(\pi y) & -(x^2+1)\,\pi^2\sin(\pi y) \end{pmatrix}.$$

Als Extremstellen der auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierten und partiell differenzierbaren Funktion f kommen nur ihre kritischen Stellen, also die Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$ in Frage, wegen

$$\partial_x f(x,y) = 0 \iff 2\,x\,\underbrace{(\sin(\pi y)+2)}_{\geq(-1)+2=1>0} = 0 \iff x = 0$$

und

$$\partial_y f(x,y) = 0 \iff \underbrace{\left(x^2+1\right)}_{\geq 1>0}\pi\,\cos(\pi y) = 0 \iff$$
$$\iff \cos(\pi y) = 0 \iff \pi y \in \tfrac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\cdot\pi \iff y \in \tfrac{1}{2} + \mathbb{Z}$$

also genau die Punkte $(0, y_k)$ mit $y_k = \frac{1}{2} + k$ für $k \in \mathbb{Z}$. Wir untersuchen nun diese kritischen Stellen mit Hilfe der Hessematrix, wobei wegen

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess} f(0,y_k) &= \begin{pmatrix} 2\,(\sin(\pi y_k)+2) & 0\cdot\cos(\pi y_k) \\ 0\cdot\cos(\pi y_k) & -\pi^2\sin(\pi y_k) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\left(\sin(\frac{\pi}{2}+k\,\pi)+2\right) & 0 \\ 0 & -\pi^2\sin(\frac{\pi}{2}+k\,\pi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Ist $k \in \mathbb{Z}$ gerade, so gilt $\sin(\frac{\pi}{2}+k\,\pi) = 1$; damit besitzt

  $$\operatorname{Hess} f(0,y_k) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -\pi^2 \end{pmatrix}$$

  den positiven Eigenwert 6 und den negativen Eigenwert $-\pi^2$ und ist folglich indefinit. Somit ist $(0,y_k)$ ein Sattelpunkt von f, insbesondere also kein lokales Extremum von f.

- Ist $k \in \mathbb{Z}$ ungerade, so gilt $\sin(\frac{\pi}{2}+k\,\pi) = -1$; damit besitzt

  $$\operatorname{Hess} f(0,y_k) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \pi^2 \end{pmatrix}$$

  die beiden positiven Eigenwerte 2 und π^2 und ist folglich positiv definit. Somit ist $(0,y_k)$ ein isoliertes lokales Minimum von f, insbesondere also kein lokales Maximum von f.

Diese Überlegungen beantworten die Teilaufgaben a) und b) folgendermaßen:

a) Die Funktion f besitzt unendlich viele isolierte lokale Minima, nämlich die Punkte $(0, \frac{1}{2}+k)$ für alle ungeraden $k \in \mathbb{Z}$.

b) Die Funktion f besitzt keine lokalen Maxima, da die in Frage kommenden kritischen Stellen entweder isolierte lokale Minima oder Sattelpunkte sind.

c) Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$f(x,y) = \underbrace{\big(\underbrace{x^2}_{\geq 0} + 1\big)}_{\geq 1} \cdot \underbrace{\big(\underbrace{\sin(\pi y)}_{\geq -1} + 2\big)}_{\geq 1} \geq 1;$$

damit ist zunächst $f(\mathbb{R}^2) \subseteq [1,\infty[$. Für „$\supseteq$“ sei $z \in [1,\infty[$; wegen $z \geq 1$ ist $z-1 \geq 0$ und damit $\big(\sqrt{z-1}, -\frac{1}{2}\big) \in \mathbb{R}^2$, und es gilt

$$f\left(\sqrt{z-1}, -\tfrac{1}{2}\right) = \big(\underbrace{\sqrt{z-1}^{\,2}}_{=z-1} + 1\big) \cdot \big(\underbrace{\sin(-\tfrac{\pi}{2})}_{=-1} + 2\big) = z \cdot 1 = z,$$

also $z \in f(\mathbb{R}^2)$. Insgesamt erhält man $f(\mathbb{R}^2) = [1,\infty[$.

7.9 a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = (x+y) \cdot e^{x\,y},$$

ist als Produkt einer linearen Funktion und einer Exponentialfunktion partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\partial_x f(x,y) = 1 \cdot e^{x\,y} + (x+y) \cdot (e^{x\,y} \cdot y) = \big(1 + x\,y + y^2\big)\, e^{x\,y}$$

sowie

$$\partial_y f(x,y) = 1 \cdot e^{x\,y} + (x+y) \cdot (e^{x\,y} \cdot x) = \big(1 + x\,y + x^2\big)\, e^{x\,y}.$$

Für einen kritischen Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ müßte

$$\partial_x f(x,y) = 0 \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(x,y) = 0,$$

wegen $e^{xy} > 0$ also

$$1 + x\,y + y^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad 1 + x\,y + x^2 = 0,$$

gelten, woraus

$$y^2 = -\,(1 + x\,y) = x^2, \qquad \text{also} \qquad y = x \;\text{ oder }\; y = -x,$$

und damit für $y = x$ in $1 + 2\,x^2 = 0$ sowie für $y = -x$ in $1 = 0$ jeweils ein Widerspruch entsteht. Folglich kann f keine kritischen Punkte besitzen.

b) Die Kreislinie

$$K = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2\big\}$$

mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und dem Radius $\sqrt{2}$ ist kompakt, so daß die (als Produkt stetiger Funktionen) stetige Funktion f nach dem Satz von Weierstraß auf K an mindestens einer Stelle p das globale Minimum $f(p)$ und an mindestens einer Stelle q das globale Maximum $f(q)$ annimmt.
Wir betrachten für den Punkt $(x,y) \in K$ die Darstellung $x = \sqrt{2}\cos\varphi$ und $y = \sqrt{2}\sin\varphi$ mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ in Polarkoordinaten und erhalten

$$\begin{aligned} f(x,y) = (x+y) \cdot e^{x\,y} &= (\sqrt{2}\cos\varphi + \sqrt{2}\sin\varphi) \cdot e^{(\sqrt{2}\cos\varphi)(\sqrt{2}\sin\varphi)} \\ &= \sqrt{2}\,(\cos\varphi + \sin\varphi) \cdot e^{2\cos\varphi\sin\varphi}; \end{aligned}$$

als Extremstellen der differenzierbaren Hilfsfunktion

$$h : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad h(\varphi) = \sqrt{2}\,(\cos\varphi + \sin\varphi) \cdot e^{2\cos\varphi\sin\varphi},$$

kommen neben den beiden Randpunkten 0 und 2π von $[0, 2\pi]$ nur die Nullstellen der Ableitung

$$\begin{aligned} h'(\varphi) &= \sqrt{2}\,(-\sin\varphi + \cos\varphi) \cdot e^{2\cos\varphi\sin\varphi} + \\ &\quad \sqrt{2}\,(\cos\varphi + \sin\varphi) \cdot \big(e^{2\cos\varphi\sin\varphi} \cdot 2\,(-\sin\varphi\sin\varphi + \cos\varphi\cos\varphi)\big) \\ &= \sqrt{2}\,(\cos\varphi - \sin\varphi) \cdot \underbrace{e^{2\cos\varphi\sin\varphi}}_{>0} \cdot \underbrace{\big(1 + 2\,(\cos\varphi + \sin\varphi)^2\big)}_{\geq 1}, \end{aligned}$$

also $\varphi \in [0, 2\pi]$ mit $\cos\varphi = \sin\varphi$, und damit $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ in Frage, so daß sich die globalen Extrema von f unter den Punkten

$$\underbrace{(\sqrt{2}, 0)}_{\text{für } \varphi = 0 \text{ und } \varphi = 2\pi} \quad \text{sowie} \quad \underbrace{(1, 1)}_{\text{für } \varphi = \frac{\pi}{4}} \quad \text{und} \quad \underbrace{(-1, -1)}_{\text{für } \varphi = \frac{5\pi}{4}}$$

finden. Die Wertetabelle

(x, y)	$(\sqrt{2}, 0)$	$(1, 1)$	$(-1, -1)$
$f(x, y)$	$\sqrt{2}$	$2\,e$	$-2\,e$

zeigt, daß f in $p = (-1, -1)$ das globale Minimum $f(p) = -2\,e$ sowie in $q = (1, 1)$ das globale Maximum $f(q) = 2\,e$ annimmt.

7.10 Auf dem abgeschlossenen 1. Quadranten

$$D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \ \text{ und } \ y \geq 0\big\}$$

ist die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \big(x^2 + y^2\big) \cdot \exp(-x - y),$$

gegeben.

a) Die Funktion f ist als Produkt einer quadratischen Funktion und der Verkettung der Exponentialfunktion mit einer linearen Funktion (beliebig oft) partiell differenzierbar, und für alle $(x, y) \in D$ mit $x > 0$ und $y > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) &= 2\,x \cdot \exp(-x - y) + \big(x^2 + y^2\big) \cdot (\exp(-x - y) \cdot (-1)) \\ &= \big(2\,x - \big(x^2 + y^2\big)\big) \cdot \exp(-x - y) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \partial_y f(x, y) &= 2\,y \cdot \exp(-x - y) + \big(x^2 + y^2\big) \cdot (\exp(-x - y) \cdot (-1)) \\ &= \big(2\,y - \big(x^2 + y^2\big)\big) \cdot \exp(-x - y). \end{aligned}$$

Für einen kritischen Punkt (x, y) von f gilt

$$\partial_x f(x, y) = 0 \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(x, y) = 0,$$

wegen $\exp(-x-y) > 0$ also

$$2\,x - \left(x^2+y^2\right) = 0 \qquad \text{und} \qquad 2\,y - \left(x^2+y^2\right) = 0,$$

woraus wegen

$$2\,x = x^2 + y^2 = 2\,y$$

zunächst $x = y$ und wegen

$$0 = 2\,y - \left(x^2+y^2\right) = 2\,y - 2\,y^2 = 2\,y \cdot (1-y) \quad \text{mit} \quad y \neq 0$$

dann $1 - y = 0$, also $(x, y) = (1, 1)$ folgt. Die Probe

$$\partial_x f(1,1) = 0 \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(1,1) = 0$$

bestätigt, daß $(1, 1)$ tatsächlich ein kritischer Punkt von f ist.

b) Für alle $(x, y) \in D$ gilt

$$f(x,y) = \underbrace{\left(x^2+y^2\right)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\exp(-x-y)}_{>0} \geq 0 = f(0,0),$$

so daß f in $(0, 0)$ das globale Minimum 0 annimmt. Jeder Punkt $(x, y) \in D$ mit $(x, y) \neq (0, 0)$ liegt nun auf (genau) einer Geraden $x + y = a$ mit $a > 0$. Zur Bestimmung des globalen Maximums betrachten wir daher das Verhalten von f auf dem in D liegenden Stück der Geraden $x + y = a$ mit $a > 0$, also auf den Punkten

$$\{(t, a-t) \mid 0 \leq t \leq a\},$$

und erhalten

$$\begin{aligned} f(t,a-t) &= \left(t^2 + (a-t)^2\right) \cdot \exp(-t-(a-t)) \\ &= \left(t^2 + \left(a^2 - 2at + t^2\right)\right) \cdot \exp(-t-a+t) \\ &= \left(2t^2 - 2at + a^2\right) \cdot \exp(-a) \\ &= 2\exp(-a) \cdot \left(t^2 - at + \tfrac{1}{2}a^2\right) \\ &= 2\exp(-a) \cdot \left(\underbrace{\left(t - \tfrac{1}{2}\,a\right)^2}_{\geq 0} + \tfrac{1}{4}\,a^2 \right); \end{aligned}$$

dies stellt eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitel bei $t = \frac{1}{2}\,a$ dar, die damit ihren maximalen Wert an den beiden dazu symmetrisch liegenden Randpunkten $t = 0$ und $t = a$ annimmt, und es ergibt sich

$$f(t, a-t) \leq f(a,0) = f(0,a) = a^2 \exp(-a) \qquad \text{für alle} \quad t \in [0, a]\,.$$

Die sich ergebende Hilfsfunktion

$$h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad h(a) = a^2 \cdot \exp(-a),$$

ist (als Produkt einer quadratischen Funktion und einer Exponentialfunktion) differenzierbar, und für alle $a > 0$ gilt

$$h'(a) = 2\,a \cdot \exp(-a) + a^2 \cdot (\exp(-a) \cdot (-1)) = (2-a) \cdot a \cdot \exp(-a);$$

wegen

$$h'(a) = \underbrace{(2-a)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{a}_{>0} \cdot \underbrace{\exp(-a)}_{>0} \geq 0$$

für alle $a \in]0,2]$ ist h auf $]0,2]$ monoton wachsend, und wegen

$$h'(a) = \underbrace{(2-a)}_{\leq 0} \cdot \underbrace{a}_{>0} \cdot \underbrace{\exp(-a)}_{>0} \leq 0$$

für alle $a \in [2,+\infty[$ ist h auf $[2,+\infty[$ monoton fallend, woraus sich

$$h(a) \leq h(2) = 2^2 \cdot \exp(-2) = 4\,e^{-2} \qquad \text{für alle} \quad a > 0$$

ergibt. Zusammenfassend erhält man für alle $(x,y) \in D$ mit $(x,y) \neq (0,0)$ also

$$f(x,y) \underset{a=x+y}{\overset{t=x}{=}} f(t,a-t) \leq f(a,0) = h(a) \leq h(2) = 4\,e^{-2};$$

wegen $f(2,0) = f(0,2) = 4\,e^{-2}$; nimmt f in den Punkten $(2,0)$ und $(0,2)$ das globale Maximum $4\,e^{-2}$ an.

7.11 a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = e^{xy} + x^2 + y^2,$$

ist als Summe und Komposition der Exponentialfunktion und quadratischer Funktionen beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\partial_x f(x,y) = e^{xy} \cdot y + 2\,x \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(x,y) = e^{xy} \cdot x + 2\,y,$$

also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(e^{xy}\,y + 2\,x,\ e^{xy}\,x + 2\,y\right),$$

sowie

$$\partial_x \partial_x f(x,y) = e^{xy} \cdot y^2 + 2 \qquad \text{und} \qquad \partial_y \partial_y f(x,y) = e^{xy} \cdot x^2 + 2$$

und unter Verwendung des Satzes von Schwarz

$$\partial_x \partial_y f(x,y) = \partial_y \partial_x f(x,y) = (e^{xy} \cdot x) \cdot y + e^{xy} \cdot 1 = e^{xy}\,(xy+1)\,,$$

also

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{xy}\,y^2 + 2 & e^{xy}\,(xy+1) \\ e^{xy}\,(xy+1) & e^{xy}\,x^2 + 2 \end{pmatrix}.$$

Für einen kritischen Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ von f gilt

$$\partial_x f(x,y) = 0 \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(x,y) = 0,$$

also

$$e^{xy}\,y + 2\,x = 0 \qquad \text{und} \qquad e^{xy}\,x + 2\,y = 0;$$

wegen

$$e^{xy}\,x\,y + 2\,x^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad e^{xy}\,x\,y + 2\,y^2 = 0$$

ergibt sich

$$2\,x^2 = -e^{xy}\,x\,y = 2\,y^2, \qquad \text{also} \qquad x^2 = y^2,$$

und damit $x = y$ oder $x = -y$. Im Falle $x = y$ folgt

$$0 = e^{y^2}\,y + 2\,y = \underbrace{\left(e^{y^2} + 2\right)}_{>0} \cdot y, \quad \text{also} \quad y = 0 \quad \text{mit} \quad x = 0,$$

und im Fall $x = -y$ ist

$$0 = e^{-y^2}\,y - 2\,y = \underbrace{\left(\overbrace{e^{-y^2}}^{\leq 0} - 2\right)}_{<0} \cdot y, \quad \text{also} \quad y = 0 \quad \text{mit} \quad x = 0,$$

so daß lediglich $(0,0)$ als kritischer Punkt von f in Frage kommt; wegen

$$\partial_x f(0,0) = e^0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0 \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(x,y) = e^0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$$

ist $(0,0)$ tatsächlich ein kritischer Punkt von f, und f besitzt genau einen kritischen Punkt, nämlich $(0,0)$.

b) Die Hessematrix von f im kritischen Punkt $(0,0)$ ist

$$H = \operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2};$$

wegen $\det(H) = 3 > 0$ und $\operatorname{Spur}(H) = 4 > 0$ ist H positiv definit, und damit besitzt f in $(0,0)$ ein (isoliertes) lokales Minimum.

7.12 Zu betrachten ist die Menge

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2\pi \;\text{ und }\; \cos x \leq y \leq \sin x\right\};$$

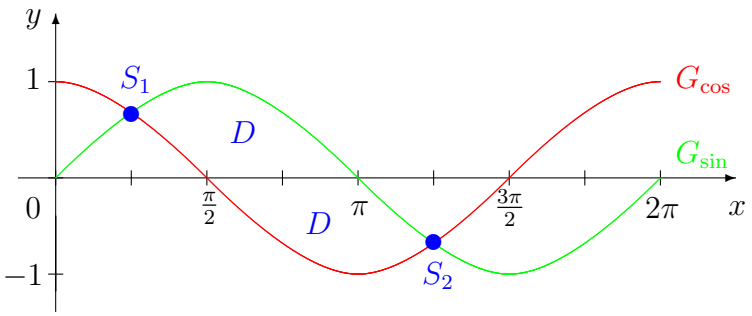
wegen

$$\cos x = \sin x \iff 1 = \tan x \iff x \in \left\{\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{5\pi}{4}\right\}$$

für alle $x \in [0; 2\,\pi]$ besitzen die beiden Graphen $G_{\cos}$ und $G_{\sin}$ in diesem Bereich genau die beiden Schnittpunkte $S_1 = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ und $S_2 = \left(\frac{5\pi}{4}; -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$, und wegen

$$\cos x \leq \sin x \iff x \in \left[\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{5\pi}{4}\right]$$

ist $D \subseteq \mathbb{R}^2$ genau der abgeschlossene Bereich, der von den Graphen $G_{\cos}$ und $G_{\sin}$ zwischen ihren Schnittpunkten S_1 und S_2 begrenzt wird:



Für alle $(x,y) \in D$ gilt

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= (y-\sin x)\,(y-\cos x) \\
&= y^2 - (\sin x + \cos x)\,y + \sin x\,\cos x \\
&= \left(y^2 - 2\cdot\frac{\sin x+\cos x}{2}\cdot y + \left(\frac{\sin x+\cos x}{2}\right)^2\right) + \\
&\qquad + \sin x\,\cos x - \left(\frac{\sin x+\cos x}{2}\right)^2 \\
&= \left(y - \frac{\sin x+\cos x}{2}\right)^2 + \sin x\,\cos x - \frac{\sin^2 x + 2\,\sin x\,\cos x + \cos^2 x}{4} \\
&= \left(y - \frac{\sin x+\cos x}{2}\right)^2 + \frac{2\,\sin x\,\cos x}{4} - \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{4} \\
&= \underbrace{\left(y - \frac{\sin x+\cos x}{2}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{\sin(2x)}{4}}_{\geq -\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} \;\geq\; 0 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

mit

$$f\left(\tfrac{3}{4}\pi, 0\right) = \big(0 - \underbrace{\sin\tfrac{3}{4}\pi}_{=\frac{1}{2}\sqrt{2}}\big)\big(0 - \underbrace{\cos\tfrac{3}{4}\pi}_{=-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\big) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2} = -\tfrac{1}{2},$$

also

$$f(x,y) \geq -\tfrac{1}{2} = f\left(\tfrac{3}{4}\pi, 0\right),$$

so daß $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$ eine globale Minimalstelle der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist.

7.13 a) Für die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \ln\left(x^2 + (y-1)^2 + 1\right),$$

sind die Niveaumengen

$$N_f(c) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\right\}$$

für $c = 0$, $c = 1$ und $c = \ln 4$ zu betrachten:

- Für $c = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
f(x,y) = 0 &\iff \ln\left(x^2 + (y-1)^2 + 1\right) = 0 \\
&\iff x^2 + (y-1)^2 + 1 = 1 \iff x^2 + (y-1)^2 = 0 \\
&\iff \big(x = 0 \text{ und } y - 1 = 0\big) \iff (x,y) = (0,1)
\end{aligned}$$

  für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, so daß $N_f(0)$ nur aus dem Punkt $(0,1)$ besteht.

- Für $c = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
f(x,y) = 1 &\iff \ln\left(x^2 + (y-1)^2 + 1\right) = 1 \\
&\iff x^2 + (y-1)^2 + 1 = e \iff x^2 + (y-1)^2 = e - 1
\end{aligned}$$

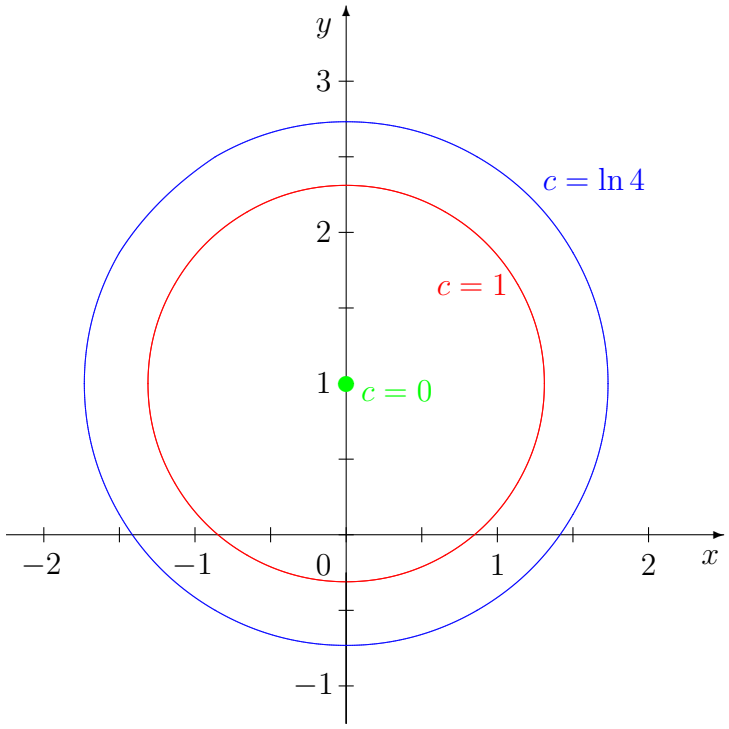
  für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, so daß $N_f(1)$ die Kreislinie mit dem Mittelpunkt $(0,1)$ und dem Radius $\sqrt{e-1}$ darstellt.

- Für $c = \ln 4$ ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x,y) = \ln 4 &\iff \ln\left(x^2 + (y-1)^2 + 1\right) = \ln 4 \\ &\iff x^2 + (y-1)^2 + 1 = 4 \iff x^2 + (y-1)^2 = 3 \end{aligned}$$

  für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, so daß $N_f(1)$ die Kreislinie mit dem Mittelpunkt $(0,1)$ und dem Radius $\sqrt{3}$ darstellt.

Damit ergibt sich für die drei Niveaumengen die folgende Skizze:



b) Die auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierte Funktion f ist als Komposition des natürlichen Logarithmus und einer quadratischen Funktion partiell differenzierbar, so daß als lokale Extremstellen lediglich die kritischen Punkte von f in Frage kommen; für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt dabei

$$\partial_x f(x,y) = \frac{1}{x^2 + (y-1)^2 + 1} \cdot (2\,x)$$

mit

$$\partial_x f(x,y) = 0 \iff 2\,x = 0 \iff x = 0$$

sowie

$$\partial_y f(x,y) = \frac{1}{x^2 + (y-1)^2 + 1} \cdot (2\,(y-1))$$

mit

$$\partial_y f(x,y) = 0 \iff 2\,(y-1) = 0 \iff y = 1,$$

so daß $(0,1)$ der einzige kritische Punkt und damit der einzige Kandidat für eine Extremstelle von f ist. Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\underbrace{x^2}_{\geq 0} + \underbrace{(y-1)^2}_{\geq 0} + 1 \geq 1,$$

woraus mit dem Montonieverhalten des natürlichen Logarithmus

$$f(x,y) = \ln\left(x^2 + (y-1)^2 + 1\right) \geq \ln 1 = 0 \underset{\text{a)}}{=} f(0,1)$$

folgt; damit besitzt f in $(0,1)$ ein globales Minimum.

7.14 Die gegebene Polynomfunktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 2\,x^2 + 2\,y^2 - 4\,x\,y - x^4 - y^4,$$

ist beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\partial_x f(x,y) = 4\,x - 4\,y - 4\,x^3 \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(x,y) = 4\,y - 4\,x - 4\,y^3,$$

also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(4\,x - 4\,y - 4\,x^3,\ 4\,y - 4\,x - 4\,y^3\right),$$

sowie

$$\partial_x \partial_x f(x,y) = 4 - 12\,x^2 \qquad \text{und} \qquad \partial_y \partial_y f(x,y) = 4 - 12\,y^2$$

und

$$\partial_y \partial_x f(x,y) = -4 = \partial_x \partial_y f(x,y),$$

also

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 - 12\,x^2 & -4 \\ -4 & 4 - 12\,y^2 \end{pmatrix}.$$

Als lokale Extremstellen der auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierten und partiell differenzierbaren Funktion f kommen lediglich ihre kritischen Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$ in Frage: wegen

$$\partial_x f(x,y) = 0 \iff 4\,x - 4\,y - 4\,x^3 = 0 \iff x - y = x^3$$

und

$$\partial_y f(x,y) = 0 \iff 4\,y - 4\,x - 4\,y^3 = 0 \iff y - x = y^3$$

erhält man durch Summenbildung

$$0 = x^3 + y^3, \quad \text{also} \quad y^3 = -x^3 = (-x)^3, \quad \text{und damit} \quad y = -x,$$

woraus etwa mit der ersten Beziehung

$$0 = 4\,x - 4\,(-x) - 4\,x^3 = -4\,x\left(x^2 - 2\right) = -4\,x\,(x - \sqrt{2})\,(x + \sqrt{2})$$

und damit $x = 0$ (mit $y = 0$) oder $x = \sqrt{2}$ (mit $y = -\sqrt{2}$) oder $x = -\sqrt{2}$ (mit $y = \sqrt{2}$) ergibt. Als Kandidaten für kritische Punkte von f erhalten wir also $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ und $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, die wir nun mit Hilfe der Hessematrix untersuchen:

- Es ist $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$ und

$$H_0 = \operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix};$$

wegen $\det(H_0) = 0$ ist über die Hessematrix keine Aussage über die kritische Stelle $(0,0)$ möglich. Es ist $f(0,0) = 0$, und wir betrachten das Verhalten von f auf den beiden Winkelhalbierenden: wegen

$$f(t,t) = 2\,t^2 + 2\,t^2 - 4\,t\cdot t - t^4 - t^4 = -2\,t^4 < 0$$

für alle $t \neq 0$ besitzt f in jeder Umgebung von $(0,0)$ negative Funktionwerte, und wegen

$$f(t,-t) = 2\,t^2 + 2\,(-t)^2 - 4\,t\,(-t) - t^4 - (-t)^4 = \\ = 8\,t^2 - 2\,t^4 = \underbrace{2\,t^2}_{>0}\cdot\underbrace{\left(4 - t^2\right)}_{>0} > 0$$

für alle t mit $0 < |t| < 2$ besitzt f in jeder Umgebung von $(0,0)$ positive Funktionswerte; damit kann f in $(0,0)$ kein lokales Extremum besitzen.

- Es ist $\operatorname{grad} f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = (0,0)$ und

$$H_1 = \operatorname{Hess} f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -20 & -4 \\ -4 & -20 \end{pmatrix};$$

wegen $\det(H) = 384 > 0$ und $\operatorname{Spur}(H) = -40 < 0$ ist H negativ definit, und f besitzt in $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ ein (isoliertes) lokales Maximum.

- Es ist $\operatorname{grad} f(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = (0,0)$ und

$$H_2 = \operatorname{Hess} f(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -20 & -4 \\ -4 & -20 \end{pmatrix};$$

es ist $H_2 = H_1$ negativ definit, und f besitzt in $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ ein (isoliertes) lokales Maximum.

7.15 Die gegebene Polynomfunktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^3 + y^3 - 3\,x\,y,$$

ist beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\partial_x f(x,y) = 3\,x^2 - 3\,y \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(x,y) = 3\,y^2 - 3\,x,$$

also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(3\,x^2 - 3\,y,\ 3\,y^2 - 3\,x\right),$$

sowie

$$\partial_x\partial_x f(x,y) = 6\,x \qquad \text{und} \qquad \partial_y\partial_y f(x,y) = 6\,y$$

und

$$\partial_y\partial_x f(x,y) = -3 = \partial_x\partial_y f(x,y),$$

also

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6\,x & -3 \\ -3 & 6\,y \end{pmatrix}.$$

Als lokale Extremstellen der auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierten und partiell differenzierbaren Funktion f kommen lediglich ihre kritischen Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$ in Frage: wegen

$$\partial_x f(x,y) = 0 \iff 3\,x^2 - 3\,y = 0 \iff x^2 = y$$

und

$$\partial_y f(x,y) = 0 \iff 3\,y^2 - 3\,x = 0 \iff y^2 = x$$

erhält man durch Einsetzen

$$x = y^2 = (x^2)^2 = x^4, \quad \text{also} \quad 0 = x^4 - x = x \cdot \left(x^3 - 1\right),$$

woraus $x = 0$ (mit $y = 0$) oder $x^3 = 1$, also $x = 1$ (mit $y = 1$) folgt. Als Kandidaten für kritische Punkte von f erhalten wir also $(0,0)$ und $(1,1)$, die wir nun mit Hilfe der Hessematrix untersuchen:

- Es ist $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$ und

  $$H_1 = \operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix};$$

  wegen $\det(H_1) = -9 < 0$ ist H_1 indefinit, und f besitzt in $(0,0)$ einen Sattelpunkt, insbesondere also kein lokales Extremum.

- Es ist $\operatorname{grad} f(1,1) = (0,0)$ und

  $$H_2 = \operatorname{Hess} f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix};$$

  wegen $\det(H_2) = 27 > 0$ und $\operatorname{Spur}(H_2) = 12 > 0$ ist H_2 positiv definit, und f besitzt in $(1,1)$ ein (isoliertes) lokales Minimum.

7.16 a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(r) = e^{-r^2} + r^2,$$

ist als Summe und Komposition der Exponentialfunktion und quadratischer Funktionen stetig und (beliebig oft) differenzierbar, und für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(r) = e^{-r^2} \cdot (-2\,r) + 2\,r = 2\,r\left(1 - e^{-r^2}\right).$$

Für alle $r \neq 0$ ist $r^2 > 0$, also $-r^2 < 0$, und unter Verwendung des Monotonieverhaltens der Exponentialfunktion damit

$$e^{-r^2} < e^0 = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad 1 - e^{-r^2} > 0,$$

woraus sich

$$f'(r) = 2\,r \cdot \underbrace{\left(1 - e^{-r^2}\right)}_{>0} \begin{cases} > 0, & \text{für } r > 0, \\ < 0, & \text{für } r < 0, \end{cases}$$

ergibt; damit ist die stetige Funktion f auf $]-\infty;0]$ streng monoton fallend und auf $[0;+\infty[$ streng monoton wachsend, besitzt also genau eine globale Extremstelle, nämlich ein globales Minimum in $r = 0$ mit $f(0) = 1$.

b) Die gegebene Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = e^{-x^2-y^2} + x^2 + y^2,$$

ist als Summe und Komposition der Exponentialfunktion und quadratischer Funktionen beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\partial_x g(x,y) = e^{-x^2-y^2} \cdot (-2\,x) + 2\,x = 2\,x\left(1 - e^{-x^2-y^2}\right)$$

und

$$\partial_y g(x,y) = e^{-x^2-y^2} \cdot (-2\,y) + 2\,y = 2\,y\left(1 - e^{-x^2-y^2}\right)$$

sowie

$$\begin{aligned} \partial_x \partial_x g(x,y) &= 2\left(1 - e^{-x^2-y^2}\right) + 2\,x\left(-e^{-x^2-y^2} \cdot (-2\,x)\right) \\ &= 2\left(1 - e^{-x^2-y^2}\right) + 4\,x^2\,e^{-x^2-y^2}, \end{aligned}$$

entsprechend

$$\begin{aligned} \partial_y \partial_y g(x,y) &= 2\left(1 - e^{-x^2-y^2}\right) + 2\,y\left(-e^{-x^2-y^2} \cdot (-2\,y)\right) \\ &= 2\left(1 - e^{-x^2-y^2}\right) + 4\,y^2\,e^{-x^2-y^2}, \end{aligned}$$

und unter Verwendung des Satzes von Schwarz

$$\partial_x \partial_y g(x,y) = \partial_y \partial_x g(x,y) = 2\,x\left(-e^{-x^2-y^2} \cdot (-2\,y)\right) = 4\,x\,y\,e^{-x^2-y^2}.$$

Für einen kritischen Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ von g gilt

$$\partial_x g(x,y) = 0 \qquad \text{und} \qquad \partial_y g(x,y) = 0;$$

wegen

$$\begin{aligned} 1 - e^{-x^2-y^2} = 0 \iff e^{-x^2-y^2} = 1 \iff -x^2 - y^2 = 0 \iff \\ \iff x^2 + y^2 = 0 \iff \big(x = 0 \quad \text{und} \quad y = 0\big) \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \partial_x g(x,y) = 0 \iff 2\,x\left(1 - e^{-x^2-y^2}\right) = 0 \iff \\ \iff \big(x = 0 \quad \text{oder} \quad 1 - e^{-x^2-y^2} = 0\big) \iff x = 0 \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} \partial_y g(x,y) = 0 \iff 2\,y\left(1 - e^{-x^2-y^2}\right) = 0 \iff \\ \iff \big(y = 0 \quad \text{oder} \quad 1 - e^{-x^2-y^2} = 0\big) \iff y = 0. \end{aligned}$$

Damit besitzt g genau einen kritischen Punkt, nämlich $(0,0)$, und es gilt

$$\operatorname{Hess} g(0,0) = \begin{pmatrix} \partial_x \partial_y g(0,0) & \partial_x \partial_y g(0,0) \\ \partial_y \partial_x g(0,0) & \partial_y \partial_y g(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Als globale Extremstelle der partiell differenzierbaren und auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierten Funktion g kommt nur ihr kritischer Punkt $(0,0)$ mit

$$g(0,0) = e^{-0^2-0^2} + 0^2 + 0^2 = e^0 = 1$$

in Frage. Für einen Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir seine Polarkoordinaten $x = r\,\cos\varphi$ und $y = r\,\sin\varphi$ mit $r \in \mathbb{R}_0^+$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ und erhalten

$$x^2 + y^2 = (r\,\cos\varphi)^2 + (r\,\sin\varphi)^2 = r^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = r^2$$

und damit

$$g(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} + \left(x^2+y^2\right) = e^{-r^2} + r^2 = f(r) \underset{\text{a)}}{\geq} f(0) = 1 = g(0,0);$$

folglich besitzt g in $(0,0)$ ein globales Minimum.

7.17 a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x\,y\,\exp(x-y),$$

ist als Produkt und Verknüpfung linearer Funktionen und der Exponentialfunktion partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned}\partial_x f(x,y) &= y \cdot \exp(x-y) + x\,y \cdot (\exp(x-y)\cdot 1) = \\ &= (y + x\,y)\exp(x-y) = y\,(1+x)\,\exp(x-y)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\partial_y f(x,y) &= x \cdot \exp(x-y) + x\,y \cdot (\exp(x-y)\cdot(-1)) = \\ &= (x - x\,y)\exp(x-y) = x\,(1-y)\,\exp(x-y),\end{aligned}$$

insgesamt also

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(x,y) &= (\partial_x f(x,y),\ \partial_y f(x,y)) = \\ &= \big(y\,(1+x)\,\exp(x-y),\ x\,(1-y)\,\exp(x-y)\big).\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}\partial_x f(x,y) = 0 &\iff y\,(1+x)\,\underbrace{\exp(x-y)}_{>0} = 0 \iff \\ &\iff \big(y = 0 \ \text{ oder } \ 1 + x = 0\big) \iff \big(y = 0 \ \text{ oder } \ x = -1\big)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\partial_y f(x,y) = 0 &\iff x\,(1-y)\,\underbrace{\exp(x-y)}_{>0} = 0 \iff \\ &\iff \big(x = 0 \ \text{ oder } \ 1 - y = 0\big) \iff \big(x = 0 \ \text{ oder } \ y = 1\big)\end{aligned}$$

ergibt sich

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) \iff \big((x,y) = (0,0) \ \text{ oder } \ (x,y) = (-1,1)\big).$$

b) Die gegebene Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist sogar beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned}\partial_x \partial_x f(x,y) &= y \cdot \exp(x-y) + y\,(1+x) \cdot (\exp(x-y) \cdot 1) = \\ &= (y + y(1+x)) \exp(x-y) = y\,(2+x) \exp(x-y)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\partial_y \partial_y f(x,y) &= -x \cdot \exp(x-y) + x\,(1-y) \cdot (\exp(x-y) \cdot (-1)) = \\ &= (-x - x\,(1-y)) \exp(x-y) = x\,(y-2) \exp(x-y)\end{aligned}$$

sowie unter Verwendung des Satzes von Schwarz

$$\begin{aligned}\partial_x \partial_y f(x,y) &= \partial_y \partial_x f(x,y) = \\ &= (1+x) \cdot \exp(x-y) + y\,(1+x) \cdot (\exp(x-y) \cdot (-1)) = \\ &= ((1+x) - y\,(1+x)) \exp(x-y) = (1+x)\,(1-y) \exp(x-y),\end{aligned}$$

und wir erhalten die Hessematrix

$$\begin{aligned}\operatorname{Hess} f(x,y) &= \begin{pmatrix} \partial_x \partial_x f(x,y) & \partial_x \partial_y f(x,y) \\ \partial_y \partial_x f(x,y) & \partial_y \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} y\,(2+x) \exp(x-y) & (1+x)\,(1-y) \exp(x-y) \\ (1+x)\,(1-y) \exp(x-y) & x\,(y-2) \exp(x-y) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Als lokale Extremstellen der partiell differenzierbaren und auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierten Funktion f kommen nur ihre kritischen Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{grad} f(x, y) = (0, 0)$, gemäß a) also $(0, 0)$ und $(-1, 1)$, in Frage.

- Die Hessematrix
$$\operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
ist wegen $\det \operatorname{Hess} f(0, 0) = -1 < 0$ indefinit; damit besitzt f in $(0, 0)$ einen Sattelpunkt, insbesondere also kein lokales Extremum.
- Die Hessematrix
$$\operatorname{Hess} f(-1,1) = \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix}$$
besitzt den doppelten Eigenwert $e^{-2} > 0$ und ist demnach positiv definit; damit besitzt f in $(-1, 1)$ ein (isoliertes) lokales Minimum.

7.18 a) Die Nullstellenmenge N_f der gegebenen Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 \left(x^2 + y^2 - 2\right),$$

besteht wegen

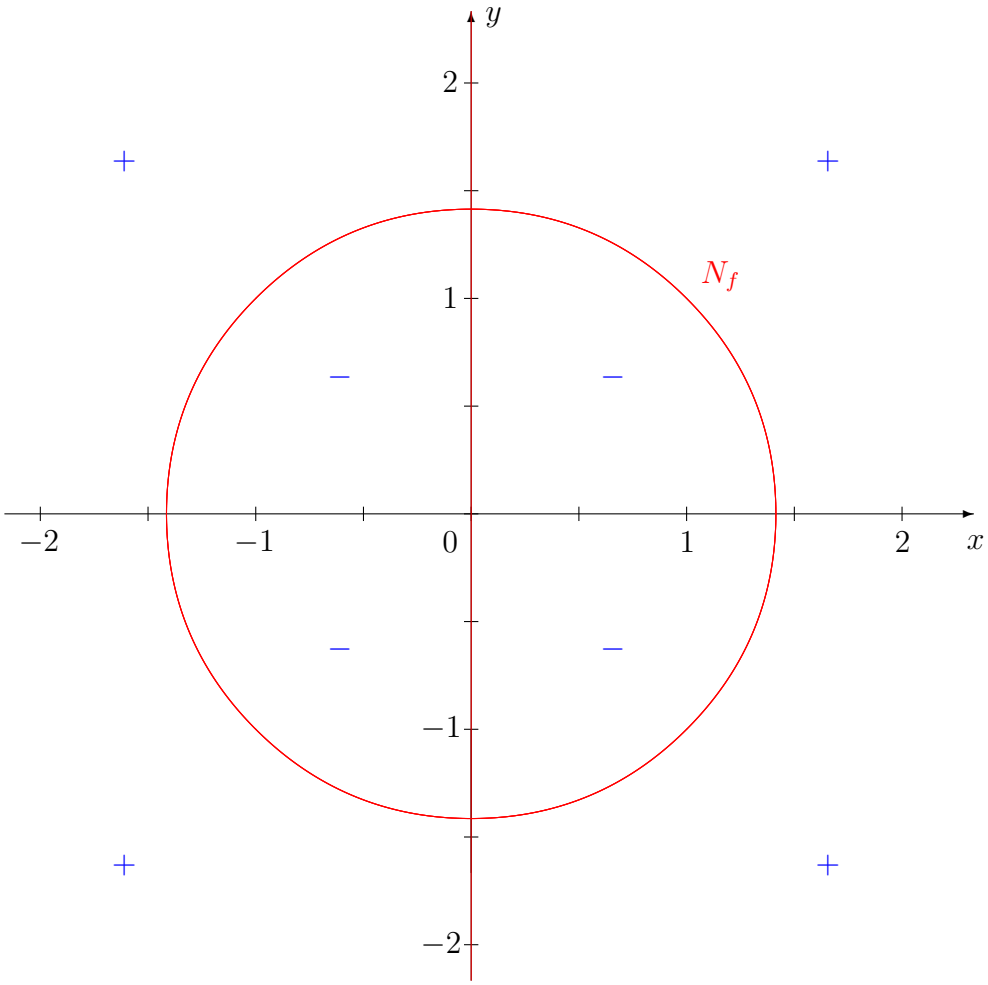
$$\begin{aligned}&f(x,y) = 0 \iff x^2 \left(x^2 + y^2 - 2\right) = 0 \iff \\ &\quad \iff x^2 = 0 \text{ oder } x^2 + y^2 - 2 = 0 \iff x = 0 \text{ oder } x^2 + y^2 = 2\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ genau aus der y–Achse $x = 0$ und aus der Kreislinie $x^2 + y^2 = 2$ um den Ursprung mit Radius $r = \sqrt{2}$. Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus N_f$ gilt $x \neq 0$, also $x^2 > 0$, und damit

$$f(x,y) > 0 \iff x^2\left(x^2+y^2-2\right) > 0 \iff$$
$$\iff x^2+y^2-2 > 0 \iff x^2+y^2 > 2$$

sowie

$$f(x,y) < 0 \iff x^2\left(x^2+y^2-2\right) < 0 \iff$$
$$\iff x^2+y^2-2 < 0 \iff x^2+y^2 < 2.$$



b) Die Funktion f ist (als Polynomfunktion) beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt wegen

$$f(x,y) = x^2\left(x^2+y^2-2\right) = x^4 + x^2y^2 - 2x^2$$

zum einen

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(4x^3 + 2xy^2 - 4x,\ 2x^2y\right)$$

und zum anderen

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2+2y^2-4 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}.$$

Damit kommen als lokale Extremstellen von f lediglich die kritischen Stellen von f, also die Nullstellen von grad f in Frage: für alle $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit $a = 0$ ist $\operatorname{grad} f(a,b) = (0,0)$, und für alle $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit $a \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(a,b) = (0,0) &\iff 4a^3 + 2ab^2 - 4a = 0 \text{ und } 2a^2b = 0 \\ &\iff 2a^2 + b^2 - 2 = 0 \text{ und } b = 0 \\ &\iff a^2 = 1 \text{ und } b = 0 \\ &\iff (a,b) = (\pm 1, 0)\,. \end{aligned}$$

Gemäß der Skizze von a) ergibt sich dabei für alle $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit $a = 0$:

- Für $|b| < \sqrt{2}$ ist $r = \sqrt{2} - |b| > 0$, und für alle $(x,y) \in K_r(0,b)$ gilt $f(x,y) \leq 0 = f(0,b)$; damit besitzt f in $(0,b)$ ein lokales Maximum.
- Für $|b| > \sqrt{2}$ ist $r = |b| - \sqrt{2} > 0$, und für alle $(x,y) \in K_r(0,b)$ gilt $f(x,y) \geq 0 = f(0,b)$; damit besitzt f in $(0,b)$ ein lokales Minimum.
- Für $|b| = \sqrt{2}$ gibt es für jedes $r > 0$ in $K_r(0,b)$ Punkte (x',y') mit $f(x',y') < 0 = f(0,b)$ und Punkte (x'',y'') mit $f(x'',y'') > 0 = f(0,b)$; damit besitzt f in $(0,b)$ kein Extremum.

Des weiteren besitzt

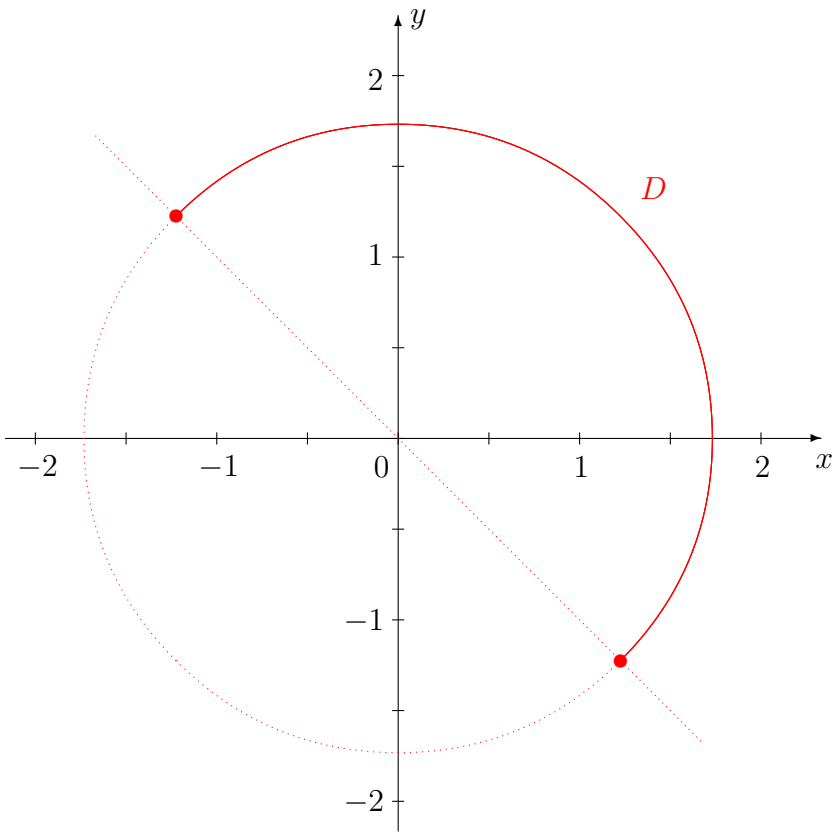
$$\operatorname{Hess} f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

zwei positive Eigenwerte und ist damit positiv definit; folglich besitzt f in $(\pm 1, 0)$ isolierte lokale Minima.

7.19 a) Die gegebene Menge

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 0 \text{ und } x^2 + y^2 = 3\right\}$$

beinhaltet genau diejenigen Punkte der Kreislinie $x^2 + y^2 = 3$ mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und dem Radius $\sqrt{3}$, die auf oder oberhalb der zweiten Winkelhalbierenden $y = -x$ liegen:



b) Die Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ist abgeschlossen und beschränkt, mithin kompakt, und die gegebene Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \exp(x + y),$$

ist als Komposition der Exponentialfunktion und einer linearen Funktion stetig; folglich nimmt die Funktion f nach dem Satz von Weierstraß ihr Maximum und ihr Minimum an.

c) Für einen Punkt $(x, y) \in D$ betrachten wir seine Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\sin\varphi \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{3} \quad \text{und} \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$$

und erhalten

$$f(x, y) = f\left(\sqrt{3}\cos\varphi, \sqrt{3}\sin\varphi\right) = \exp\left(\sqrt{3}\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi\right).$$

Die (als Komposition der Exponenentialfunktion und einer Linearkombination von Cosinus und Sinus) differenzierbare Hilfsfunktion

$$h : \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}, \quad h(\varphi) = \exp\left(\sqrt{3}\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi\right),$$

kann ihre Extrema in den beiden Randpunkten $-\frac{\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4}$ des Definitionsintervalls $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ sowie in den Nullstellen ihrer Ableitung h' mit

$$h'(\varphi) = \exp\left(\sqrt{3}\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi\right) \cdot \left(-\sqrt{3}\sin\varphi + \sqrt{3}\cos\varphi\right)$$

für alle $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ annehmen; dabei gilt

$$\begin{aligned} h'(\varphi) = 0 \iff & \\ \iff \underbrace{\exp\left(\sqrt{3}\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi\right)}_{>0} \cdot \left(-\sqrt{3}\sin\varphi + \sqrt{3}\cos\varphi\right) = 0 \iff & \\ \iff -\sqrt{3}\sin\varphi + \sqrt{3}\cos\varphi = 0 \iff \cos\varphi = \sin\varphi \iff \varphi = \frac{\pi}{4}. & \end{aligned}$$

Damit kommen als globale Extremstellen von f nur die Punkte $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ und $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ sowie $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ in Frage; die Wertetabelle

(x,y)	$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$
$f(x,y)$	1	1	$e^{\sqrt{6}}$

zeigt, daß die Funktion f ihr globales Maximum $e^{\sqrt{6}}$ im Punkt $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ sowie ihr globales Minimum 1 in den Punkten $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ und $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ annimmt.

7.20 Die (als Produkt und Komposition von Polynomfunktionen und der Exponentialfunktion insbesondere) stetige Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} \cdot \left(-x^2 + 1\right),$$

besitzt auf der kompakten Einheitskreisscheibe

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

nach dem Satz von Weierstraß mindestens ein globales Minimum und mindestens ein globales Maximum, es gibt also (a,b) und $(c,d) \in D$ mit

$$f(a,b) \leq f(x,y) \leq f(c,d)$$

für alle $(x,y) \in D$; für die Lage dieser Extremstellen $(p,q) \in D$ gibt es die folgenden beiden Möglichkeiten:

- (p,q) liegt auf dem Rand von D, also auf der Kreislinie $x^2+y^2 = 1$ um $(0,0)$ mit Radius 1; wegen

$$f(p,q) = e^{-(p^2+q^2)} \cdot \left(-p^2 + 1\right) = e^{-1} \cdot q^2$$

kommen hier nur $q = 0$ mit $p = \pm 1$, also $(\pm 1, 0)$, sowie $q = \pm 1$ mit $p = 0$, also $(0, \pm 1)$ in Frage.

- (p,q) liegt im Innern von D, also in der offenen Kreisscheibe $x^2 + y^2 < 1$; da aber f partiell differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) &= \left(e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2\,x)\right) \cdot \left(-x^2 + 1\right) + e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2\,x) \\ &= -2\,x \cdot e^{-(x^2+y^2)} \cdot \left(2 - x^2\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\partial_2 f(x,y) &= \Big(e^{-(x^2+y^2)}\cdot(-2\,y)\Big)\cdot\big(-x^2+1\big)\\ &= -2\,y\cdot e^{-(x^2+y^2)}\cdot\big(1-x^2\big)\end{aligned}$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ist, muß (p,q) dann eine kritische Stelle von f sein, so daß wegen

$$\partial_1 f(p,q)=0 \iff -2\,p\cdot\underbrace{e^{-(p^2+q^2)}}_{>0}\cdot\underbrace{\big(2-p^2\big)}_{>0} \iff p=0$$

und

$$\partial_2 f(p,q)=0 \iff -2\,q\cdot\underbrace{e^{-(p^2+q^2)}}_{>0}\cdot\underbrace{\big(1-q^2\big)}_{>0} \iff q=0$$

kommt hier für (p,q) nur der Punkt $(0,0)$ in Frage.

Der Vergleich der Funktionwerte

(p,q)	$(1,0)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(0,-1)$	$(0,0)$
$f(p,q)$	0	0	e^{-1}	e^{-1}	1

zeigt, daß die Funktion f im Punkt $(0,0)$ ihr Maximum 1 sowie in den Punkten $(1,0)$ und $(-1,0)$ ihr Minimum 0 annimmt.

7.21 Die gegebene Funktion

$$f:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=x^y-y^x=e^{y\ln x}-e^{x\ln y},$$

ist (als Differenz sowie Produkt und Komposition einer linearen Funktion sowie der Exponentialfunktionen und des natürlichen Logarithmus) selbst beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ gilt

$$\partial_1 f(x,y)=e^{y\ln x}\cdot\frac{y}{x}-e^{x\ln y}\cdot\ln y$$

und

$$\partial_2 f(x,y)=e^{y\ln x}\cdot\ln x-e^{x\ln y}\cdot\frac{x}{y};$$

wegen

$$\partial_1 f(e,e)=e^{e\ln e}\cdot\frac{e}{e}-e^{e\ln e}\cdot\ln e=e^e\cdot 1-e^e\cdot 1=0$$

und

$$\partial_2 f(e,e)=e^{e\ln e}\cdot\ln e-e^{e\ln e}\cdot\frac{e}{e}=e^e\cdot 1-e^e\cdot 1=0,$$

also $\operatorname{grad} f(e,e)=(0,0)$, ist (e,e) ein kritischer Punkt von f. Ferner gilt

$$\partial_1\partial_1 f(x,y)=\left(\left(e^{y\ln x}\cdot\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{y}{x}+e^{y\ln x}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right)-e^{x\ln y}\cdot(\ln y)^2$$

und

$$\partial_2\partial_2 f(x,y)=e^{y\ln x}\cdot(\ln x)^2-\left(\left(e^{x\ln y}\cdot\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{x}{y}+e^{x\ln y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right)$$

sowie

$$\partial_2\partial_1 f(x,y) = \left(\left(e^{y\ln x}\cdot\ln x\right)\cdot\frac{y}{x} + e^{y\ln x}\cdot\frac{1}{x}\right) - \\ - \left(\left(e^{x\ln y}\cdot\frac{x}{y}\right)\cdot\ln y + e^{x\ln y}\cdot\frac{1}{y}\right) = \partial_1\partial_2 f(x,y)$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$. Wegen

$$\partial_1\partial_1 f(e,e) = \left(\left(e^{e\ln e}\cdot\frac{e}{e}\right)\cdot\frac{e}{e} + e^{e\ln e}\cdot\left(-\frac{e}{e^2}\right)\right) - e^{e\ln e}\cdot(\ln e)^2 = -e^{e-1}$$

und

$$\partial_2\partial_2 f(e,e) = e^{e\ln e}\cdot(\ln e)^2 - \left(\left(e^{e\ln e}\cdot\frac{e}{e}\right)\cdot\frac{e}{e} + e^{e\ln e}\cdot\left(-\frac{e}{e^2}\right)\right) = e^{e-1}$$

sowie

$$\partial_1\partial_2 f(e,e) = \partial_2\partial_1 f(e,e) = \\ = \left(\left(e^{e\ln e}\cdot\ln e\right)\cdot\frac{e}{e} + e^{e\ln e}\cdot\frac{1}{e}\right) - \left(\left(e^{e\ln e}\cdot\frac{e}{e}\right)\cdot\ln e + e^{e\ln e}\cdot\frac{1}{e}\right) = 0$$

besitzt die Hessematrix von f im Punkt (e,e) die Diagonalgestalt

$$\operatorname{Hess} f(e,e) = \begin{pmatrix}\partial_1\partial_1 f(e,e) & \partial_1\partial_2 f(e,e)\\ \partial_2\partial_1 f(e,e) & \partial_2\partial_2 f(e,e)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-e^{e-1} & 0\\ 0 & e^{e-1}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$$

mit dem positiven Eigenwert e^{e-1} und dem negativen Eigenwert $-e^{e-1}$; folglich ist $\operatorname{Hess} f(e,e)$ indefinit, und f besitzt in (e,e) einen Sattelpunkt, insbesondere also weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum.

7.22 Die zu betrachtende Menge

$$W = \left\{e^{-(x+y)}\left(x^2+y^2+xy-3\right) \mid x,\ y\geq 0\right\}$$

ist genau der Wertebereich der Funktion

$$f: D\to\mathbb{R},\quad f(x,y) = e^{-(x+y)}\left(x^2+y^2+xy-3\right),$$

mit dem Definitionsbereich $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0 \text{ und } y\geq 0\}$.

Zunächst gilt für alle $(x,y)\in D$ wegen $x\geq 0$ und $y\geq 0$

- zum einen $-3\leq x^2+y^2+xy-3$ und damit wegen $e^{-(x+y)}>0$ auch

$$-3\cdot e^{-(x+y)}\leq e^{-(x+y)}\left(x^2+y^2+xy-3\right),$$

- und zum anderen $-(x+y)\leq 0$ und damit $e^{-(x+y)}\leq e^0 = 1$, und damit

$$-3\cdot e^{-(x+y)}\geq -3\cdot 1 = -3,$$

zusammen demnach

$$f(0,0) = -3 \leq e^{-(x+y)} \left(x^2 + y^2 + xy - 3\right) = f(x,y);$$

folglich ist

$$-3 = \min W = \inf W.$$

Jeder Punkt $(x,y) \in D$ mit $(x,y) \neq (0,0)$ liegt nun auf (genau) einer Geraden $x + y = a$ mit $a > 0$. Zur Bestimmung von $\sup W$ betrachten wir daher das Verhalten von f auf dem in D liegenden Stück der Geraden $x + y = a$ mit $a > 0$, also auf den Punkten

$$\{(t; a-t) \mid 0 \leq t \leq a\},$$

und erhalten

$$\begin{aligned} f(t;a-t) &= e^{-(t+(a-t))} \left(t^2 + (a-t)^2 + t(a-t) - 3\right) \\ &= e^{-a} \left(t^2 + a^2 - 2at + t^2 + ta - t^2 - 3\right) \\ &= e^{-a} \left(t^2 - at + a^2 - 3\right) \\ &= e^{-a} \Bigg(\underbrace{\left(t - \tfrac{1}{2}\,a\right)^2}_{\geq 0} + \tfrac{3}{4}\,a^2 - 3 \Bigg); \end{aligned}$$

dies stellt eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitel bei $t = \frac{1}{2}\,a$ dar, die damit ihren maximalen Wert an den beiden dazu symmetrisch liegenden Randpunkten $t = 0$ und $t = a$ annimmt, und es ergibt sich

$$f(t, a-t) \leq f(a,0) = e^{-a} \left(a^2 - 3\right) \qquad \text{für alle} \quad t \in [0;a]\,.$$

Die sich ergebende Hilfsfunktion

$$h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad h(a) = e^{-a} \left(a^2 - 3\right),$$

ist (als Produkt einer Exponentialfunktion und einer quadratischen Funktion) differenzierbar, und für alle $a > 0$ gilt

$$h'(a) = -e^{-a} \left(a^2 - 3\right) + e^{-a} \cdot 2\,a = -e^{-a} \left(a^2 - 2\,a - 3\right) = -e^{-a}\,(a-3)\,(a+1)\,;$$

wegen

$$h'(a) = \underbrace{-e^{-a}}_{<0} \cdot \underbrace{(a-3)}_{\leq 0} \cdot \underbrace{(a+1)}_{>0} \geq 0$$

für alle $a \in \,]0;3]$ ist h auf $]0;3]$ monoton wachsend, und wegen

$$h'(a) = \underbrace{-e^{-a}}_{<0} \cdot \underbrace{(a-3)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(a+1)}_{>0} \leq 0$$

für alle $a \in [3;+\infty[$ ist h auf $[3;+\infty[$ monoton fallend, woraus sich

$$h(a) \leq h(3) = e^{-3} \left(3^3 - 3\right) = 6\,e^{-3} \qquad \text{für alle} \quad a > 0$$

ergibt. Zusammenfassend erhält man für alle $(x,y) \in D$ mit $(x,y) \neq (0,0)$ also

$$f(x,y) \underset{a=x+y}{\overset{t=x}{=}} f(t, a-t) \leq f(a,0) = h(a) \leq h(3) = 6\,e^{-3}$$

mit

$$f(3,0) = e^{-(3+0)}\left(3^2 + 0^2 + 3\cdot 0 - 3\right) = e^{-3}\cdot 6 = 6\,e^{-3};$$

folglich ist

$$6\,e^{-3} = \max W = \sup W.$$

7.23 Die Einheitskreisscheibe

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\right\}$$

ist eine sowohl abgeschlossene als auch beschränkte und damit kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$; darüber hinaus ist die Funktion

$$f : M \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 - x + 2\,y^2,$$

als Polynomfunktion insbesondere stetig. Nach dem Satz von Weierstraß besitzt damit die stetige Funktion f auf der kompakten Menge M eine globale Minimalstelle $(p_1,q_1) \in M$ und eine globale Maximalstelle $(p_2,q_2) \in M$, für alle $(x,y) \in M$ gilt also $f(p_1,q_1) \le f(x,y) \le f(p_2,q_2)$.

Die Polynomfunktion f ist insbesondere partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in M$ gilt

$$\partial_1 f(x,y) = 2\,x - 1 \qquad \text{und} \qquad \partial_2 f(x,y) = 4\,y.$$

Damit kommen für globale Extremstellen $(p,q) \in M$ nur die beiden folgenden Fälle in Frage:

- Der Punkt (p,q) liegt auf dem Rand ∂M von M; wir betrachten für die Punkte der Einheitskreislinie ∂M die Darstellung $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ in Polarkoordinaten mit $\varphi \in [0;2\pi]$ und erhalten

  $$f(\cos\varphi, \sin\varphi) = \cos^2\varphi - \cos\varphi + 2\,\sin^2\varphi.$$

  Die differenzierbare Hilfsfunktion

  $$h : [0;2\pi] \to \mathbb{R}, \quad h(\varphi) = \cos^2\varphi - \cos\varphi + 2\,\sin^2\varphi,$$

  kann ihre Extremwerte in den Randpunkten $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ ihres Definitionsintervalls $[0;2\pi]$ und auf $]0;2\pi[$ in den Nullstellen ihrer Ableitung

  $$h'(\varphi) = 2\cos\varphi\cdot(-\sin\varphi) - (-\sin\varphi) + 4\sin\varphi\cdot\cos\varphi = \\ = 2\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi = 2\,\sin\varphi\cdot\left(\cos\varphi + \frac{1}{2}\right),$$

  also für $\sin\varphi = 0$ und damit in $\varphi = \pi$ oder für $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$ und damit in $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ oder $\varphi = \frac{4\pi}{3}$ annehmen; damit kommen für (p,q) die Punkte $(1,0)$ und $(-1,0)$ sowie $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ und $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ in Frage.

- Der Punkt (p,q) liegt im Innern $\overset{\circ}{M}$ von M; dann ist aber (p,q) ein kritischer Punkt von f, es gilt also $\operatorname{grad} f(p,q) = (0,0)$, weswegen nur der Punkt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ in Frage kommt.

Mit Hilfe der Wertetabelle

(p,q)	$(1,0)$	$(-1,0)$	$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$	$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$	$\left(\frac{1}{2},0\right)$
$f(p,q)$	0	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{1}{4}$

erkennt man, daß f in $\left(\frac{1}{2},0\right)$ das globale Minimum $-\frac{1}{4}$ sowie in $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ und $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ das globale Maximum $\frac{9}{4}$ besitzt.

7.24 Zur Bestimmung von Infimum und Supremum der gegebenen Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=\left(4\,y^2-x^2\right)e^{-x^2-y^2}$$

auf der abgeschlossenen Kreisscheibe

$$M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\le 2\right\}$$

mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und dem Radius $\sqrt{2}$ bieten sich folgende Wege an:

- Für einen Punkt $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ betrachten wir seine Darstellung in Polarkoordinaten $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ mit $r\in\left[0;\sqrt{2}\right]$ und $\varphi\in[0;2\pi]$; dabei gilt

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \\
&= \left(4\,(r\sin\varphi)^2-(r\cos\varphi)^2\right)e^{-(r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2} = \\
&= \left(4r^2\sin^2\varphi-r^2\cos^2\varphi\right)e^{-r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)} \underset{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1}{=} \\
&= \left(4\sin^2\varphi-\cos^2\varphi\right)\cdot r^2e^{-r^2} \underset{\cos^2\varphi=1-\sin^2\varphi}{=} \\
&= \left(5\sin^2\varphi-1\right)\cdot r^2e^{-r^2},
\end{aligned}$$

  so daß wir die beiden Faktoren getrennt untersuchen können:

  – Für die Hilfsfunktion

$$g:[0;2\pi]\to\mathbb{R},\quad g(\varphi)=5\,\sin^2\varphi-1,$$

    ergibt sich wegen $0\le\sin^2\varphi\le 1$ dann

$$g(0)=-1\le g(\varphi)\le 4=g(\tfrac{\pi}{2})\qquad\text{für alle}\quad\varphi\in[0;2\pi]\,.$$

  – Die Hilfsfunktion

$$h:\left[0;\sqrt{2}\right]\to\mathbb{R},\quad h(r)=r^2e^{-r^2},$$

    ist stetig und besitzt daher auf dem abgeschlossenen Definitionsintervall $\left[0;\sqrt{2}\right]$ nach dem Satz von Weierstraß ein globales Minimum und ein globales Maximum. Als Extrema der differenzierbaren Funktion h kommen neben den Randpunkten von $\left[0;\sqrt{2}\right]$, also $r=0$ und $r=\sqrt{2}$, nur noch die Nullstellen ihrer Ableitung

$$h'(r)=2\,r\cdot e^{-r^2}+r^2\left(e^{-r^2}(-2\,r)\right)=2\,r\,e^{-r^2}\cdot(1-r^2),$$

    im Innern $\left]0;\sqrt{2}\right[$ ihres Definitionsintervalls $\left[0;\sqrt{2}\right]$, also $r=1$, in Frage. Wegen $h(0)=0$, $h(\sqrt{2})=2e^{-2}$ und $h(1)=e^{-1}$ mit $0<2e^{-2}<e^{-1}$ ergibt sich

$$h(0)=0\le h(r)\le e^{-1}=h(1)\qquad\text{für alle}\quad r\in\left[0;\sqrt{2}\right].$$

Zusammenfassend erhalten wir wegen $f(x,y) = g(\varphi) \cdot h(r)$ demnach

$$-e^{-1} \le f(x,y) \le 4\,e^{-1}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; dabei ergibt sich für $\varphi = 0$ und $r = 1$, also $(x,y) = (1,0)$,

$$f(1,0) = -e^{-1} \qquad \text{und damit} \qquad \inf f(M) = \min f(M) = -e^{-1},$$

sowie für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $r = 1$, also $(x,y) = (0,1)$,

$$f(0,1) = 4\,e^{-1} \qquad \text{und damit} \qquad \sup f(M) = \max f(M) = 4\,e^{-1}.$$

- Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \left(4\,y^2 - x^2\right) e^{-x^2-y^2}$$

ist (als Produkt und Komposition von Polynomfunktionen und der Exponentialfunktion) stetig und besitzt daher nach dem Satz von Weierstraß auf der kompakten Kreisscheibe

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 2\right\}$$

(mindestens) ein globales Minimum und ein globales Maximum; es gibt also (a,b), $(c,d) \in M$ mit

$$f(a,b) \le f(x,y) \le f(c,d) \qquad \text{für alle} \quad (x,y) \in M,$$

und wir erhalten

$$\inf f(M) = \min f(M) = f(a,b) \quad \text{und} \quad \sup f(M) = \max f(M) = f(c,d).$$

Für die Lage dieser Extremstellen $(p,q) \in M$ gibt es nun die beiden folgenden Möglichkeiten:

  - Der Punkt (p,q) liegt auf dem Rand ∂M von M; wir betrachten für die Punkte (x,y) der Kreislinie ∂M die Darstellung $\left(\sqrt{2}\,\cos\varphi, \sqrt{2}\,\sin\varphi\right)$ in Polarkoordinaten mit $\varphi \in [0;2\pi]$ und erhalten

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(\sqrt{2}\,\cos\varphi, \sqrt{2}\,\sin\varphi) = \\ &= \left(4\left(\sqrt{2}\sin\varphi\right)^2 - \left(\sqrt{2}\cos\varphi\right)^2\right) e^{-(\sqrt{2}\cos\varphi)^2 - (\sqrt{2}\sin\varphi)^2} = \\ &= \left(8\sin^2\varphi - 2\cos^2\varphi\right) e^{-2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)} \underset{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1}{=} \\ &= 2\left(4\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right) e^{-2} \underset{\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi}{=} \\ &= 2\left(5\sin^2\varphi - 1\right) e^{-2}. \end{aligned}$$

    Als Extremstellen der differenzierbaren Hilfsfunktion

$$h : [0;2\pi] \to \mathbb{R}, \quad h(\varphi) = 2\left(5\sin^2\varphi - 1\right) e^{-2},$$

    kommen neben den Randpunkten des Definitionsintervalls $[0;2\pi]$, also $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ jeweils mit $(x,y) = (\sqrt{2},0)$, nur noch die Nullstellen ihrer Ableitung

$$h'(\varphi) = 2\left(10\sin\varphi\cos\varphi\right) e^{-2} = 20e^{-2}\sin\varphi\cos\varphi$$

    im Innern $]0;2\pi[$ des Definitionsintervalls $[0;2\pi]$, also $\varphi = \frac{\pi}{2}$ mit $(x,y) = (0,\sqrt{2})$, $\varphi = \pi$ mit $(x,y) = (-\sqrt{2},0)$ und $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ mit $(x,y) = (0,-\sqrt{2})$.

– Der Punkt (p,q) liegt im Innern $\overset{\circ}{M}$ von M; da aber f partiell differenzierbar mit

$$\partial_1 f(x,y) = (-2\,x)\cdot e^{-x^2-y^2} + \left(4\,y^2 - x^2\right)\cdot\left(e^{-x^2-y^2}\cdot(-2\,x)\right) = \\ = -2\,x\,e^{-x^2-y^2}\cdot\left(1+4\,y^2-x^2\right)$$

und

$$\partial_2 f(x,y) = (8\,y)\cdot e^{-x^2-y^2} + \left(4\,y^2 - x^2\right)\cdot\left(e^{-x^2-y^2}\cdot(-2\,y)\right) = \\ = -2\,y\,e^{-x^2-y^2}\cdot\left(-4+4\,y^2-x^2\right)$$

für alle $(x,y)\in M$ ist, muß (p,q) dann eine kritische Stelle von f sein. Aus

$$\partial_1 f(p,q) = -2\,p\,e^{-p^2-q^2}\cdot\left(1+4\,q^2-p^2\right) = 0$$

folgt wegen $e^{-p^2-q^2} > 0$ schon

$$p = 0 \qquad \text{oder} \qquad p^2 = 1+4\,q^2;$$

im Falle $p=0$ folgt dann aus

$$\partial_2 f(p,q) = -2\,q\,e^{-p^2-q^2}\cdot\left(-4+4\,q^2-p^2\right) = 0$$

erneut wegen $e^{-p^2-q^2} > 0$ schon $q=0$ oder $-4+4\,q^2=0$ bzw. $q^2=1$, also $q\in\{-1,0,1\}$, und im Falle $p^2 = 1+4\,q^2$ ist neben $e^{-p^2-q^2}>0$ auch $-4+4\,q^2-p^2 = -5 < 0$, so daß aus $\partial_2 f(p,q)=0$ schon $q=0$ und damit $p^2=1$, also $p\in\{-1,1\}$ folgt. Damit kommen als Extremstellen (p,q) nur die fünf Punkte $(0;0)$ sowie $(\pm1;0)$ und $(0;\pm1)$ in Frage.

Mit Hilfe der Wertetabelle

(p,q)	$(\sqrt{2},0)$	$(0,\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2},0)$	$(0,-\sqrt{2})$
$f(p,q)$	$-2e^{-2}$	$8e^{-2}$	$-2e^{-2}$	$8e^{-2}$

(p,q)	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(-1,0)$	$(0,-1)$
$f(p,q)$	0	$-e^{-1}$	$4e^{-1}$	$-e^{-1}$	$4e^{-1}$

erkennt man, daß f den minimalen Funktionswert $-e^{-1}$ in den Punkten $(a,b)=(\pm1,0)$ sowie den maximalen Funktionswert $4\,e^{-1}$ in den Punkten $(c,d)=(0,\pm1)$ annimmt; es ist also

$$\inf f(M) = \min f(M) = -e^{-1} \quad \text{und} \quad \sup f(M) = \max f(M) = 4\,e^{-1}.$$

7.25 Die (als Polynomfunktion insbesondere) stetige Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^3+4y^3-3x-3y,$$

besitzt auf der sowohl abgeschlossenen als auch beschränkten und damit kompakten Teilmenge

$$Q = [-1,1]\times[-1,1]\subseteq\mathbb{R}^2$$

nach dem Satz von Weierstraß (mindestens) eine globale Minimalstelle und (mindestens) eine globale Maximalstelle.

Da die Funktion f darüber hinaus partiell differenzierbar ist, wobei

$$\partial_1 f(x,y) = 3\,x^2 - 3 \qquad \text{und} \qquad \partial_2 f(x,y) = 12\,y^2 - 3$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und damit insbesondere

$$\partial_1 f(x,y) = 3\left(x^2 - 1\right) < 0$$

für alle Punkte $(x,y) \in \overset{\circ}{Q}$ im Innern $\overset{\circ}{Q} = \,]-1,1[\,\times\,]-1,1[$ von Q gilt, kommen für globale Extremstellen $(a,b) \in Q$ von f nur Punkte (a,b) auf dem Rand ∂Q des Quadrats Q in Frage:

- Für die Punkte $(-1,t)$ mit $t \in [-1,1]$ der linken bzw. $(1,t)$ mit $t \in [-1,1]$ der rechten Quadratseite gilt

  $$f(\pm 1,t) = (\pm 1)^3 + 4\,t^3 - 3 \cdot (\pm 1) - 3\,t = 4\,t^3 - 3\,t \mp 2;$$

  da die (als Polynomfunktion insbesondere differenzierbare) Hilfsfunktion

  $$h_1 : [-1;1] \to \mathbb{R}, \quad h_1(t) = 4\,t^3 - 3\,t \mp 2,$$

  ihre Extrema nur in den beiden Randpunkten ihres Definitionsintervalls, also in $t = -1$ und $t = 1$, sowie in den Nullstellen ihrer Ableitung

  $$h_1'(t) = 12\,t^2 - 3 = 12\left(t^2 - \frac{1}{4}\right) = 12\left(t + \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{1}{2}\right),$$

  also in $t = -\frac{1}{2}$ und $t = \frac{1}{2}$ annehmen kann, kommen für (a,b) nur die Punkte $(\pm 1,-1)$, $\left(\pm 1,-\frac{1}{2}\right)$, $\left(\pm 1,\frac{1}{2}\right)$ und $(\pm 1,1)$ in Frage.
- Für die Punkte $(t,-1)$ mit $t \in [-1,1]$ der unteren bzw. $(t,1)$ mit $t \in [-1,1]$ der oberen Quadratseite gilt

  $$f(t,\pm 1) = t^3 + 4 \cdot (\pm 1)^3 - 3\,t - 3 \cdot (\pm 1) = t^3 - 3\,t \pm 1;$$

  da die (als Polynomfunktion insbesondere differenzierbare) Hilfsfunktion

  $$h_2 : [-1;1] \to \mathbb{R}, \quad h(t) = t^3 - 3\,t \pm 1,$$

  ihre Extrema nur in den beiden Randpunkten ihres Definitionsintervalls, also in $t = -1$ und $t = 1$, die hier mit den Nullstellen ihrer Ableitung

  $$h_2'(t) = 3\,t^2 - 3 = 3\left(t^2 - 1\right) = 3\,(t+1)\,(t-1),$$

  zusammenfallen, annehmen kann, kommen für (a,b) nur die Punkte $(-1,\pm 1)$ und $(1,\pm 1)$ in Frage.

Mit Hilfe der Wertetabelle

(a,b)	$(-1,-1)$	$(-1,-\frac{1}{2})$	$(-1,\frac{1}{2})$	$(-1,1)$	$(1,-1)$	$(1,-\frac{1}{2})$	$(1,\frac{1}{2})$	$(1,1)$
$f(a,b)$	1	3	1	3	-3	-1	-3	-1

erkennt man, daß f den maximalen Funktionswert 3 in den Punkten $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ und $(-1,1)$ sowie den minimalen Funktionswert -3 in den Punkten $(1,-1)$ und $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ annimmt.

7.26 Bei der gegebenen Menge

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < \frac{\pi}{2} \right\}$$

handelt es sich um den offenen, von der x–Achse $y = 0$ und der dazu parallelen Geraden $y = \frac{\pi}{2}$ begrenzten Streifen; zu betrachten ist hierauf die Funktion

$$h : D \to \mathbb{R}, \quad h(x,y) = 2\,x \tan y - \left(\frac{x}{\cos y} \right)^2 .$$

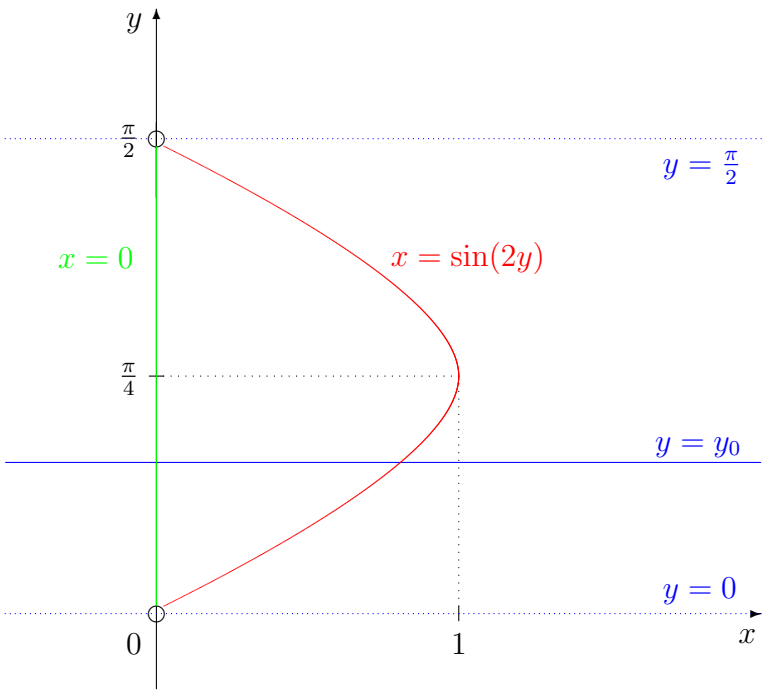
a) Für alle $(x,y) \in D$ gilt

$$h(x,y) = 2\,x \tan y - \left(\frac{x}{\cos y} \right)^2 = 2\,x \cdot \frac{\sin y}{\cos y} - \frac{x^2}{\cos^2 y} =$$
$$= \frac{x}{\cos^2 y} \cdot (2 \sin y \, \cos y - x) = \frac{x}{\cos^2 y} \cdot (\sin(2y) - x) \,;$$

damit besteht die Nullstellenmenge $N = \{(x,y) \in D \mid h(x,y) = 0\}$ von h genau aus denjenigen Punkten $(x,y) \in D$ mit

$$x = 0 \qquad \text{oder} \qquad x = \sin(2y) \,,$$

wodurch sich die folgende Skizze ergibt:



b) Zur Bestimmung des Wertebereichs

$$h(D) = \{h(x,y) \mid (x,y) \in D\}$$

der Funktion h betrachten wir ihr Verhalten auf jeder im Definitionsbereich D liegenden, zur x–Achse parallelen Geraden $y = y_0$ mit $y_0 \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$: wegen

$$h(x,y_0) = \frac{x}{\cos^2 y_0} \cdot (\sin(2y_0) - x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist h dort eine quadratische Funktion mit den beiden Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = \sin(2y_0)$; da der Koeffizient $-\frac{1}{\cos^2 y_0}$ von x^2 negativ ist, stellt ihr Graph eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel bei $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}\sin(2y_0)$ und

$$h(x_0, y_0) = \frac{x_0}{\cos^2 y_0} \cdot (\sin(2y_0) - x_0) = \frac{\frac{1}{2}\sin(2y_0)}{\cos^2 y_0} \cdot \frac{1}{2}\sin(2y_0) = \\ = \frac{\sin y_0 \cdot \cos y_0}{\cos^2 y_0} \cdot \sin y_0 \cdot \cos y_0 = \sin^2 y_0$$

dar, weswegen die Funktion h auf der Geraden $y = y_0$ genau die Werte in

$$W_{y_0} = \left]-\infty; \sin^2 y_0\right]$$

annimmt. Insgesamt ergibt sich damit

$$h(D) = \bigcup_{0<y_0<\frac{\pi}{2}} W_{y_0} = \bigcup_{0<y_0<\frac{\pi}{2}} \left]-\infty; \sin^2 y_0\right] = \left]-\infty; 1\right[;$$

dabei geht ein, daß die Funktion $\sin^2$ auf $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ streng monoton wachsend mit $\lim\limits_{y_0 \to \frac{\pi}{2}} \sin^2 y_0 = 1$ ist.

7.27 a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 2x^2 + y^2 - x\,y^2,$$

ist (als Polynomfunktion) zweimal stetig partiell differenzierbar, und für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\partial_1 f(x, y) = 4x - y^2 \qquad \text{und} \qquad \partial_2 f(x, y) = 2y - 2xy$$

sowie

$$\partial_1\partial_1 f(x, y) = 4 \qquad \text{und} \qquad \partial_2\partial_2 f(x, y) = 2 - 2x$$

und

$$\partial_2\partial_1 f(x, y) = -2y = \partial_1\partial_2 f(x, y),$$

also

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \left(4x - y^2,\ 2y - 2xy\right)$$

und

$$\operatorname{Hess} f(x, y) = \begin{pmatrix} 4 & -2y \\ -2y & 2 - 2x \end{pmatrix}.$$

Für eine kritische Stelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ von f gilt $\operatorname{grad} f(x, y) = (0, 0)$, also

$$4x - y^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad 2y - 2xy = 0;$$

wegen

$$2y - 2xy = 0 \iff 2y(1 - x) = 0 \iff y = 0 \quad \text{oder} \quad x = 1$$

sowie

- im Falle $y = 0$

$$4\,x - y^2 = 0 \iff 4\,x = 0 \iff x = 0$$

- und im Falle $x = 1$

$$4\,x - y^2 = 0 \iff 4 - y^2 = 0 \iff y^2 = 4 \iff y = \pm 2$$

besitzt f genau die drei kritischen Stellen $(0,0)$ sowie $(1,2)$ und $(1,-2)$; nur diese kommen als lokale Extrema von f in Frage:

- Es gilt

$$\operatorname{grad} f\,(0,0) = (0,0) \quad \text{und} \quad \operatorname{Hess} f\,(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

  damit besitzt $\operatorname{Hess} f\,(0,0)$ die beiden positiven Eigenwerte 4 und 2 und ist folglich positiv definit. Daher besitzt f in $(0,0)$ ein lokales Minimum.
- Es gilt

$$\operatorname{grad} f\,(1,2) = (0,0) \quad \text{und} \quad \operatorname{Hess} f\,(1,2) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix};$$

  damit besitzt $\operatorname{Hess} f\,(1,2)$ die negative Determinante -16 und ist folglich indefinit. Daher besitzt f in $(1,2)$ einen Sattelpunkt, insbesondere also kein lokales Extremum.
- Es gilt

$$\operatorname{grad} f\,(1,-2) = (0,0) \quad \text{und} \quad \operatorname{Hess} f\,(1,-2) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix};$$

  damit besitzt $\operatorname{Hess} f\,(1,-2)$ die negative Determinante -16 und ist folglich indefinit. Daher besitzt f in $(1,-2)$ einen Sattelpunkt, insbesondere also kein lokales Extremum.

Damit besitzt f genau ein lokales Extremum, nämlich ein lokales Minimum in $(0,0)$.

b) Wegen

$$f(0,t) = 2 \cdot 0^2 + t^2 - 0 \cdot t^2 = t^2 \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

ist f nicht nach oben beschränkt, besitzt also insbesondere kein globales Maximum, und wegen

$$f(2,t) = 2 \cdot 2^2 + t^2 - 2 \cdot t^2 = 8 - t^2 \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

ist f nicht nach unten beschränkt, besitzt also insbesondere kein globales Minimum.

7.28 Für alle Punkte $(x,y) \in M$ des abgeschlossenen 1. Quadranten $M \subseteq \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned} f(x,y) = e^{-(x+y)}\,(xy + x + y + 1) &= e^{-x-y}\,(x\,(y+1) + (y+1)) = \\ &= e^{-x}e^{-y}\,(x+1)\,(y+1) = \left(e^{-x}\,(x+1)\right) \cdot \left(e^{-y}\,(y+1)\right); \end{aligned}$$

daher betrachten wir die (als Produkt einer Exponentialfunktion und einer linearen Funktion) insbesondere differenzierbare Funktion

$$h : [0;\infty[\to \mathbb{R}, \quad h(t) = e^{-t}\,(t+1)\,.$$

Wegen

$$h(t) = \underbrace{e^{-t}}_{>0} \cdot \underbrace{(t+1)}_{\geq 1} > 0$$

für alle $t \geq 0$ sowie

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} e^{-t}\,(t+1) = \lim_{t\to\infty} \frac{t+1}{e^t} \overset{\text{L'H}}{\underset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“}}{=}} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t} = 0$$

ergibt sich

$$f(x,y) = \underbrace{h(x)}_{>0} \cdot \underbrace{h(y)}_{>0} > 0$$

für alle $(x,y) \in M$ sowie

$$\lim_{x\to\infty} f(x,x) = \lim_{x\to\infty} \left(\underbrace{h(x)}_{\to 0} \cdot \underbrace{h(x)}_{\to 0} \right) = 0 \cdot 0 = 0;$$

damit ist 0 die größte untere Schranke von W_f, also das Infimum von f. Des weiteren ist h wegen

$$h'(x) = \big(e^{-x} \cdot (-1)\big) \cdot (x+1) + e^{-x} \cdot 1 = -x\,e^{-x} \leq 0$$

für alle $x \geq 0$ auf $[0;\infty[$ monoton fallend; folglich ist

$$0 < h(x) \leq h(0) = e^{-0}\,(0+1) = 1 \cdot 1 = 1$$

für alle $x \geq 0$ und damit

$$f(x,y) = h(x) \cdot h(y) \leq 1 \cdot 1 = 1$$

für alle $(x,y) \in M$ mit $f(0,0) = h(0) \cdot h(0) = 1$; damit ist 1 das Maximum von W_f, insbesondere also das Supremum von f.

7.29 Die gegebene Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + 16\,x - 4\,y,$$

mit

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ und } y \neq 0\}$$

ist (als gebrochenrationale Funktion) zweimal stetig partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in D$ gilt

$$\partial_1 f(x,y) = -\frac{1}{x^2} + 16 \qquad \text{und} \qquad \partial_2 f(x,y) = \frac{1}{y^2} - 4$$

sowie

$$\partial_1\partial_1 f(x,y) = \frac{2}{x^3} \qquad \text{und} \qquad \partial_2\partial_2 f(x,y) = -\frac{2}{y^3}$$

und

$$\partial_2\partial_1 f(x,y) = 0 = \partial_1\partial_2 f(x,y),$$

also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(-\frac{1}{x^2} + 16,\ \frac{1}{y^2} - 4\right)$$

und

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{y^3} \end{pmatrix}.$$

Für eine kritische Stelle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ von f gilt $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$; wegen

$$\partial_1 f(x,y) = 0 \iff \frac{1}{x^2} = 16 \iff x^2 = \frac{1}{16} \iff x = \pm\frac{1}{4}$$

und

$$\partial_2 f(x,y) = 0 \iff \frac{1}{y^2} = 4 \iff y^2 = \frac{1}{4} \iff y = \pm\frac{1}{2}$$

kommen als lokale Extrema von f nur die vier Punkte $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ und $\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$ sowie $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ und $\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$ in Frage:

- Es gilt

  $$\operatorname{grad} f\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}\right) = (0,0) \quad \text{und} \quad \operatorname{Hess} f\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 128 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix};$$

  damit besitzt $\operatorname{Hess} f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ den positiven Eigenwert 128 und den negativen Eigenwert -16 und ist folglich indefinit. Daher besitzt f in $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ einen Sattelpunkt, insbesondere also kein lokales Extremum.

- Es gilt

  $$\operatorname{grad} f\left(\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{2}\right) = (0,0) \quad \text{und} \quad \operatorname{Hess} f\left(\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 128 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix};$$

  damit besitzt $\operatorname{Hess} f\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$ die beiden positiven Eigenwerte 128 und 16 und ist folglich positiv definit. Daher besitzt f in $\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$ ein (isoliertes) lokales Minimum.

- Es gilt

  $$\operatorname{grad} f\left(-\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}\right) = (0,0) \quad \text{und} \quad \operatorname{Hess} f\left(-\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -128 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix};$$

  damit besitzt $\operatorname{Hess} f\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ die beiden negativen Eigenwerte -128 und -16 und ist folglich negativ definit. Daher besitzt f in $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ ein (isoliertes) lokales Maximum.

- Es gilt

  $$\operatorname{grad} f\left(-\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{2}\right) = (0,0) \quad \text{und} \quad \operatorname{Hess} f\left(-\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -128 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix};$$

  damit besitzt $\operatorname{Hess} f\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$ den negativen Eigenwert -128 und den posiven Eigenwert 16 und ist folglich indefinit. Daher besitzt f in $\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$ einen Sattelpunkt, insbesondere also kein lokales Extremum.

Folglich besitzt die Funktion f genau zwei lokale Extrema, nämlich ein (isoliertes) lokales Minimum in $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ sowie ein (isoliertes) lokales Maximum inin $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

7.30 Die Definitionsmenge

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

ist die abgeschlossene Kreisscheibe um den Mittelpunkt $(0, 0)$ mit dem Radius 2; insbesondere ist D eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Damit besitzt die (als Polynomfunktion insbesondere) stetige Funktion

$$h : D \to \mathbb{R}, \quad h(x, y) = 4xy - x^3y - xy^3,$$

nach dem Satz von Weierstraß mindestens ein globales Minimum und mindestens ein globales Maximum, es gibt also (a, b) und $(c, d) \in D$ mit

$$f(a, b) \leq f(x, y) \leq f(c, d)$$

für alle $(x, y) \in D$; für die Lage dieser Extremstellen $(p, q) \in D$ gibt es die folgenden beiden Möglichkeiten:

- (p, q) liegt auf dem Rand von D, also auf der Kreislinie $x^2 + y^2 = 4$ um $(0, 0)$ mit Radius 2, womit sich allerdings

  $$h(p, q) = 4\,p\,q - p^3q - pq^3 = p\,q\,\left(4 - \underbrace{\left(p^2 + q^2\right)}_{=4}\right) = 0$$

  ergibt.
- (p, q) liegt im Innern von D, also in der offenen Kreisscheibe $x^2 + y^2 < 4$; da aber h partiell differenzierbar mit

  $$\partial_1 h(x, y) = 4y - 3x^2y - y^3 = y\left(4 - 3x^2 - y^2\right)$$

  und

  $$\partial_2 h(x, y) = 4x - x^3 - 3xy^2 = x\left(4 - x^2 - 3y^2\right)$$

  für alle $(x, y) \in D$ ist, muß (p, q) dann eine kritische Stelle von h sein, so daß wegen

  $$\partial_1 h(p, q) = 0 \iff q = 0 \quad \text{oder} \quad 3p^2 + q^2 = 4$$

  und

  $$\partial_2 h(p, q) = 0 \iff p = 0 \quad \text{oder} \quad p^2 + 3q^2 = 4$$

  die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:
  - Es ist $q = 0$ und $p = 0$, also $(p, q) = (0, 0)$.
  - Es ist $q = 0$ und $p^2 + 3q^2 = 4$, woraus sich $p^2 = 4$ und damit $p = \pm 2$ ergibt; die Punkte $(p, q) = (\pm 2, 0)$ liegen allerdings auf dem Rand und damit nicht im Innern von D.
  - Es ist $3p^2 + q^2 = 4$ und $p = 0$, woraus sich $q^2 = 4$ und damit $q = \pm 2$ ergibt; die Punkte $(p, q) = (0, \pm 2)$ liegen allerdings auf dem Rand und damit nicht im Innern von D.

– Es ist $3p^2 + q^2 = 4$ und $p^2 + 3q^2 = 4$, woraus sich $p^2 = 1$ und $q^2 = 1$ und damit $p = \pm 1$ und $q = \pm 1$, also für (p, q) die Punkte $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ und $(-1, -1)$ ergibt.

Der Vergleich der Funktionwerte

(p,q)	$\in \partial D$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(-1,-1)$
$h(p,q)$	0	0	2	-2	-2	2

zeigt, daß die Funktion h in Punkten $(1, 1)$ und $(-1, -1)$ ihr Maximum 2 sowie in den Punkten $(1, -1)$ und $(-1, 1)$ ihr Minimum -2 annimmt.

7.31 Die Definitionsmenge

$$D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi \le x \le \pi \text{ und } 0 \le y \le \pi\big\} = [-\pi; \pi] \times [0; \pi]$$

ist das abgeschlossene Rechteck mit den Eckpunkten $(-\pi; 0)$, $(\pi; 0)$, (π, π) und $(-\pi, \pi)$; insbesondere ist D eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Damit besitzt die (als Summe zweier trigonometrischer Funktionen insbesondere) stetige Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \cos x + \sin y,$$

nach dem Satz von Weierstraß mindestens ein globales Minimum und mindestens ein globales Maximum, es gibt also (a, b) und $(c, d) \in D$ mit

$$f(a, b) \le f(x, y) \le f(c, d)$$

für alle $(x, y) \in D$; für die Lage dieser Extremstellen $(p, q) \in D$ gibt es die folgenden beiden Möglichkeiten:

- (p, q) liegt auf dem Rand von D; wegen

  $$f(t, 0) = f(t, \pi) = \cos t \qquad \text{für alle} \quad t \in [-\pi; \pi]$$

  und

  $$f(-\pi, t) = f(\pi, t) = -1 + \sin t \qquad \text{für alle} \quad t \in [0; \pi]$$

  kommen hierfür nur die Punkte $(-\pi, 0)$, $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(-\pi, \pi)$, $(0, \pi)$, (π, π) sowie $(-\pi, \frac{\pi}{2})$ und $(\pi, \frac{\pi}{2})$ in Frage.
- (p, q) liegt im Innern von D; da aber f partiell differenzierbar mit

  $$\operatorname{grad} f(x, y) = (-\sin x, \cos y) \qquad \text{für alle} \quad (x, y) \in \,]-\pi; \pi[\times]0; \pi[$$

  ist, muß (p, q) dann eine kritische Stelle von f sein, weswegen hier nur der Punkt $(0, \frac{\pi}{2})$ in Frage kommt.

Der Vergleich der Funktionwerte

$f(-\pi, \pi) = -1$	$f(0, \pi) = 1$	$f(\pi, \pi) = -1$
$f(-\pi, \frac{\pi}{2}) = 0$	$f(0, \frac{\pi}{2}) = 2$	$f(\pi, \frac{\pi}{2}) = 0$
$f(-\pi, 0) = -1$	$f(0, 0) = 1$	$f(\pi, 0) = -1$

zeigt, daß f in Eckpunkten $(-\pi; 0)$, $(\pi; 0)$, (π, π) und $(-\pi, \pi)$ von D globale Minimalstellen sowie im Mittelpunkt $(0, \frac{\pi}{2})$ eine globale Maximalstelle besitzt.

7.32 a) Die auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierte und (als Polynomfunktion) beliebig oft stetig partiell differenzierbare Funktion

$$f_c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_c(x,y) = x^2 - 2\,x\,y + 4\,y^2 - 12\,y + c,$$

kann lokale Extrema nur in ihren kritischen Punkten annehmen; wegen

$$\partial_1 f_c(x,y) = 2\,x - 2\,y \qquad \text{und} \qquad \partial_2 f_c(x,y) = -2\,x + 8\,y - 12,$$

also

$$\operatorname{grad} f_c(x,y) = (2\,x - 2\,y,\ -2\,x + 8\,y - 12)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ kommt hierfür nur ein Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$2\,x - 2\,y = 0 \qquad \text{und} \qquad -2\,x + 8\,y - 12 = 0,$$

also $x = y$ und damit $y = 2$ in Frage. Der Punkt $(2,2)$ ist nun wegen $\operatorname{grad} f_c(2,2) = (0,0)$ ein kritischer Punkt von f_c, und die Hessematrix

$$A = \operatorname{Hess} f_c(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f_c(x,y) & \partial_1\partial_2 f_c(x,y) \\ \partial_2\partial_1 f_c(x,y) & \partial_2\partial_2 f_c(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

ist wegen

$$\det(A) = 2 \cdot 8 - (-2)^2 = 12 > 0 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Spur}(A) = 2 + 8 = 10 > 0$$

positiv definit; folglich besitzt f_c in $(2,2)$ ein (isoliertes) lokales Minimum.

b) Wegen

$$\begin{aligned} f_c(x,y) &= x^2 - 2\,x\,y + 4\,y^2 - 12\,y + c \\ &= (x-y)^2 + 3\,y^2 - 12\,y + c \\ &= (x-y)^2 + 3\,\big(y^2 - 4\,y + 4\big) - 12 + c \\ &= \underbrace{(x-y)^2}_{\geq 0} + 3\,\underbrace{(y-2)^2}_{\geq 0} + (c - 12) \geq c - 12 \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt $W_c \subseteq [c-12; +\infty[$. Wegen

$$f_c(t,t) = 3\,(t-2)^2 + (c-12)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ ist der Graph G_{f_c} von f_c auf der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitel $(2, c-12)$; damit ist auch $[c-12; \infty[\subseteq W_c$. Insgesamt ergibt sich also

$$W_c = [c-12; +\infty[\,.$$

7.33 Die Polynomfunktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 6\,x^2\,y - 5\,x^2 + 2\,x - 2\,y^3,$$

ist beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\partial_1 f(x,y) = 12\,x\,y - 10\,x + 2 \qquad \text{und} \qquad \partial_2 f(x,y) = 6\,x^2 - 6\,y^2$$

und damit

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(12\,x\,y - 10\,x + 2,\ 6\,x^2 - 6\,y^2\right)$$

sowie

$$\partial_1\partial_1 f(x,y) = 12\,y - 10 \qquad \text{und} \qquad \partial_2\partial_2 f(x,y) = -12\,y \qquad \text{sowie}$$

$$\partial_2\partial_1 f(x,y) = 12\,x = \partial_1\partial_2 f(x,y)$$

und damit

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 12\,y - 10 & 12\,x \\ 12\,x & -12\,y \end{pmatrix}.$$

Für einen kritischen Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ von f gilt $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$, also

$$12\,x\,y - 10\,x + 2 = 0 \qquad \text{und} \qquad 6\,x^2 - 6\,y^2 = 0;$$

wegen $6\,(x-y)\,(x+y) = 0$ ist also $x = y$ oder $x = -y$:

- Im Falle $x = y$ folgt $12\,x^2 - 10\,x + 2 = 0$, also $6\,x^2 - 5\,x + 1 = 0$, und damit

  $$x_{1,2} = \frac{1}{12}\left(5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 6\cdot 1}\right) = \frac{5 \pm 1}{12},$$

  also $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = \frac{1}{3}$.
- Im Falle $x = -y$ folgt $-12\,x^2 - 10\,x + 2 = 0$, also $6\,x^2 + 5\,x - 1 = 0$, und damit

  $$x_{3,4} = \frac{1}{12}\left(-5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 6\cdot (-1)}\right) = \frac{-5 \pm 7}{12},$$

  also $x_3 = \frac{1}{6}$ und $x_4 = -1$.

Die Probe bestätigt, daß die gefundenen Kandidaten $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ und $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ sowie $\left(\frac{1}{6};-\frac{1}{6}\right)$ und $(-1;1)$ tatsächlich kritische Punkte von f sind; dabei gilt:

- Die Matrix $A_1 = \operatorname{Hess} f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$ ist wegen $\det A_1 = -12 < 0$ indefinit; damit ist $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ein Sattelpunkt von f.
- Die Matrix $A_2 = \operatorname{Hess} f\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ ist wegen $\det A_2 = 8 > 0$ und $\operatorname{Spur} A_2 = -10 < 0$ negativ definit; damit ist $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ ein lokales Maximum von f.
- Die Matrix $A_3 = \operatorname{Hess} f\left(\frac{1}{6};-\frac{1}{6}\right) = \begin{pmatrix} -12 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ist wegen $\det A_3 = -28 < 0$ indefinit; damit ist $(\frac{1}{6},-\frac{1}{6})$ ein Sattelpunkt von f.
- Die Matrix $A_4 = \operatorname{Hess} f(-1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ -12 & -12 \end{pmatrix}$ ist wegen $\det A_4 = -168 < 0$ indefinit; damit ist $(-1,1)$ ein Sattelpunkt von f.

Zur Bestimmung des Wertebereichs W_f der Funktion f betrachten wir deren Verhalten auf der y–Achse; wegen $f(0,t) = -2\,t^3$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ergibt sich schließlich der Wertebereich $W_f = \mathbb{R}$.

7.34 Die Menge

$$M = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y-1 \leq 0\big\}$$

ist das von den Geraden $x = 0$, $y = 0$ und $y = 1 - x$ begrenzte abgeschlossene Dreieck mit den Eckpunkten $(0;0)$, $(1;0)$ und $(0;1)$ und damit insbesondere eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. Folglich besitzt die (als Polynomfunktion) insbesondere stetige Funktion

$$f : M \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x\,y\,(x+y-1)\,,$$

nach dem Satz von Weierstraß auf dem Kompaktum M (mindestens) ein globales Minimum und (mindestens) ein globales Maximum. Dabei gilt für alle $(x,y) \in M$

$$f(x,y) = \underbrace{x}_{\geq 0} \cdot \underbrace{y}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x+y-1)}_{\leq 0} \leq 0$$

mit

$$f(x,y) = 0 \iff x = 0 \quad \text{oder} \quad y = 0 \quad \text{oder} \quad y = 1 - x;$$

folglich besitzt die Funktion f genau in den Randpunkten von M ihre globalen Maximalstellen, und es gilt

$$\sup f(M) = 0.$$

Eine globale Minimalstelle $(p,q) \in M$ von f muß demnach im Innern

$$\overset{\circ}{M} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0,\ x+y-1 < 0\big\}$$

des Dreiecks M liegen; da f (als Polynomfunktion) insbesondere partiell differenzierbar ist, kommen dabei hierfür nur kritische Stellen von f in Frage. Für alle $(x,y) \in \overset{\circ}{M}$ gilt

$$f(x,y) = x\,y\,(x+y-1) = x^2\,y + x\,y^2 - x\,y$$

und damit

$$\partial_1 f(x,y) = 2\,x\,y + y^2 - y \qquad \text{und} \qquad \partial_2 f(x,y) = x^2 + 2\,x\,y - x,$$

weswegen wir

$$\partial_1 f(x,y) = 0 \iff (2\,x+y-1)\,y = 0 \underset{y>0}{\iff} 2\,x + y = 1$$

und

$$\partial_2 f(x,y) = 0 \iff (x+2\,y-1)\,x = 0 \underset{x>0}{\iff} x + 2\,y = 1$$

erhalten. Für ein globales Minimum $(p,q) \in M$ von f muß also sowohl $2\,p+q = 1$ als auch $p+2\,q = 1$, also $p = 1-2\,q$ und damit $2\,(1-2\,q)+q = 1$ bzw. $2-3\,q = 1$, und schließlich $q = \frac{1}{3}$ und $p = \frac{1}{3}$ gelten; somit ergibt sich

$$\inf f(M) = f\left(\tfrac{1}{3};\tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} - 1\right) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) = -\tfrac{1}{27}.$$

7.35 Das Rechteck

$$R = [-1, 1] \times [0, 2\pi]$$

ist eine sowohl abgeschlossene als auch beschränkte und damit kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$; darüber hinaus ist die Funktion

$$f : R \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x + e^x \cos y,$$

als Summe und Produkt einer linearen Funktion sowie der Exponenentialfunktion und des Cosinus insbesondere stetig. Nach dem Satz von Weierstraß besitzt damit die stetige Funktion f auf der kompakten Menge R (mindestens) eine globale Minimalstelle und (mindestens) eine globale Maximalstelle.

Da die Funktion f darüber hinaus partiell differenzierbar ist, wobei

$$\partial_1 f(x, y) = 1 + e^x \cos y \qquad \text{und} \qquad \partial_2 f(x, y) = -e^x \sin y$$

für alle $(x, y) \in R$ gilt, kommen für globale Extremstellen $(a, b) \in R$ von f nur die beiden Fälle in Frage:

- Der Punkt (a, b) liegt auf dem Rand ∂R von R; wir betrachten die vier Rechtecksseiten und greifen dabei auf bekannte Eigenschaften der Exponentialfunktion sowie des Cosinus zurück:
  - Für die Punkte $(-1, t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$ der linken Rechtecksseite gilt

    $$f(-1, t) = -1 + e^{-1} \cos t;$$

    damit kommen für (a, b) nur die Punkte $(-1, 0)$, $(-1, \pi)$ und $(-1, 2\pi)$ in Frage.
  - Für die Punkte $(1, t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$ der rechten Rechtecksseite gilt

    $$f(1, t) = 1 + e \cos t;$$

    damit kommen für (a, b) nur die Punkte $(1, 0)$, $(1, \pi)$ und $(1, 2\pi)$ in Frage.
  - Für die Punkte $(t, 0)$ bzw. $(t, 2\pi)$ mit $t \in [-1, 1]$ der unteren bzw. oberen Rechtecksseite gilt

    $$f(t, 0) = t + e^t = f(t, 2\pi);$$

    da dieser Ausdruck in t streng monoton wachsend ist, kommen für (a, b) nur die Punkte $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ bzw. $(-1, 2\pi)$ und $(1, 2\pi)$ in Frage.
- Der Punkt (a, b) liegt im Innern

  $$\overset{\circ}{R} =]-1, 1[\times]0, 2\pi[$$

  von R; dann ist aber (a, b) schon ein kritischer Punkt von f, es gilt also $\operatorname{grad} f(a, b) = (0, 0)$. Aus

  $$\partial_2 f(a, b) = -e^a \sin b = 0$$

  folgt zunächst $\sin b = 0$, also $b = \pi$, woraus sich mit

  $$\partial_1 f(a, b) = 1 + e^a \cos b \underset{b=\pi}{=} 1 - e^a = 0$$

  dann $e^a = 1$, also $a = 0$, ergibt; hier ist damit $(a, b) = (0, \pi)$.

Mit Hilfe der Wertetabelle

(a,b)	$(-1,0)$	$(-1,\pi)$	$(-1,2\pi)$	$(1,0)$	$(1,\pi)$	$(1,2\pi)$	$(0,\pi)$
$f(a,b)$	$-1+\frac{1}{e}$	$-1-\frac{1}{e}$	$-1+\frac{1}{e}$	$1+e$	$1-e$	$1+e$	-1

erkennt man wegen

$$1-e<-1-\frac{1}{e}<-1<-1+\frac{1}{e}<1+e,$$

daß f in $(1,\pi)$ eine globale Minimalstelle sowie in $(1,0)$ und $(1,2\pi)$ globale Maximalstellen besitzt.

7.36 Für alle $(x,y)\in D$ gilt $x^2+y^2\le 1$ und damit

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4+y^4+2x^2y^2+2x^2-2y^2+1 \\ &= \left(x^4+2x^2y^2+y^4\right)+\left(2x^2+2y^2\right)-4y^2+1 \\ &= \underbrace{\left(x^2+y^2\right)^2}_{\le 1}+2\cdot\underbrace{\left(x^2+y^2\right)}_{\le 1}+\underbrace{\left(-4y^2\right)}_{\le 0}+1\le 1^2+2\cdot 1+0+1=4 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} f(x,y)=4 \quad &\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\left(x^2+y^2\right)^2}_{\le 1}+2\cdot\underbrace{\left(x^2+y^2\right)}_{\le 1}+\underbrace{\left(-4y^2\right)}_{\le 0}+1=4 \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2+y^2=1 \text{ und } -4y^2=0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2=1 \text{ und } y^2=0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x=\pm 1 \text{ und } y=0. \end{aligned}$$

Damit nimmt die gegebene Funktion f auf der kompakten Einheitskreisscheibe D ihren maximalen Wert 4 genau in den beiden Punkten $(-1;0)$ und $(1;0)$ an.

7.37 a) Die Einheitskreisscheibe

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$$

ist eine sowohl abgeschlossene als auch beschränkte und damit kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$; darüber hinaus ist die Funktion

$$f: E\to\mathbb{R}, \quad f(x,y)=x^3-3\,x\,y^2,$$

als Polynomfunktion insbesondere stetig. Nach dem Satz von Weierstraß besitzt damit die stetige Funktion f auf der kompakten Menge E eine globale Minimalstelle $(p_1,q_1)\in E$ und eine globale Maximalstelle $(p_2,q_2)\in E$, für alle $(x,y)\in E$ gilt also $f(p_1,q_1)\le f(x,y)\le f(p_2,q_2)$.

b) Die Polynomfunktion f ist insbesondere partiell differenzierbar, und für alle $(x,y)\in E$ gilt

$$\partial_1 f(x,y)=3\,x^2-3\,y^2 \qquad \text{und} \qquad \partial_2 f(x,y)=-6\,x\,y.$$

Damit kommen für globale Extremstellen $(a,b)\in E$ nur die beiden folgenden Fälle in Frage:

- Der Punkt (a,b) liegt auf dem Rand ∂E von E; wir betrachten für die Punkte der Einheitskreislinie ∂E die Darstellung $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ in Polarkoordinaten mit $\varphi \in [0;2\pi]$ und erhalten

$$f(\cos\varphi,\sin\varphi) = \cos^3\varphi - 3\,\cos\varphi\,\underbrace{\sin^2\varphi}_{=1-\cos^2\varphi} = 4\,\cos^3\varphi - 3\,\cos\varphi.$$

  Die differenzierbare Hilfsfunktion

$$h : [0;2\pi] \to \mathbb{R}, \quad h(\varphi) = 4\,\cos^3\varphi - 3\,\cos\varphi,$$

  kann ihre Extremwerte in den Randpunkten $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ ihres Definitionsintervalls oder in den Nullstellen ihrer Ableitung

$$h'(\varphi) = 4\left(3\,\cos^2\varphi\cdot(-\sin\varphi)\right) - 3\,(-\sin\varphi) = -12\sin\varphi\left(\cos^2\varphi - \tfrac{1}{4}\right),$$

  also für $\sin\varphi = 0$ oder $\cos\varphi = \pm\frac{1}{2}$ annehmen; damit kommen für φ nur die Werte 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$ und 2π, also für (a,b) die Punkte $(\pm1;0)$ sowie $\left(\frac{1}{2};\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ und $\left(-\frac{1}{2};\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ in Frage.

- Der Punkt (a,b) liegt im Innern $\overset{\circ}{E}$ von E; dann ist aber (a,b) ein kritischer Punkt von f, es gilt also $\operatorname{grad} f(a,b) = (0,0)$. Aus $\partial_1 f(a,b) = 3\,a^2 - 3\,b^2 = 0$ folgt zunächst $a^2 = b^2$, also $a = \pm b$, woraus sich mit $\partial_2 f(a,b) = -6a\,b = 0$ dann $\mp 6\,b^2 = 0$, also $b = 0$ und $a = 0$, ergibt; hier ist damit $(a,b) = (0,0)$.

Mit Hilfe der Wertetabelle

(a,b)	$(1;0)$	$(-1;0)$	$\left(\frac{1}{2};\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$	$\left(-\frac{1}{2};\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$	$(0;0)$
$f(a,b)$	1	-1	-1	1	0

erkennt man, daß f in $(-1,0)$ sowie $\left(\frac{1}{2};\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ globale Minimalstellen sowie in $(1,0)$ sowie $\left(-\frac{1}{2};\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ globale Maximalstellen besitzt.

7.38 Die Einheitskreisscheibe

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$$

ist eine sowohl abgeschlossene als auch beschränkte und damit kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$; darüber hinaus ist die Funktion

$$f : M \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 + y^2 + x + y,$$

als Polynomfunktion insbesondere stetig. Nach dem Satz von Weierstraß besitzt damit die stetige Funktion f auf der kompakten Menge M eine globale Minimalstelle $(p_1,q_1) \in M$ und eine globale Maximalstelle $(p_2,q_2) \in M$, für alle $(x,y) \in M$ gilt also $f(p_1,q_1) \le f(x,y) \le f(p_2,q_2)$.

Die Polynomfunktion f ist insbesondere partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in M$ gilt

$$\partial_1 f(x,y) = 2\,x + 1 \qquad \text{und} \qquad \partial_2 f(x,y) = 2\,y + 1.$$

Damit kommen für globale Extremstellen $(a,b) \in M$ nur die beiden folgenden Fälle in Frage:

- Der Punkt (a,b) liegt auf dem Rand ∂M von M; wir betrachten für die Punkte der Einheitskreislinie ∂M die Darstellung $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ in Polarkoordinaten mit $\varphi \in [0; 2\pi]$ und erhalten

$$f(\cos\varphi, \sin\varphi) = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi = 1 + \cos\varphi + \sin\varphi.$$

  Die differenzierbare Hilfsfunktion

$$h : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad h(\varphi) = 1 + \cos\varphi + \sin\varphi,$$

  kann ihre Extremwerte in den Randpunkten $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ ihres Definitionsintervalls oder in den Nullstellen ihrer Ableitung

$$h'(\varphi) = -\sin\varphi + \cos\varphi,$$

  also für $\sin\varphi = \cos\varphi$ und damit in $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{5\pi}{4}$ annehmen; damit kommen für (a,b) die Punkte $(1;0)$ sowie $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ und $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ in Frage.

- Der Punkt (a,b) liegt im Innern $\overset{\circ}{M}$ von M; dann ist aber (a,b) ein kritischer Punkt von f, es gilt also $\operatorname{grad} f(a,b) = (0,0)$, weswegen nur der Punkt $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ in Frage kommt.

Mit Hilfe der Wertetabelle

(a,b)	$(1;0)$	$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$
$f(a,b)$	2	$1+\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$

erkennt man, daß f in $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ das globale Minimum sowie in $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ das globale Maximum besitzt, und es ist

$$\inf_{(x,y)\in M} f(x,y) = -\frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad \sup_{(x,y)\in M} f(x,y) = 1 + \sqrt{2}.$$

7.39 a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^4 + y^4 - 2\,x^2 - 2\,y^2 + 4\,x\,y,$$

ist als Polynomfunktion beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\partial_1 f(x,y) = 4\,x^3 - 4\,x + 4\,y \qquad \text{und} \qquad \partial_2 f(x,y) = 4\,y^3 - 4\,y + 4\,x$$

sowie

$$\partial_1\partial_1 f(x,y) = 12\,x^2 - 4 \qquad \text{und} \qquad \partial_2\partial_2 f(x,y) = 12\,y^2 - 4$$

und

$$\partial_1\partial_2 f(x,y) = 4 = \partial_2\partial_1 f(x,y).$$

Für einen kritischen Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$, also

$$\partial_1 f(x,y) = 4\,x^3 - 4\,x + 4\,y = 0 \quad \text{und} \quad \partial_2 f(x,y) = 4\,y^3 - 4\,y + 4\,x = 0,$$

woraus sich zunächst

$$\left(4\,x^3 - 4\,x + 4\,y\right) + \left(4\,y^3 - 4\,y + 4\,x\right) = 0,$$

also $4\,(x^3 + y^3) = 0$, und damit $y^3 = -x^3 = (-x)^3$, also $y = -x$, ergibt; folglich ist

$$0 = \partial_1 f(x,y) = 4\,x^3 - 8\,x = 4\,x\left(x^2 - 2\right) = 4\,x\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right),$$

woraus man schießlich $x_1 = 0$ (mit $y_1 = 0$) sowie $x_2 = \sqrt{2}$ (mit $y_2 = -\sqrt{2}$) und $x_3 = -\sqrt{2}$ (mit $y_3 = \sqrt{2}$) erhält. Wir untersuchen das Verhalten von f in den drei ermittelten Punkten:

- Es ist $\operatorname{grad} f(0;0) = (0,0)$ und $\operatorname{Hess} f(0;0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$; da die Hessematrix $\operatorname{Hess} f(0;0)$ die Determinante 0 besitzt, ist darüber keine Aussage hinsichtlich des Verhaltens von f im Punkte $(0;0)$ möglich. Wir untersuchen daher die Funktionswerte $f(x,y)$ auf den beiden Winkelhalbierenden; dabei ist

  $$f(t;t) = t^4 + t^4 - 2\,t^2 - 2\,t^2 + 4\,t^2 = 2\,t^4 > 0 = f(0,0)$$

  für alle $t \neq 0$ sowie

  $$f(t;-t) = t^4 + t^4 - 2\,t^2 - 2\,t^2 - 4\,t^2 = 2\,t^2\left(t^2 - 4\right) < 0 = f(0,0)$$

  für alle $0 < |t| < 2$. Damit nimmt f auf jeder (noch so kleinen) Kreisscheibe um dem Mittelpunkt $(0;0)$ sowohl positive als auch negative Funktionswerte an und kann daher im Punkt $(0;0)$ kein Extremum besitzen.
- Es ist $\operatorname{grad} f\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right) = (0,0)$ und $\operatorname{Hess} f\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$; da die Hessematrix $\operatorname{Hess} f\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ die positive Determinante 384 und die positive Spur 40 besitzt, ist sie positiv definit, und f besitzt in $(\sqrt{2};-\sqrt{2})$ ein lokales Minimum.
- Es ist $\operatorname{grad} f\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right) = (0,0)$ und $\operatorname{Hess} f\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$; damit ist die Hessematrix $\operatorname{Hess} f\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ wie eben positiv definit, und f besitzt auch in $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ ein lokales Minimum.

b) Nach dem Satz von Weierstraß nimmt die als Polynomfunktion insbesondere stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf der kompakten Einheitskreisscheibe

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

ein globales Minimum und ein globales Maximum an; für die globale Maximalstelle (a,b) von f auf E gilt also

$$f(x,y) \leq f(a,b) \qquad \text{für jedes } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } x^2 + y^2 \leq 1.$$

Unter der Annahme, der Punkt (a,b) liege im Innern $\overset{\circ}{E}$ von E, muß (a,b) ein kritischer Punkt von f sein, wofür aber nach a) nur $(0;0)$ in Frage kommt;

nachdem f aber in $(0;0)$ kein lokales Extremum besitzt, kann f dort auch nicht sein globales Maximum auf E annehmen. Folglich muß der Punkt (a,b) auf dem Rand ∂E von E liegen und genügt demnach der Kreisgleichung $a^2+b^2=1$.

7.40 a) Für einen Punkt $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ betrachten wir seine Darstellung in Polarkoordinaten $(r\cos\varphi;r\sin\varphi)$ mit $r\in\mathbb{R}_0^+$ und $\varphi\in[0;2\pi]$; dabei gilt

$$\begin{aligned} f(x;y) &= f(r\cos\varphi;r\sin\varphi) = \\ &= e^{-((r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2)}\left((r\cos\varphi)^2-2\,(r\sin\varphi)^2\right) \underset{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1}{=} \\ &= e^{-r^2}\left(r^2\cos^2\varphi-2\,r^2\sin^2\varphi\right) \underset{\sin^2\varphi=1-\cos^2\varphi}{=} \left(e^{-r^2}r^2\right)\left(3\,\cos^2\varphi-2\right), \end{aligned}$$

so daß wir die beiden Faktoren getrennt untersuchen können:

- Die Hilfsfunktion

$$g:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R},\quad g(r)=e^{-r^2}r^2,$$

ist beliebig oft differenzierbar, und für alle $r\geq 0$ gilt

$$g'(r)=\left(e^{-r^2}(-2\,r)\right)\cdot r^2+e^{-r^2}\cdot(2\,r)=2\,r\,e^{-r^2}\cdot(1-r^2);$$

wegen $g'(r)>0$ für alle $r\in\,]0;1[$ ist g auf $[0;1]$ streng monoton wachsend, und wegen $g'(r)<0$ für alle $r\in\,]1;\infty[$ ist g auf $[1;\infty[$ streng monoton fallend, so daß sich

$$0=g(0)\leq g(r)\leq g(1)=e^{-1}$$

für alle $r\in\mathbb{R}_0^+$ ergibt.

- Für die Hilfsfunktion

$$h:[0;2\pi]\to\mathbb{R},\quad h(\varphi)=3\,\cos^2\varphi-2,$$

ergibt sich wegen $0\leq\cos^2\varphi\leq 1$ dann

$$h(\tfrac{\pi}{2})=-2\leq h(\varphi)\leq 1=h(0).$$

Zusammenfassend erhalten wir wegen $f(x,y)=g(r)\cdot h(\varphi)$ demnach

$$-2\,e^{-1}\leq f(x,y)\leq e^{-1}$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$; dabei ergibt sich für $r=1$ und $\varphi=\frac{\pi}{2}$, also $(x,y)=(0;1)$,

$$f(0;1)=-2\,e^{-1}\qquad\text{und damit}\qquad\inf f(\mathbb{R}^2)=\min f(\mathbb{R}^2)=-2\,e^{-1},$$

sowie für $r=1$ und $\varphi=0$, also $(x,y)=(1;0)$,

$$f(1;0)=e^{-1}\qquad\text{und damit}\qquad\sup f(\mathbb{R}^2)=\max f(\mathbb{R}^2)=e^{-1}.$$

b) Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} \left(x^2 - 2\,y^2\right),$$

ist (als Produkt und Komposition von Polynomfunktionen und der Exponentialfunktion) beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\partial_1 f(x,y) = \left(e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2\,x)\right) \cdot \left(x^2 - 2\,y^2\right) + e^{-(x^2+y^2)} \cdot (2\;x) = \\ = -2\,x\,e^{-(x^2+y^2)} \cdot \left(x^2 - 2\,y^2 - 1\right)$$

und

$$\partial_2 f(x,y) = \left(e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2\,y)\right) \cdot \left(x^2 - 2\,y^2\right) + e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-4\,y) = \\ = -2\,y\,e^{-(x^2+y^2)} \cdot \left(x^2 - 2\,y^2 + 2\right).$$

Als lokale Extrema der Funktion f kommen nur deren kritische Punkte, also diejenigen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$ in Frage. Aus $\partial_1 f(x,y) = 0$ folgt wegen $e^{-(x^2+y^2)} > 0$ schon

$$x = 0 \qquad \text{oder} \qquad x^2 - 2\,y^2 - 1 = 0;$$

im Falle $x = 0$ folgt dann aus $\partial_2 f(x,y) = 0$ erneut wegen $e^{-(x^2+y^2)} > 0$ schon $y = 0$ oder $-2\,y^2 + 2 = 0$ bzw. $y^2 = 1$, also $y \in \{-1, 0, 1\}$, und im Falle $x^2 - 2\,y^2 - 1 = 0$ ist neben $e^{-(x^2+y^2)} > 0$ auch $x^2 - 2\,y^2 + 2 = 3 > 0$, so daß aus $\partial_2 f(x,y) = 0$ schon $y = 0$ und damit $x^2 = 1$, also $x \in \{-1, 1\}$ folgt. Damit kommen als lokale Extrema nur die fünf Punkte $(0;0)$ sowie $(\pm 1;0)$ und $(0;\pm 1)$ in Frage:

- Wegen $f(\pm 1;0) = e^{-1}$ nimmt f in den Punkten $(\pm 1;0)$ gemäß a) das globale Maximum an; insbesondere sind also $(\pm 1;0)$ lokale Maxima.
- Wegen $f(0;\pm 1) = -2\,e^{-1}$ nimmt f in den Punkten $(0;\pm 1)$ gemäß a) das globale Minimum an; insbesondere sind also $(0;\pm 1)$ lokale Minima.
- Es ist $f(0;0) = 0$ sowie

  $$f(t;0) = e^{-t^2} t^2 > 0 \qquad \text{für alle} \quad t \neq 0$$

  und

  $$f(0;t) = e^{-t^2} \left(-2\,t^2\right) < 0 \qquad \text{für alle} \quad t \neq 0;$$

  dementsprechend nimmt f auf jeder (noch so kleinen) Kreisscheibe um dem Mittelpunkt $(0;0)$ sowohl positive als auch negative Funktionswerte an und kann daher im Punkt $(0;0)$ kein lokales Extremum besitzen.

7.41 a) Die gegebene Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{y^2} - \frac{y^2}{16},$$

mit

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ und } y \neq 0\}$$

ist (als gebrochenrationale Funktion) beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in D$ gilt

$$\partial_1 f(x,y) = -\frac{1}{x^2} + x^2 \qquad \text{und} \qquad \partial_2 f(x,y) = \frac{2}{y^3} - \frac{y}{8}$$

sowie

$$\partial_1\partial_1 f(x,y) = \frac{2}{x^3} + 2\,x \qquad \text{und} \qquad \partial_2\partial_2 f(x,y) = -\frac{6}{y^4} - \frac{1}{8}$$

und

$$\partial_2\partial_1 f(x,y) = 0 = \partial_1\partial_2 f(x,y),$$

also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(-\frac{1}{x^2} + x^2,\ \frac{2}{y^3} - \frac{y}{8}\right)$$

und

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} + 2\,x & 0 \\ 0 & -\frac{6}{y^4} - \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Für eine kritische Stelle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ von f gilt $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$; wegen

$$\partial_1 f(x,y) = 0 \iff x^2 = \frac{1}{x^2} \iff x^4 = 1 \iff x = \pm 1$$

und

$$\partial_2 f(x,y) = 0 \iff \frac{y}{8} = \frac{2}{y^3} \iff y^4 = 16 \iff y = \pm 2$$

kommen als lokale Extrema von f nur die vier Punkte $(1,2)$ und $(1,-2)$ sowie $(-1,2)$ und $(-1,-2)$ in Frage:

- Es gilt

  $$\operatorname{grad} f(1,\pm 2) = (0,0) \quad \text{und} \quad \operatorname{Hess} f(1,\pm 2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

  und wegen $\det\left(\operatorname{Hess} f(1,\pm 2)\right) = -2 < 0$ ist $\operatorname{Hess} f(1,\pm 2)$ indefinit; damit besitzt f in $(1,\pm 2)$ Sattelpunkte, also keine lokalen Extrema.
- Es gilt

  $$\operatorname{grad} f(-1,\pm 2) = (0,0) \quad \text{und} \quad \operatorname{Hess} f(-1,\pm 2) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

  damit besitzt $\operatorname{Hess} f(-1,\pm 2)$ die beiden negativen Eigenwerte -4 und $-\frac{1}{2}$ und ist folglich negativ definit. Daher besitzt f in $(-1,\pm 2)$ (isolierte) lokale Maxima.

Folglich besitzt die Funktion f genau zwei lokale Extrema, nämlich die beiden (isolierten) lokalen Maxima in den Punkten $(-1,\pm 2)$.

b) Wir betrachten das Verhalten von der Funktion f auf der Winkelhalbierenden $\{(t,t) \mid t \in \mathbb{R}^+\}$ des 1. Quadranten und erhalten

$$f(t,t) = \frac{1}{t} + \frac{t^3}{3} - \frac{1}{t^2} - \frac{t^2}{16} = \underbrace{t^3}_{\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{t^4}}_{\to 0} + \frac{1}{3} - \underbrace{\frac{1}{t^5}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{16\,t^2}}_{\to 0}\right) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty;$$

damit ist f nicht nach oben beschränkt.

7.42 Die Funktion

$$f :]-1;1[\times \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = e^x \cos y + e^{-x} \sin y$$

ist als Summe aus Produkten und Quotienten der Exponentialfunktion sowie von trigonometrischen Funktionen selbst beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in]-1;1[\times \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ gilt

$$\partial_1 f(x,y) = e^x \cos y - e^{-x} \sin y \qquad \text{und} \qquad \partial_2 f(x,y) = -e^x \sin y + e^{-x} \cos y$$

sowie

$$\partial_1 \partial_1 f(x,y) = e^x \cos y + e^{-x} \sin y \quad \text{und} \quad \partial_2 \partial_2 f(x,y) = -e^x \cos y - e^{-x} \sin y$$

und

$$\partial_1 \partial_2 f(x,y) = -e^x \sin y - e^{-x} \cos y = \partial_2 \partial_1 f(x,y).$$

Für einen kritischen Punkt $(x,y) \in]-1;1[\times\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ von f gilt $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$, also

$$\partial_1 f(x,y) = e^x \cos y - e^{-x} \sin y = 0 \qquad \text{und damit} \qquad e^x \cos y = e^{-x} \sin y$$

und

$$\partial_2 f(x,y) = -e^x \sin y + e^{-x} \cos y = 0 \qquad \text{und damit} \qquad e^{-x} \cos y = e^x \sin y;$$

wegen $y \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ ist $\sin y > 0$ und $\cos y > 0$, und wir erhalten

$$e^{2x} = \frac{e^x \cos y}{e^{-x} \cos y} = \frac{e^{-x} \sin y}{e^x \sin y} = e^{-2x},$$

woraus sich $2x = -2x$, also $x = 0$, und damit $\cos y = \sin y$, also $y = \frac{\pi}{4}$ ergibt. Wegen $\operatorname{grad} f\left(0,\frac{\pi}{4}\right) = (0,0)$ ist $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ tatsächlich ein kritischer Punkt von f. Da

$$\operatorname{Hess} f\left(0,\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} & -\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

wegen $\det \operatorname{Hess} f\left(0,\frac{\pi}{4}\right) = -4 < 0$ indefinit ist, besitzt f in $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ einen Sattelpunkt; insbesondere ist f ohne lokale Extrema.