LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Differential– und Integralrechnung 6
— Lösungsvorschlag —

6.1 Für $x \in \mathbb{R}$ besitzt der Punkt $(x; x^2)$ der gegebenen Parabel $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ vom Punkt $(0; r)$ den Abstand

$$d(x) = \| \left(x; x^2\right) - (0; r) \| = \| \left(x; x^2 - r\right) \| = \sqrt{x^2 + (x^2 - r)^2},$$

der aufgrund des Monotonieverhaltens der Quadratwurzel genau dann minimal ist, wenn der Radikand

$$h(x) = x^2 + \left(x^2 - r\right)^2$$

minimal ist. Zunächst ist die Funktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x^2 + \left(x^2 - r\right)^2,$$

als Polynomfunktion stetig und differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$h'(x) = 2\,x + 2\left(x^2 - r\right) \cdot 2\,x = 4\,x \cdot \left(x^2 + \tfrac{1}{2} - r\right).$$

Wir treffen daher die folgende Fallunterscheidung:

- Für $r \leq \frac{1}{2}$ gilt

$$h'(x) = 4\,x \cdot \underbrace{\left(x^2 + \underbrace{\tfrac{1}{2} - r}_{\geq 0}\right)}_{>0} \begin{cases} < 0, & \text{für } x < 0, \\ > 0, & \text{für } x > 0; \end{cases}$$

  damit ist h auf $\mathbb{R}_0^-$ streng monoton fallend sowie auf $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton steigend und nimmt daher genau für $x = 0$ das globale Minimum an. Folglich ist $(0, 0)$ der Punkt auf der Parabel $y = x^2$ mit dem kürzesten Abstand zu dem Punkt $(0, r)$.

- Für $r > \frac{1}{2}$ ist $r - \frac{1}{2} > 0$ mit

$$h'(x) = 4\,x \cdot \left(x^2 - \left(r - \tfrac{1}{2}\right)\right) = 4\,x \left(x - \sqrt{r - \tfrac{1}{2}}\right) \left(x + \sqrt{r - \tfrac{1}{2}}\right).$$

Wegen $h'(x) < 0$ für alle $x \in \left]-\infty; -\sqrt{r-\frac{1}{2}}\right[\cup \left]0; \sqrt{r-\frac{1}{2}}\right[$ ist h auf $\left]-\infty; -\sqrt{r-\frac{1}{2}}\right]$ und $\left[0; \sqrt{r-\frac{1}{2}}\right[$ jeweils streng monoton fallend, und wegen $h'(x) > 0$ für alle $x \in \left]-\sqrt{r-\frac{1}{2}}; 0\right[\cup \left]\sqrt{r-\frac{1}{2}}; \infty\right[$ ist h auf $\left[-\sqrt{r-\frac{1}{2}}; 0\right]$ und $\left[\sqrt{r-\frac{1}{2}}; \infty\right[$ jeweils streng monoton steigend; daher nimmt h genau für $\pm\sqrt{r-\frac{1}{2}}$ das globale Minimum an. Folglich sind

$$\left(-\sqrt{r-\frac{1}{2}}, r-\frac{1}{2}\right) \qquad \text{und} \qquad \left(\sqrt{r-\frac{1}{2}}, r-\frac{1}{2}\right)$$

die beiden Punkte auf der Parabel $y = x^2$ mit dem kürzesten Abstand zu dem Punkt $(0, r)$.

Damit ist $(0,0)$ genau dann der Punkt auf der Parabel $y = x^2$ mit dem kleinsten Abstand zu dem Punkt $(0, r)$, wenn $r \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ gilt.

6.2 Für $y \in \mathbb{R}$ besitzt der Punkt $\left(\frac{1}{2}\,y^2; y\right)$ der gegebenen Parabel

$$P = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 2\,x\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \tfrac{1}{2}\,y^2 = x\right\}$$

vom Punkt $(c; 0)$ den Abstand

$$d(y) = \left\|\left(\tfrac{1}{2}\,y^2; y\right) - (c;0)\right\| = \left\|\left(\tfrac{1}{2}\,y^2 - c; y\right)\right\| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\,y^2 - c\right)^2 + y^2},$$

der aufgrund des Monotonieverhaltens der Quadratwurzel genau dann minimal ist, wenn der Radikand

$$f(y) = \left(\tfrac{1}{2}\,y^2 - c\right)^2 + y^2$$

minimal ist. Zunächst ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(y) = \left(\tfrac{1}{2}\,y^2 - c\right)^2 + y^2,$$

als Polynomfunktion stetig und differenzierbar, und für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(y) = 2\left(\tfrac{1}{2}\,y^2 - c\right) \cdot y + 2\,y = y \cdot \left(y^2 + 2\,(1-c)\right).$$

Wir treffen daher die folgende Fallunterscheidung:

- Für $c \leq 1$ gilt

$$f'(y) = y \cdot \underbrace{\left(y^2 + \underbrace{2\,(1-c)}_{\geq 0}\right)}_{>0} \begin{cases} < 0, & \text{für } y < 0, \\ > 0, & \text{für } y > 0; \end{cases}$$

  damit ist f auf $\mathbb{R}_0^-$ streng monoton fallend sowie auf $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton steigend und nimmt daher genau für $y = 0$ das globale Minimum an. Dementsprechend ist $(0; 0)$ der Punkt auf der Parabel P mit dem minimalen Abstand zum Punkt $(c; 0)$.

- Für $c > 1$ ist $2(c-1) > 0$ mit

  $$f'(y) = y \cdot \left(y^2 - 2(c-1)\right) = y\left(y - \sqrt{2(c-1)}\right)\left(y + \sqrt{2(c-1)}\right).$$

  Wegen

  $$f'(y) < 0 \qquad \text{für alle} \quad y \in \left]-\infty; -\sqrt{2(c-1)}\right[\cup \left]0; \sqrt{2(c-1)}\right[$$

  ist f auf $\left]-\infty; \sqrt{2(c-1)}\right]$ und $\left[0; \sqrt{2(c-1)}\right[$ jeweils streng monoton fallend, und wegen

  $$f'(y) > 0 \qquad \text{für alle} \quad y \in \left]-\sqrt{2(c-1)}; 0\right[\cup \left]\sqrt{2(c-1)}; \infty\right[$$

  ist f auf $\left[-\sqrt{2(c-1)}; 0\right]$ und $\left[\sqrt{2(c-1)}; \infty\right[$ jeweils streng monoton steigend; damit nimmt f genau für $\pm\sqrt{2(c-1)}$ das globale Minimum an. Dementsprechend sind $\left(c-1; \pm\sqrt{2(c-1)}\right)$ die beiden Punkte auf der Parabel P mit dem minimalen Abstand zum Punkt $(c; 0)$.

6.3 Bei der zu betrachtenden Menge

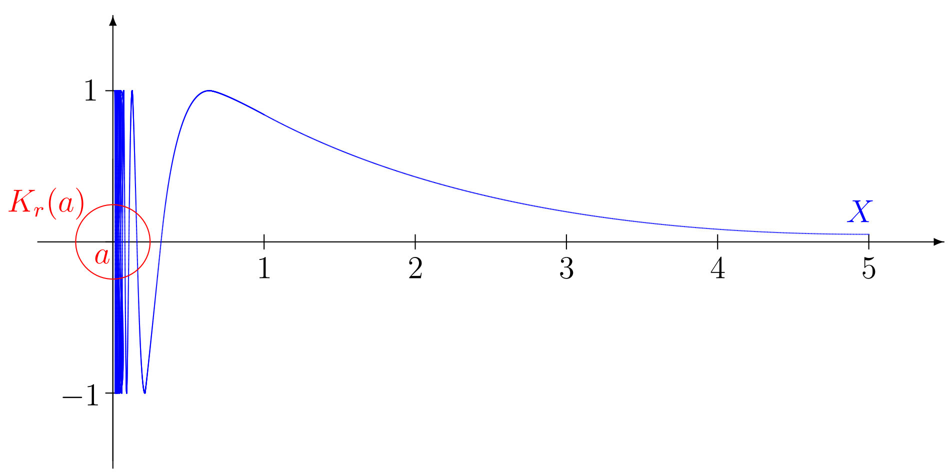
$$X = \left\{ \left(x,\ \sin\frac{1}{x}\right) \mid x \in \mathbb{R}^+ \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

handelt es sich um den Graphen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin\frac{1}{x};$$

dabei gilt

$$f(x) = 0 \iff \sin\frac{1}{x} = 0 \underset{x>0}{\iff} \frac{1}{x} = k\pi, \quad \text{also} \quad x = \frac{1}{k\pi} \quad \text{für ein} \quad k \in \mathbb{N}.$$



Sei $a = (0,0) \in \mathbb{R}^2$. Für jedes $r > 0$ betrachten wir die offene Kreisscheibe $K_r(a)$ um den Mittelpunkt a mit dem Radius r:

- Es ist $a \in K_r(a)$, und wegen $X \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ ist $a \notin X$. Folglich gilt $K_r(a) \nsubseteq X$.
- Wegen $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k\pi} = 0$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_0 = \frac{1}{k_0\pi} < r$, also $(x_0, 0) \in K_r(a)$, und wegen $x_0 \in \mathbb{R}^+$ mit $f(x_0) = \sin\frac{1}{x_0} = \sin(k_0\pi) = 0$ ist $(x_0, 0) \in X$. Folglich ist $K_r(a) \cap X \neq \emptyset$.

Damit ist a ein Randpunkt von X.

6.4 a) Die gegebene Kurve

$$\gamma : [1;2] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \left(t^3 - 3t + 2,\ 12 - 3t^2\right),$$

mit den Koordinatenfunktionen

$$\gamma_1(t) = t^3 - 3t + 2 \qquad \text{und} \qquad \gamma_2(t) = 12 - 3t^2$$

ist stetig differenzierbar mit

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t),\ \gamma_2'(t)) = \left(3t^2 - 3,\ -6t\right)$$

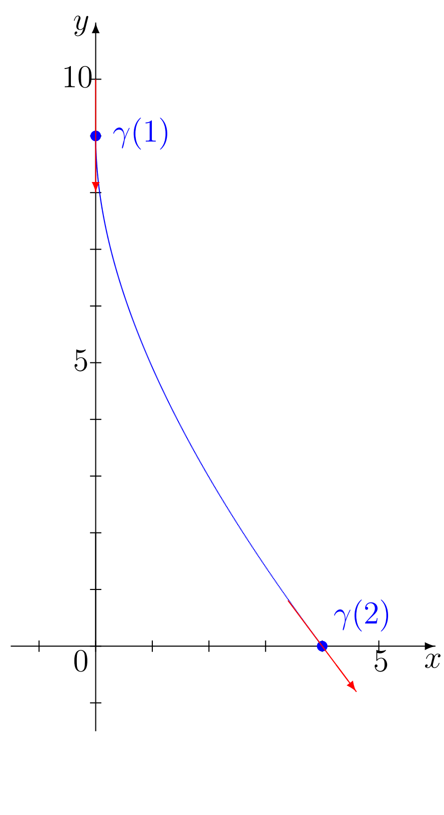
für alle $t \in [1;2]$. Damit ergeben sich für $t = 1$ und $t = 2$ die Kurvenpunkte

$$\gamma(1) = (0,9) \qquad \text{und} \qquad \gamma(2) = (4,0)$$

mit den Tangentialvektoren

$$\gamma'(1) = (0,-6) \qquad \text{und} \qquad \gamma'(2) = (9,-12).$$

Damit ergibt sich für die Bildmenge $K = \{\gamma(t) \mid t \in [1;2]\}$ folgende Skizze:



b) Wegen

$$\begin{aligned}\|\gamma'(t)\| &= \left\|\left(3t^2-3,\ -6t\right)\right\| = 3\left\|\left(t^2-1,\ -2t\right)\right\| = \\ &= 3\sqrt{\left(t^2-1\right)^2+\left(-2t\right)^2} = 3\sqrt{t^4-2t^2+1+4t^2} = \\ &= 3\sqrt{t^4+2t^2+1} = 3\sqrt{\left(t^2+1\right)^2} = 3\left(t^2+1\right) = 3t^2+3,\end{aligned}$$

für alle $t \in [1;2]$ ergibt sich für die gesuchte Bogenlänge L von K dann

$$L = \int_1^2 \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_1^2 \left(3t^2+3\right)dt = \Big[t^3+3t\Big]_1^2 = (8+6)-(1+3) = 10.$$

6.5 Die Kurve

$$\gamma : \left[-\tfrac{1}{\sqrt{3}}; \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \left(3\,t^2-1;\ 3\,t^3-t\right),$$

ist stetig differenzierbar mit $\gamma'(t) = (6\,t;\ 9\,t^2-1)$ und damit

$$\begin{aligned}\|\gamma'(t)\| &= \sqrt{(6\,t)^2+\left(9\,t^2-1\right)^2} = \sqrt{36\,t^2+81\,t^4-18\,t^2+1} = \\ &= \sqrt{81\,t^4+18\,t^2+1} = \sqrt{\left(9\,t^2+1\right)^2} = 9\,t^2+1\end{aligned}$$

für alle $t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$; folglich ist γ rektifizierbar, und für ihre Länge L gilt

$$\begin{aligned}L &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(9\,t^2+1\right)\,dt = 2\cdot\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(9\,t^2+1\right)\,dt = \\ &= 2\cdot\left[3\,t^3+t\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2\cdot\left(3\cdot\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

6.6 Wir bestimmen zunächst die Schnittpunkte der gegebenen Kurve

$$f : [0,\infty[\ \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (x(t),\ y(t)) = \left(\tfrac{t^6}{6},\ 2-\tfrac{t^4}{4}\right).$$

mit den beiden Koordinatenachsen:

- Für den Schnittpunkt S_y mit der y–Achse gilt

$$x(t) = 0 \iff \frac{t^6}{6} = 0 \iff t^6 = 0 \iff t = 0;$$

  damit ergibt sich $y(0) = 2$ und folglich $S_y = (0;2)$.

- Für den Schnittpunkt S_x mit der x–Achse gilt

$$y(t) = 0 \iff 2-\frac{t^4}{4} = 0 \iff t^4 = 8 \iff t = \sqrt[4]{8};$$

  damit ergibt sich $x(\sqrt[4]{8}) = \frac{1}{6}\left(\sqrt[4]{8}\right)^6 = \frac{1}{6}\sqrt{2}^{\,9}$ und folglich $S_x = \left(\frac{1}{6}\sqrt{2}^{\,9};0\right)$.

Des weiteren ist die Kurve f stetig differenzierbar mit

$$f'(t) = \left(t^5,\ -t^3\right)$$

und damit

$$\begin{aligned} \|f'(t)\| = \sqrt{(t^5)^2 + (-t^3)^2} &= \sqrt{t^{10} + t^6} = \sqrt{t^6\,(t^4+1)} = \\ &= \sqrt{t^6} \cdot \sqrt{t^4+1} = \left|t^3\right| \cdot \sqrt{t^4+1} \underset{t \geq 0}{=} t^3 \cdot \sqrt{t^4+1} \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, \infty[$; insbesondere ist die Kurve f auf dem Intervall $\left[0; \sqrt[4]{8}\right]$ rektifizierbar, und unter Verwendung der Substitution

$$u = g(t) = t^4 + 1 \quad \text{mit} \quad \frac{du}{dt} = 4\,t^3, \quad \text{also} \quad du = 4\,t^3\,dt,$$

ergibt sich für ihre Bogenlänge zwischen den Schnittpunkten mit den beiden Koordinatenachsen dann

$$\begin{aligned} L = \int_0^{\sqrt[4]{8}} \|f'(t)\|\,dt &= \int_0^{\sqrt[4]{8}} t^3 \cdot \sqrt{t^4+1}\,dt = \frac{1}{4} \int_0^{\sqrt[4]{8}} \sqrt{t^4+1} \cdot 4\,t^3\,dt = \\ &= \frac{1}{4} \int_{g(0)}^{g(\sqrt[4]{8})} \sqrt{u}\,du = \frac{1}{4} \int_1^9 u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{4} \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^9 = \frac{9^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}}{6} = \frac{27-1}{6} = \frac{13}{3}. \end{aligned}$$

6.7 Die gegebene Kurve

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = \left(e^{-t} \cos t,\ e^{-t} \sin t\right),$$

besitzt die beiden Koordinatenfunktionen

$$f_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad f_1(x) = e^{-t} \cos t,$$

und

$$f_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad f_2(x) = e^{-t} \sin t;$$

diese sind (als Produkte einer Exponentialfunktion und trigonometrischer Funktionen) stetig differenzierbar, und für alle $t \in [0, 2\pi]$ gilt

$$f_1'(t) = (-e^{-t}) \cos t + e^{-t}(-\sin t) = -e^{-t} (\cos t + \sin t)$$

und

$$f_2'(t) = (-e^{-t}) \sin t + e^{-t} \cos t = e^{-t} (\cos t - \sin t).$$

Damit ist die Kurve f stetig differenzierbar, und für alle $t \in [0, 2\pi]$ besitzt der Tangentialvektor $f'(t) = (f_1'(t), f_2'(t))$ wegen

$$\begin{aligned} \|f'(t)\|^2 &= (f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2 = \\ &= \left(-e^{-t} (\cos t + \sin t)\right)^2 + \left(e^{-t} (\cos t - \sin t)\right)^2 = \\ &= (e^{-t})^2 \left(\cos^2 t + 2 \cos t \sin t + \sin^2 t\right) + \\ &\qquad + (e^{-t})^2 \left(\cos^2 t - 2 \cos t \sin t + \sin^2 t\right) = \\ &= 2\,(e^{-t})^2 \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = 2\,(e^{-t})^2 \end{aligned}$$

die Länge

$$\|f'(t)\| = \sqrt{2\,(e^{-t})^2} = \sqrt{2}\,e^{-t};$$

folglich ist die Kurve f rektifizierbar, und für ihre Bogenlänge L ergibt sich

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \|f'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,e^{-t}\,dt = \sqrt{2}\cdot\int_0^{2\pi} e^{-t}\,dt = \\ &= \sqrt{2}\cdot\left[-e^{-t}\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\cdot\left[(-e^{-2\pi}) - (-e^0)\right] = \sqrt{2}\left(1 - e^{-2\pi}\right). \end{aligned}$$

6.8 a) Die Funktion

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),$$

ist (als Summe und Verkettung differenzierbarer Funktionen) selbst differenzierbar; für die Ableitung des ersten Summanden

$$F_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad F_1(x) = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{1+x^2}$$

verwenden wir die Produktregel und (für die Ableitung des zweiten Faktors) die Kettenregel und erhalten

$$F_1'(x) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+x^2} + \frac{x}{2}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2\,x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2}}$$

für alle $x\in\mathbb{R}$; für die Ableitung des zweiten Summanden

$$F_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad F_2(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

verwenden wir dann (zweimal) die Kettenregel und erhalten

$$\begin{aligned} F_2'(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot(2\,x)\right) = \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

für alle $x\in\mathbb{R}$. Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2}}\right) + \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{x^2+1}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{\sqrt{1+x^2}^{\,2}}{2\sqrt{1+x^2}} = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x^2} = f(x) \end{aligned}$$

für alle $x\in\mathbb{R}$; damit ist F eine Stammfunktion der Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

b) Die gegebene Kurve

$$\gamma : [0; 6\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = t \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot \cos t \\ t \cdot \sin t \end{pmatrix},$$

besitzt die beiden stetig differenzierbaren Koordinatenfunktionen

$$\gamma_1 : [0; 6\pi] \to \mathbb{R}, \quad \gamma_1(t) = t \cdot \cos t,$$

mit

$$\gamma_1'(t) = 1 \cdot \cos t + t \cdot (-\sin t) = \cos t - t \, \sin t$$

für alle $t \in [0; 6\pi]$ und

$$\gamma_2 : [0; 6\pi] \to \mathbb{R}, \quad \gamma_2(t) = t \cdot \sin t,$$

mit

$$\gamma_2'(t) = 1 \cdot \sin t + t \cdot \cos t = \sin t + t \, \cos t$$

für alle $t \in [0; 6\pi]$; folglich ist γ eine stetig differenzierbare Kurve, und für alle $t \in [0; 6\pi]$ gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t - t \, \sin t \\ \sin t + t \, \cos t \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\|^2 &= \gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 = (\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 = \\ &= \left(\cos^2 t - 2\cos t \cdot t \sin t + t^2 \sin^2 t\right) + \left(\sin^2 t + 2 \sin t \cdot t \cos t + t^2 \cos^2 t\right) = \\ &= \underbrace{\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}_{=1} + t^2 \underbrace{\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}_{=1} = 1 + t^2 \end{aligned}$$

und damit

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+t^2} = f(t).$$

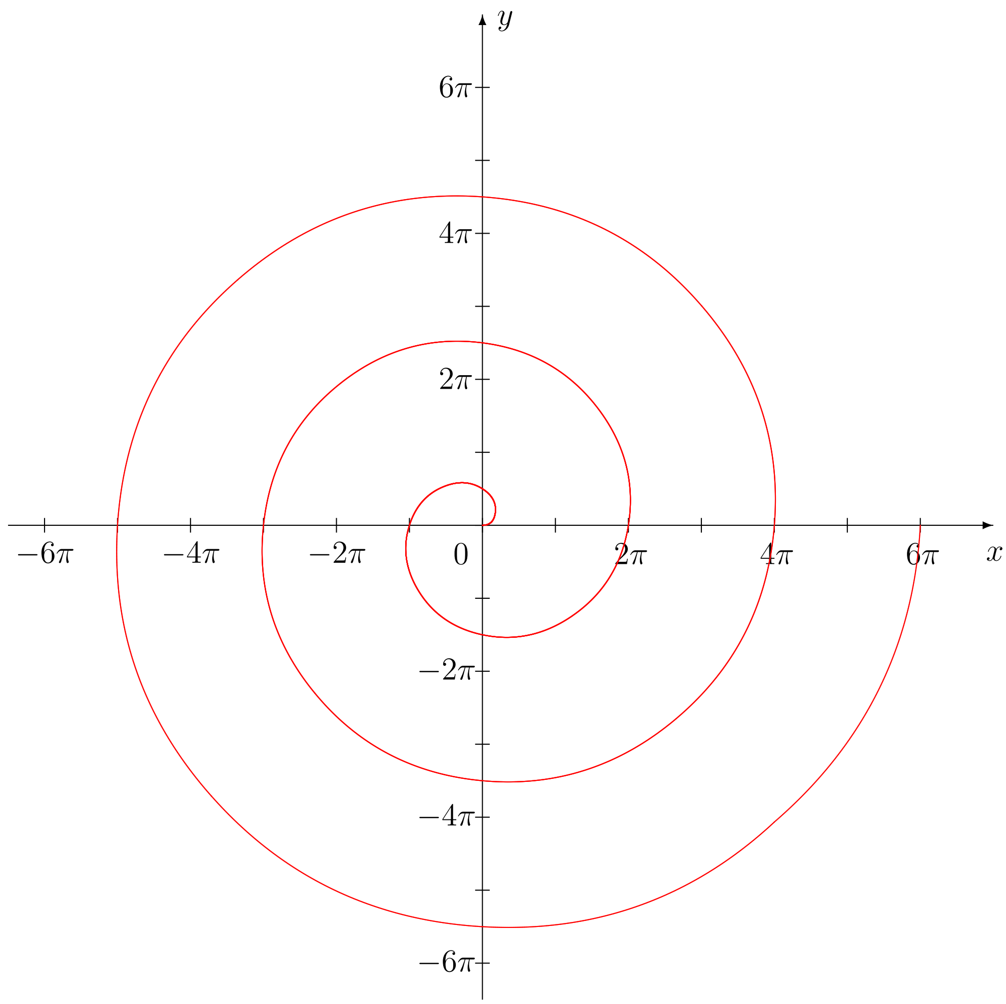
Die stetig differenzierbare Kurve γ ist insbesondere rektifizierbar, und für ihre Bogenlänge L gilt

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{6\pi} \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^{6\pi} f(t) \, dt = [F(t)]_0^{6\pi} = F(6\pi) - F(0) = \\ &= \left(\frac{6\pi}{2} \sqrt{1 + (6\pi)^2} + \frac{1}{2} \ln \left(6\pi + \sqrt{1 + (6\pi)^2} \right) \right) - \\ &\quad - \left(\frac{0}{2} \sqrt{1 + 0^2} + \frac{1}{2} \ln \left(0 + \sqrt{1 + 0^2} \right) \right) = \\ &= 3\pi \sqrt{1 + 36\pi^2} + \frac{1}{2} \ln \left(6\pi + \sqrt{1 + 36\pi^2} \right). \end{aligned}$$

c) Für die Skizze der Bildmenge

$$\gamma\left([0; 6\pi]\right) = \{\gamma(t) \mid 0 \leq t \leq 6\pi\}$$

kann man zunächst für einige Werte von t, etwa den Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$, den Kurvenpunkt $\gamma(t)$ und den Tangentialvektor $\gamma'(t)$ berechnen und in das Koordinatensystem eintragen, um dann die entstehende Spirale zu zeichnen:



6.9 a) Für die gegebene Kurve

$$f : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = \left(\cos^3 t, \ \ \sin^3 t\right),$$

besitzt der Punkt $f(t) \in K$ für $t \in [0; 2\pi]$ vom Ursprung $(0,0)$ den Abstand

$$d(t) = \|f(t)\| = \left\|\left(\cos^3 t, \ \ \sin^3 t\right)\right\| = \sqrt{\left(\cos^3 t\right)^2 + \left(\sin^3 t\right)^2};$$

aufgrund der Monotonie der Quadratwurzel ist $d(t)$ genau dann minimal bzw. maximal, wenn $d(t)^2$ minimal bzw. maximal ist. Wegen

$$\begin{aligned} d(t)^2 &= \cos^6 t + \sin^6 t = \left(\cos^2 t\right)^3 + \sin^6 t = \left(1 - \sin^2 t\right)^3 + \sin^6 t = \\ &= \left(1 - 3\sin^2 t + 3\sin^4 t - \sin^6 t\right) + \sin^6 t = 1 - 3\sin^2 t\left(1 - \sin^2 t\right) = \\ &= 1 - 3\sin^2 t \cos^2 t = 1 - \frac{3}{4}\left(2\sin t\cos t\right)^2 = 1 - \frac{3}{4}\sin^2(2t) \end{aligned}$$

ergibt sich wegen $0 \le \sin^2(2t) \le 1$

$$\frac{1}{4} \le d(t)^2 \le 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{2} \le d(t) \le 1$$

mit

$$d(t) = \frac{1}{2} \iff d(t)^2 = \frac{1}{4} \iff \sin^2(2t) = 1 \iff \sin(2t) = \pm 1 \iff$$

$$\iff 2t \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \right\} \iff t \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

und

$$d(t) = 1 \iff d(t)^2 = 1 \iff \sin^2(2t) = 0 \iff \sin(2t) = 0 \iff$$

$$\iff 2t \in \{0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi\} \iff t \in \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\}.$$

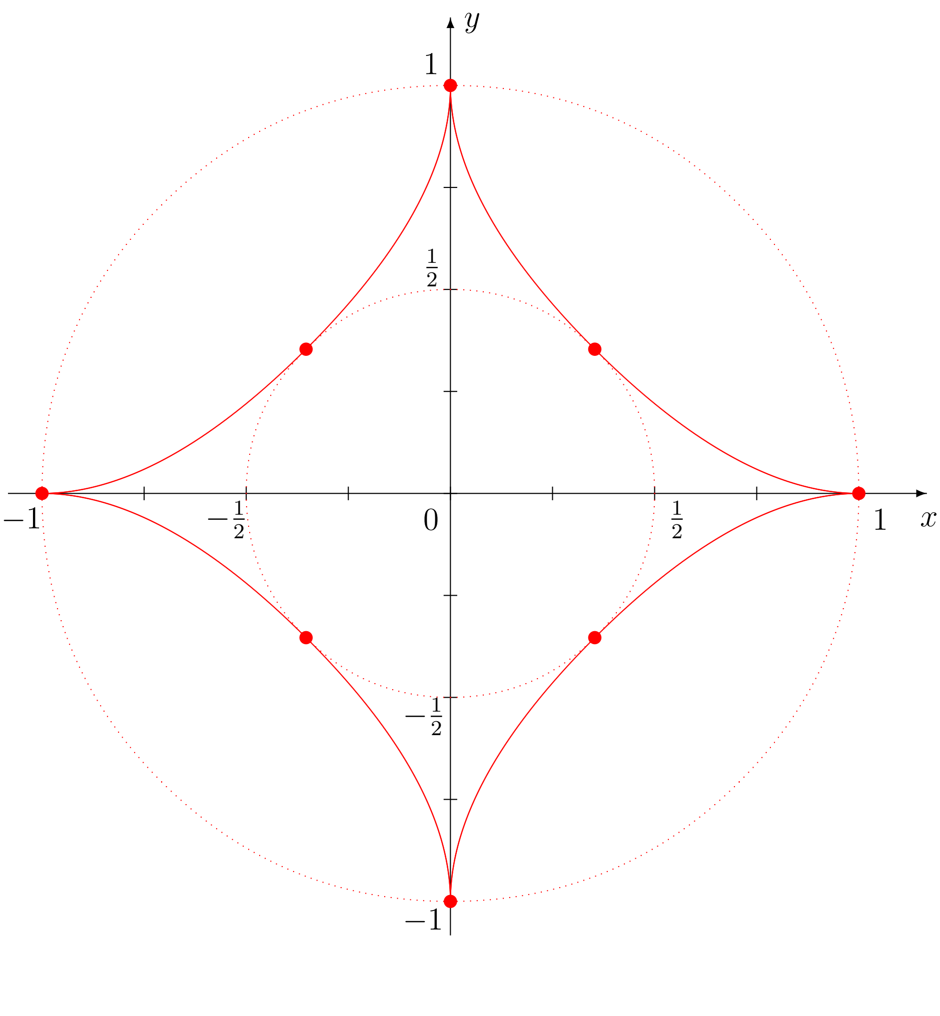
b) Gemäß a) besitzen die Kurvenpunkte

t	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
$f(t)$	$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$	$\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$	$\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$	$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

den kleinsten Abstand $\frac{1}{2}$ und

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(t)$	$(1, 0)$	$(0, 1)$	$(-1, 0)$	$(0, -1)$	$(1, 0)$

den größten Abstand 1 vom Ursprung $(0, 0)$; damit ergibt sich die folgende Skizze der Bildmenge K:



c) Die gegebene Kurve f ist stetig differenzierbar mit

$$f'(t) = \big(3\cos^2 t \cdot (-\sin t)\,, 3\sin^2 t \cdot \cos t\big) = 3\sin t \cos t \cdot (-\cos t, \sin t)$$

und damit

$$\begin{aligned}
\|f'(t)\| &= \|3\sin t\cos t \cdot (-\cos t, \sin t)\| \\
&= |3\sin t \cos t| \cdot \|(-\cos t, \sin t)\| \\
&= \left|\frac{3}{2}\cdot(2\sin t\cos t)\right| \cdot \sqrt{(-\cos t)^2 + (\sin t)^2} \\
&= \left|\frac{3}{2}\cdot \sin(2t)\right| \cdot \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} \\
&= \frac{3}{2}\,|\sin(2t)|
\end{aligned}$$

für alle $t \in [0; 2\pi]$. Folglich ist die Kurve f rektifizierbar, und für die gesuchte Bogenlänge ergibt sich aufgrund der Periodizität der Sinusfunktion

$$L = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{3}{2}\,|\sin(2t)|\; dt = \frac{3}{2}\cdot 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(2t)|\; dt =$$
$$= 6 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\, dt = 6 \cdot \left[\frac{-\cos(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6 \cdot \left(\frac{-\cos\pi}{2} - \frac{-\cos 0}{2}\right) = 6.$$

6.10 In Abhängigkeit von den Parametern a, $b \in \mathbb{R}^+$ ist die Kurve

$$c : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad c(t) = \begin{pmatrix} a\,\cos t \\ a\,\sin t \\ b\,t \end{pmatrix},$$

mit der Bildmenge $B = \{c(t) \mid t \in [0,1]\} \subseteq \mathbb{R}^3$ zu betrachten. Damit besitzt c die drei stetig differenzierbaren Koordinatenfunktionen c_1, c_2, $c_3 : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$c_1(t) = a\,\cos t, \qquad c_2(t) = a\,\sin t, \qquad c_3(t) = b\,t$$

und somit

$$c_1'(t) = -a\,\sin t, \qquad c_2'(t) = a\,\cos t, \qquad c_3'(t) = t$$

für alle $t \in [0,1]$; folglich ist die Kurve c stetig differenzierbar, und für $t \in [0,1]$ erhält man den Tangentialvektor

$$c'(t) = \begin{pmatrix} -a\,\sin t \\ a\,\cos t \\ b \end{pmatrix}$$

der Länge

$$\|c'(t)\| = \sqrt{(-a\,\sin t)^2 + (a\,\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} =$$
$$= \sqrt{a^2\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) + b^2} = \sqrt{a^2 \cdot 1 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

a) Die Kurve $c : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ ist stetig differenzierbar, mithin rektifizierbar, und für ihre Bogenlänge gilt

$$L = \int_0^1 \|c'(t)\| \, dt = \int_0^1 \sqrt{a^2+b^2} \, dt = \Big[\sqrt{a^2+b^2}\Big]_0^1 = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Für alle $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ gilt wegen $b > 0$ schon $c_3(t_1) = b\,t_1 < b\,t_2 = c_3(t_2)$, insbesondere also $c(t_1) \neq c(t_2)$; damit ist c ohne Doppelpunkt, und die Bogenlänge der Bildmenge B stimmt sicher mit der Bogenlänge der Kurve c überein.

b) Für alle $t \in [0,1]$ gilt für den Winkel $\alpha(t)$ zwischen dem Tangentialvektor $c'(t)$ und dem Einheitsvektor e_3 gemäß Definition

$$\cos\alpha(t) = \frac{c'(t) \circ e_3}{\|c'(t)\| \cdot \|e_3\|}$$

mit

$$c'(t) \circ e_3 = \begin{pmatrix} -a \, \sin t \\ a \, \cos t \\ b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-a \, \sin t) \cdot 0 + (a \, \cos t) \cdot 0 + b \cdot 1 = b,$$

also

$$\cos\alpha(t) = \frac{c'(t) \circ e_3}{\|c'(t)\| \cdot \|e_3\|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot 1} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

folglich ist

$$\alpha(t) = \arccos \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

von t unabhängig, also konstant.

6.11 a) Die Kurve $K : [0; 2\,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $K(t) = (\varphi(t),\ \psi(t))$, mit

$$\varphi(t) = t - \sin t \qquad \text{und} \qquad \psi(t) = 1 - \cos t$$

ist stetig differenzierbar mit

$$\varphi'(t) = 1 - \cos t \qquad \text{und} \qquad \psi'(t) = \sin t$$

und damit

$$\begin{aligned} \|K'(t)\| &= \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = \\ &= \sqrt{1 - 2\,\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} \underset{\cos^2 t + \sin^2 t = 1}{=} \sqrt{2\,(1-\cos t)} = \\ &\underset{1-\cos t = 2\,\sin^2 \frac{t}{2}}{=} \sqrt{4\,\sin^2 \frac{t}{2}} = 2\,\left|\sin\frac{t}{2}\right| \underset{0 \leq \frac{t}{2} \leq \pi}{=} 2\,\sin\frac{t}{2} \end{aligned}$$

für alle $t \in [0; 2\,\pi]$; folglich ist γ rektifizierbar, und für ihre Länge L gilt

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \|K'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} 2\,\sin\frac{t}{2} \, dt = \left[2 \cdot \frac{-\cos\frac{t}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{2\pi} = \\ &= -4 \cdot \left[\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = -4 \cdot (\cos\pi - \cos 0) = -4 \cdot ((-1) - 1) = 8. \end{aligned}$$

b) Die erste Koordinatenfunktion

$$\varphi : [0; 2\,\pi] \to \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = t - \sin t,$$

ist wegen $\varphi'(t) = 1 - \cos t > 0$ für alle $t \in\,]0; 2\pi[$ streng monoton wachsend mit dem Wertebereich $W_x = [\varphi(0); \varphi(2\pi)] = [0; 2\,\pi]$; damit tritt aber jedes $x \in [0; 2\,\pi]$ für genau ein $t \in \mathbb{R}$ auf, nämlich für

$$x = \varphi(t) \iff t = \varphi^{-1}(x),$$

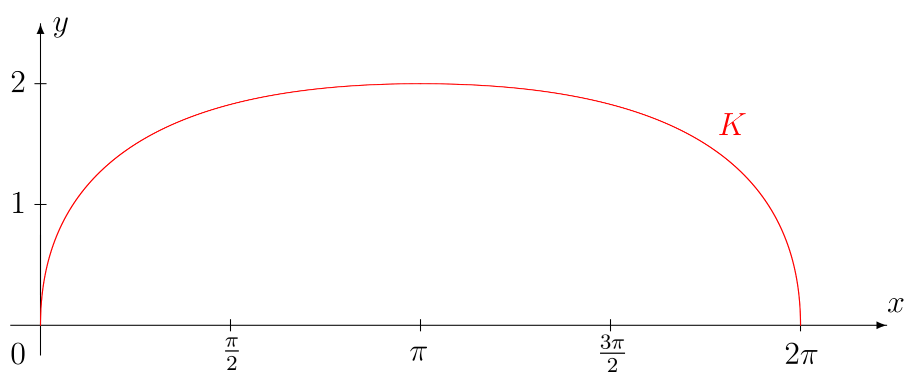
und das dazugehörige $y \in \mathbb{R}$ ist dann

$$y = \psi(t) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right).$$

Folglich beschreibt die Kurve K den Graphen der Funktion

$$f : [0; 2\,\pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right),$$

und es ist $f(\varphi(t)) = \psi(t)$ für alle $t \in [0; 2\,\pi]$.



Für den Inhalt A der Fläche, die von der Kurve und der x–Achse eingeschlossen wird, ergibt sich demnach mit Hilfe der Substitionsregel

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(2\pi)} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\,dt = \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\,\cos t + \cos^2 t\right) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\,\cos t + \frac{\cos(2t)}{2}\right) dt = \left[\frac{3}{2}\,t - 2\,\sin t + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{2\pi} = \\ &= \left(\frac{3}{2}\cdot 2\,\pi - 2\,\underbrace{\sin(2\,\pi)}_{=0} + \underbrace{\frac{\sin(4\,\pi)}{4}}_{=0}\right) - \left(0 - 2\,\underbrace{\sin 0}_{=0} + \underbrace{\frac{\sin 0}{4}}_{=0}\right) = 3\,\pi; \end{aligned}$$

dabei geht die für alle $t \in \mathbb{R}$ gültige Beziehung $\cos^2 t = \frac{1}{2}\,(1 + \cos(2\,t))$ ein.

6.12 Der Rand der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\right\}$$

ist die Kreislinie

$$\partial B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

um dem Mittelpunkt $(0,0)$ mit dem Radius $r = 1$; wir wählen für $\partial B \subseteq B$ die Parametrisierung

$$\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = (\cos t,\ \sin t)\,.$$

Damit ist die Funktion

$$h = f \circ \varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$$

als Verknüpfung der beiden stetigen Funktionen $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ und $f : B \to \mathbb{R}$ mit $W_\varphi = \partial B \subseteq D_f$ selbst stetig, und es gilt

$$h(0) = f(\varphi(0)) = f(1,0) = 1 \qquad \text{und} \qquad h(2\pi) = f(\varphi(2\pi)) = f(1,0) = 1$$

sowie

$$h(\pi) = f(\varphi(\pi)) = f(-1,0) = -1.$$

Folglich besitzt die Funktion h nach dem Nullstellensatz eine Nullstelle $\xi_1 \in \,]0,\pi[$ und eine Nullstelle $\xi_2 \in \,]\pi, 2\pi[$; damit ist aber $p_1 = \varphi(\xi_1)$ ein Punkt von ∂B oberhalb der x–Achse mit

$$f(p_1) = f(\varphi(\xi_1)) = h(\xi_1) = 0$$

sowie $p_2 = \varphi(\xi_2)$ ein Punkt von ∂B unterhalb der x–Achse ebenfalls mit

$$f(p_2) = f(\varphi(\xi_2)) = h(\xi_2) = 0,$$

womit f auf dem Rand von B mindestens zwei voneinander verschiedene Nullstellen besitzt.

6.13 Wir haben eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf der Einheitskreislinie

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

zu betrachten und zu zeigen, daß f weder surjektiv noch injektiv sein kann.

- Die Einheitskreislinie D ist eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, mithin kompakt. Damit besitzt die stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ nach dem Satz von Weierstraß eine globale Minimalstelle $(p_1, q_1) \in D$ und eine globale Maximalstelle $(p_2, q_2) \in D$, und für alle $(x,y) \in D$ gilt

  $$f(p_1, q_1) \le f(x,y) \le f(p_2, q_2);$$

  folglich gilt für ihren Wertebereich

  $$W_f \subseteq [f(p_1,q_1),\ f(p_2,q_2)] \subsetneq \mathbb{R},$$

  so daß f nicht surjektiv ist.

- Wir betrachten auf D die beiden verschiedenen Punkte $(1,0)$ und $(-1,0)$: im Fall $f(1,0) = f(-1,0)$ ist f nicht injektiv, und ansonsten können wir ohne Einschränkung $f(1,0) > f(-1,0)$ annehmen, so daß für den Mittelwert

$$m = \frac{f(1,0) + f(-1,0)}{2} \qquad \text{dann} \qquad f(1,0) > m > f(-1,0)$$

gilt. Wir wählen nun für die Einheitskreislinie D die Parametrisierung

$$\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = (\cos t,\ \sin t)\,.$$

Damit ist die Funktion

$$h = f \circ \varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$$

als Verknüpfung der stetigen Funktionen $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ und $f : D \to \mathbb{R}$ mit $W_\varphi = D$ selbst stetig, und es gilt

$$h(0) = f(\varphi(0)) = f(1,0) \qquad \text{und} \qquad h(2\pi) = f(\varphi(2\pi)) = f(1,0)$$

sowie

$$h(\pi) = f(\varphi(\pi)) = f(-1,0),$$

also

$$h(0) > m > h(\pi) \qquad \text{sowie} \qquad h(\pi) < m < h(2\pi).$$

Folglich existiert für die Funktion h nach dem Zwischenwertsatz eine Stelle $\xi_1 \in\,]0, \pi[$ mit $h(\xi_1) = m$ und eine Stelle $\xi_2 \in\,]\pi, 2\pi[$ mit $h(\xi_2) = m$; damit ist aber $(p_1, q_1) = \varphi(\xi_1)$ ein Punkt von D oberhalb der x–Achse mit

$$f(p_1, q_1) = f(\varphi(\xi_1)) = h(\xi_1) = m$$

sowie $(p_2, q_2) = \varphi(\xi_2)$ ein Punkt von D unterhalb der x–Achse ebenfalls mit

$$f(p_2, q_2) = f(\varphi(\xi_2)) = h(\xi_2) = m.$$

Da nun (p_1, q_1) und (p_2, q_2) zwei verschiedene Punkte auf D mit $f(p_1, q_1) = f(p_2, q_2)$ sind, kann f nicht injektiv sein.

6.14 Für die Parameter a, $b \in \mathbb{R}_0^+$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{|x|^a \cdot |y|^b}{x^2 + y^2},$$

zu betrachten und dabei das Grenzverhalten von $f(x,y)$ für $(x,y) \to (0,0)$ zu bestimmen; hierfür verwenden wir zum Parameter $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Hilfsfunktion

$$h_r : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad h_r(t) = t^r = e^{r \cdot \ln t},$$

welche für $t \to 0+$ wegen

$$r \cdot \underbrace{\ln t}_{\to -\infty} \xrightarrow[t \to 0+]{} \begin{cases} -\infty, & \text{für } r > 0, \\ +\infty, & \text{für } r < 0, \end{cases}$$

das Grenzverhalten

$$h_r(t) = e^{r \cdot \ln t} \xrightarrow[t \to 0+]{} \begin{cases} 0, & \text{für } r > 0, \\ +\infty, & \text{für } r < 0, \end{cases}$$

besitzt.

a) Für $a+b>2$ ist $r=(a+b)-2>0$. Für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ mit $(x,y)\neq(0,0)$ ergibt sich mit $t=\sqrt{x^2+y^2}>0$ wegen

$$\begin{aligned} x^2 &\le x^2+y^2, \qquad \text{also} \qquad |x|=\sqrt{x^2}\le\sqrt{x^2+y^2}=t,\\ y^2 &\le x^2+y^2, \qquad \text{also} \qquad |y|=\sqrt{y^2}\le\sqrt{x^2+y^2}=t, \end{aligned}$$

und wegen $a,\, b\ge 0$ damit auch $|x|^a\le t^a$ und $|y|^b\le t^b$ zunächst

$$f(x,y)=\frac{|x|^a\cdot|y|^b}{x^2+y^2}\le\frac{t^a\cdot t^b}{t^2}=t^{(a+b)-2}=t^r=h_r(t);$$

für $(x,y)\to(0,0)$ gilt

$$t=\sqrt{x^2+y^2}\to 0 \qquad \text{mit} \qquad h_r(t)\to 0,$$

so daß wir nach dem Schrankenlemma dann

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x|^a\,|y|^b}{x^2+y^2}=0$$

erhalten.

b) Für $a+b<2$ ist $r=(a+b)-2<0$. Für das Verhalten von f auf der Winkelhalbierenden $\{(t,t)\mid t>0\}$ des 1. Quadranten ergibt sich

$$f(t,t)=\frac{|t|^a\cdot|t|^b}{t^2+t^2}=\frac{t^{a+b}}{2\,t^2}=\frac{t^{(a+b)-2}}{2}=\frac{t^r}{2}=\frac{h_r(t)}{2}\underset{t\to0+}{\longrightarrow}+\infty;$$

damit existiert der Grenzwert

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x|^a\,|y|^b}{x^2+y^2}$$

nicht (im eigentlichen Sinne). Schließlich ergibt sich für $a+b=2$ auf der Winkelhalbierenden $\{(t,t)\mid t>0\}$ des 1. Quadranten

$$f(t,t)=\frac{|t|^a\cdot|t|^b}{t^2+t^2}=\frac{t^{a+b}}{2\,t^2}=\frac{t^2}{2\,t^2}=\frac{1}{2}\underset{t\to0+}{\longrightarrow}\frac{1}{2},$$

auf der positiven x–Achse $\{(t,0)\mid t>0\}$ jedoch

$$f(t,0)=\frac{|t|^a\cdot|0|^b}{t^2+0^2}=t^{a-2}\cdot 0^b=\begin{cases}0\underset{t\to0+}{\longrightarrow}0, & \text{für } b>0,\\ t^{2-2}\cdot 0^0=1\underset{t\to0+}{\longrightarrow}1, & \text{für } b=0,\end{cases}$$

so daß der Grenzwert

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x|^a\,|y|^b}{x^2+y^2}$$

nicht existieren kann.

6.15 Für die auf dem kompakten Quadrat

$$Q = [0,1] \times [1,2] \subseteq \mathbb{R}^2$$

mit den Eckpunkten $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,2)$ und $(0,2)$ definierte Funktion

$$f : Q \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0, \\ x^y, & \text{falls } x \neq 0, \end{cases}$$

gilt gemäß der Definition der allgemeinen Potenz

$$f(x,y) = x^y = \exp(y \cdot \ln x) \qquad \text{für alle } \; x \in \,]0,1] \;\text{ und }\; y \in [1,2]\,.$$

a) Zum Nachweis der Stetigkeit der Funktion f im Punkt $(x_0,y_0) \in Q$ betrachten wir eine Folge $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten in Q mit

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (x_0,y_0), \qquad \text{also} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Im Falle $x_0 \neq 0$ ist auch $x_n \neq 0$ für $n \geq n_0$, und wir erhalten wegen der Stetigkeit des natürlichen Logarithmus $(*)$ und der Exponentialfunktion $(\diamond)$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \exp\Big(\underbrace{\underbrace{y_n}_{\to y_0} \cdot \underbrace{\ln \underbrace{x_n}_{\to x_0}}_{\substack{\to \ln x_0 \\ (*)}}}_{\to y_0 \cdot \ln x_0}\Big) \underset{(\diamond)}{=} \exp(y_0 \cdot \ln x_0) = f(x_0,y_0).$$

Im Falle $x_0 = 0$ ist $f(x_0,y_0) = 0$; für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n = 0$ ist auch $f(x_n,y_n) = 0$, so daß wir ohne Einschränkung $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ voraussetzen können, und damit ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \exp\Big(\underbrace{\underbrace{y_n}_{\to y_0 > 0} \cdot \underbrace{\ln \underbrace{x_n}_{\to x_0 = 0}}_{\to -\infty}}_{\to -\infty}\Big) = 0 = f(x_0,y_0).$$

Damit ist f im Punkt $(x_0,y_0) \in Q$ stetig, insgesamt also eine auf ganz Q stetige Funktion.

b) Für jedes $y \in [1,2]$ ist

$$f_1 : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{für } x = 0, \\ x^y, & \text{für } x > 0, \end{cases}$$

die auf dem halboffenen Intervall $]0,1]$ definierte und im Punkt $x = 0$ (gemäß a) stetig) fortgesetzte Potenzfunktion mit dem Exponenten $y \in [1,2]$; damit ergibt sich

$$\int_0^1 f(x,y)\,dx = \lim_{\alpha\to 0+} \int_\alpha^1 f(x,y)\,dx = \lim_{\alpha\to 0+} \int_\alpha^1 x^y\,dx = \lim_{\alpha\to 0+} \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_{x=\alpha}^{x=1} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0+} \left(\frac{1^{y+1}}{y+1} - \frac{\alpha^{y+1}}{y+1}\right) = \frac{1}{y+1} - \lim_{\alpha\to 0+} \Big(\underbrace{\alpha^y}_{\substack{\to 0 \\ \text{a)}}} \cdot \underbrace{\frac{\alpha}{y+1}}_{\to 0}\Big) = \frac{1}{y+1}.$$

c) Zunächst ergibt sich für $x = 0$

$$\int_1^2 f(x,y)\,dy = \int_1^2 f(0,y)\,dy = \int_1^2 0\,dy = 0$$

sowie für $x = 1$

$$\int_1^2 f(x,y)\,dy = \int_1^2 f(1,y)\,dy = \int_1^2 1\,dy = 1.$$

Des weiteren ist für jedes $x \in \,]0,1[$

$$f_2 : [1,2] \to \mathbb{R}, \quad f_2(y) = f(x,y) = x^y,$$

die auf dem abgeschlossenen Intervall $[1,2]$ definierte Exponentialfunktion zur Basis $x \in \,]0,1[$; damit ergibt sich

$$\int_1^2 f(x,y)\,dy = \int_1^2 x^y\,dy = \left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_{y=1}^{y=2} = \frac{x^2}{\ln x} - \frac{x^1}{\ln x} = \frac{x(x-1)}{\ln x}.$$

6.16 Für die auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte und als stetig differenzierbar vorausgesetzte Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ werde die Funktion

$$g : I \times I \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}, & \text{für } x \neq y, \\ f'(x), & \text{für } x = y, \end{cases}$$

betrachtet; es ist zu zeigen, daß g für jedes $a \in I$ im Punkt $(a,a) \in I \times I$ stetig ist. Sei dazu $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten $(x_n,y_n) \in I \times I$ mit

$$\lim_{n\to\infty} (x_n,y_n) = (a,a), \qquad \text{also} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = a \;\text{ und }\; \lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es nun hinsichtlich der gegenseitigen Lage von x_n und y_n im Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ drei Möglichkeiten:

- Für $x_n < y_n$ ist die Funktion f auf dem Intervall $[x_n; y_n] \subseteq I$ differenzierbar, und nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es ein $z_n \in \,]x_n; y_n[$ mit

$$g(x_n,y_n) = \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(z_n).$$

- Für $x_n = y_n$ gilt

$$g(x_n,y_n) = f'(x_n), \qquad \text{also} \qquad g(x_n,y_n) = f'(z_n)$$

  mit $x_n = z_n = y_n$.

- Für $x_n > y_n$ ist die Funktion f auf dem Intervall $[y_n; x_n] \subseteq I$ differenzierbar, und nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es ein $z_n \in \,]y_n; x_n[$ mit

$$g(x_n,y_n) = \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(z_n).$$

Es gibt also in jedem Fall ein $z_n \in I$ zwischen x_n und y_n mit $g(x_n, y_n) = f'(z_n)$, wobei nach dem Schrankenlemma wegen

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = a\right) \qquad \text{auch} \qquad \lim_{n\to\infty} z_n = a$$

gilt; da die Funktion f nach Voraussetzung stetig differenzierbar ist, ist ihre Ableitung f' noch stetig, und wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} f'(z_n) \underset{f' \text{ stetig}}{=} \lim_{n\to\infty} f'(a) = g(a, a).$$

Folglich ist die Funktion g im Punkt $(a, a) \in I \times I$ stetig.

6.17 a) Es ist $g(0) = f(0, 0) = 0$, und für $t \neq 0$ ist $(t\,a,\, t\,b) \neq (0, 0)$ und damit

$$g(t) = f(t\,a,\, t\,b) = \frac{(t\,a)^2\,(t\,b)}{(t\,a)^4 + (t\,b)^2} = \frac{t^3\,a^2\,b}{t^4\,a^4 + t^2\,b^2} = \frac{t\,a^2\,b}{t^2\,a^4 + b^2}.$$

Im Falle $b = 0$ ist also $g(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$; insbesondere ist g dann (an der Stelle 0) differenzierbar. Im Falle $b \neq 0$ ist g wegen

$$\frac{g(t) - g(0)}{t} = \frac{g(t)}{t} = \frac{a^2\,b}{t^2\,a^4 + b^2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{a^2\,b}{b^2} = \frac{a^2}{b}$$

an der Stelle 0 differenzierbar mit $g'(0) = \frac{a^2}{b}$.

b) Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ konvergiert die Punktfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (\frac{1}{n}; \frac{1}{n^2}) \in \mathbb{R}^2$ gegen $(0, 0)$; für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich aber

$$f(a_n) = f(\tfrac{1}{n}; \tfrac{1}{n^2}) = \frac{(\frac{1}{n})^2 \cdot \frac{1}{n^2}}{(\frac{1}{n})^4 + (\frac{1}{n^2})^2} = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2}.$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \dfrac{1}{2} \neq 0 = f(0; 0)$ ist f nicht stetig an der Stelle $(0, 0)$.

6.18 Die Betragsfunktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t) = |t|$, ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar; damit ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = |x - y| \cdot y,$$

zunächst an allen Stellen $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ mit $a \neq b$ partiell differenzierbar. Es bleiben also nur noch die Punkte $(a; a)$ mit $a \in \mathbb{R}$ der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten zu untersuchen:

- Für den Differenzenquotienten der Funktion

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = f(x, a) = |x - a| \cdot a,$$

an der Stelle $x = a$ gilt

$$\frac{f_1(a + h) - f_1(a)}{h} = \frac{f(a + h, a) - f(a, a)}{h} = \frac{|h| \cdot a - 0}{h} = \frac{|h|}{h} \cdot a$$

für alle $h \neq 0$. Wegen

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f_1(a + h) - f_1(a)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{|h|}{h} \cdot a \underset{h>0}{=} a$$

und

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f_1(a+h)-f_1(a)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{|h|}{h}\cdot a \underset{h<0}{=} -a$$

ist f_1 an der Stelle $x=a$ genau dann differenzierbar, wenn $a=-a$ gilt, $\partial_1 f(a,a)$ existiert also genau im Falle $a=0$.

- Für den Differenzenquotienten der Funktion

$$f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f_2(y)=f(a,y)=|a-y|\cdot y,$$

an der Stelle $y=\alpha$ gilt

$$\frac{f_2(a+h)-f_2(a)}{h}=\frac{f(a,a+h)-f(a,a)}{h}= \\ =\frac{|-h|\cdot(a+h)-0}{h}=\frac{|h|}{h}\cdot(a+h)$$

für alle $h\neq 0$. Wegen

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f_2(a+h)-f_2(a)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{|h|}{h}\cdot(a+h)\underset{h>0}{=} a$$

und

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f_2(a+h)-f_2(a)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{|h|}{h}\cdot(a+h)\underset{h<0}{=} -a$$

ist f_2 an der Stelle $y=a$ genau dann differenzierbar, wenn $a=-a$ gilt, $\partial_2 f(a,a)$ existiert also genau im Falle $a=0$.

Damit ist die Funktion f an denen vom Nullpunkt $(0;0)$ verschiedenen Punkten der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten nicht partiell differenzierbar.

6.19 Wir betrachten für die gegebene Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=\begin{cases}\sin x\cdot\arctan\left(\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{für } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{für } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

ihren Differenzenquotienten im Punkt $a=(0,0)\in\mathbb{R}^2$ in x–Richtung

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\frac{\sin h\cdot\arctan\left(\ln\frac{1}{\sqrt{h^2+0^2}}\right)}{h}=\frac{\sin h}{h}\cdot\arctan\left(\ln\frac{1}{|h|}\right)$$

für alle $h\neq 0$ und untersuchen, ob sein Grenzwert für $h\to 0$ existiert. Der erste Faktor läßt sich mit der Regel von de l'Hospital behandeln, und es ist

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos h}{1}=\frac{1}{1}=1;$$

für den zweiten Faktor ergibt sich direkt

$$\lim_{h\to 0}\arctan\underbrace{\left(\ln\underbrace{\frac{1}{|h|}}_{\to\infty}\right)}_{\to\infty}=\frac{\pi}{2},$$

so daß man insgesamt

$$\lim_{h\to 0}\left(\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\arctan\left(\ln\frac{1}{|h|}\right)}_{\to\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{\pi}{2}$$

erhält. Folglich existiert die partielle Ableitung von f nach der 1. Variablen im Punkt $(0,0)$, und es gilt

$$\partial_1 f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\frac{\pi}{2}.$$

6.20 a) Für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ mit $(x,y)\neq(0,0)$ gilt

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(0,0)| &= \left|\frac{xy}{|x|+|y|}-0\right|=\frac{|x|\cdot|y|}{|x|+|y|}= \\ &= \underbrace{\frac{|x|}{|x|+|y|}}_{\leq 1}\cdot|y|\leq|y| \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad (x,y)\to(0,0);\end{aligned}$$

damit gilt insbesondere

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0),$$

weswegen f stetig in $(0,0)$ ist.

b) Wir betrachten zuerst die partielle Differenzierbarkeit von f in x–Richtung und treffen hierfür die folgende Fallunterscheidung:

- Die Betragsfunktion $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(t)=|t|$, ist für alle $t\neq 0$ differenzierbar mit $h'(t)=\operatorname{sign}(t)$. Damit existiert die partielle Ableitung $\partial_x f(x,y)$ zumindest in allen Punkten $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ mit $x\neq 0$ mit

$$\begin{aligned}\partial_x f(x,y) &= \frac{(|x|+|y|)\cdot y-xy\cdot\operatorname{sign}(x)}{(|x|+|y|)^2}= \\ &= \frac{|x|y+|y|y-|x|y}{(|x|+|y|)^2}=\frac{|y|y}{(|x|+|y|)^2}.\end{aligned}$$

- In den Punkten $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ mit $x=0$ gilt für alle $h\neq 0$

$$\frac{f(0+h,y)-f(0,y)}{h}=\frac{1}{h}\cdot f(h,y)=\frac{1}{h}\cdot\frac{hy}{|h|+|y|}=\frac{y}{|h|+|y|},$$

so daß sich

$$\begin{aligned}\partial_x f(0,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,y)-f(0,y)}{h}= \\ &= \begin{cases}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{y}{|h|+y}=\dfrac{y}{0+y}=1, & \text{für } y>0,\\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{y}{|h|+y}=\lim\limits_{h\to 0}0=0, & \text{für } y=0,\\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{y}{|h|-y}=\dfrac{y}{0-y}=-1, & \text{für } y<0,\end{cases}\end{aligned}$$

zusammenfassend also

$$\partial_x f(0,y) = \operatorname{sign}(y)$$

ergibt.

Damit ist f in x–Richtung partiell differenzierbar mit

$$\partial_x f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y|y}{(|x|+|y|)^2}, & \text{für } x \neq 0, \\ \operatorname{sign}(y), & \text{für } x = 0; \end{cases}$$

aus Symmetriegründen ist dann f auch in y–Richtung partiell differenzierbar mit

$$\partial_y f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|x}{(|x|+|y|)^2}, & \text{für } y \neq 0, \\ \operatorname{sign}(x), & \text{für } y = 0. \end{cases}$$

Insgesamt ist f partiell differenzierbar mit

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (\partial_x f(x,y),\ \partial_y f(x,y))$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

c) Wir betrachten das Verhalten der partiellen Ableitung $\partial_x f$ der Funktion f in x–Richtung auf der y–Achse $x = 0$ und erhalten für alle $t > 0$

$$\partial_x f(0,t) = \operatorname{sign}(t) \underset{t>0}{=} 1$$

und damit

$$\lim_{t \to 0+} \partial_x f(0,t) = 1 \neq 0 = \partial_x f(0,0);$$

damit ist $\partial_x f$ an der Stelle $(0,0)$ unstetig. Folglich ist f in $(0,0)$ auch nicht stetig partiell differenzierbar.

6.21 Wir betrachten die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

an der Stelle $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

- Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ konvergiert die Punktfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (\frac{1}{n}; \frac{1}{n}) \in \mathbb{R}^2$ gegen $(0,0)$; für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich aber

$$f(a_n) = f(\tfrac{1}{n}; \tfrac{1}{n}) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{(\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0;0)$ ist f im Punkte $(0,0)$ unstetig.

- Wegen
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h\cdot 0}{h^2+0^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$
und
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0\cdot h}{0^2+h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$
ist f im Punkte $(0,0)$ partiell differenzierbar.

6.22 a) Die gegebene Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=\begin{cases} x^2\cdot\sin\dfrac{y+1}{x}, & \text{für } x\neq 0,\\ 0, & \text{für } x=0.\end{cases}$$

ist zunächst in allen Punkten $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ mit $x\neq 0$ (als Produkt und Komposition des Sinus und gebrochenrationaler Funktionen) partiell differenzierbar mit

$$\begin{aligned}\partial_x f(x,y) &= 2\,x\cdot\sin\frac{y+1}{x}+x^2\cdot\left(\cos\frac{y+1}{x}\cdot\left(-\frac{y+1}{x^2}\right)\right)\\ &= 2\,x\cdot\sin\frac{y+1}{x}-(y+1)\cdot\cos\frac{y+1}{x}\end{aligned}$$

sowie
$$\partial_y f(x,y)=x^2\cdot\left(\cos\frac{y+1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)=x\cdot\cos\frac{y+1}{x}.$$
Für alle Punkte $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ mit $x=0$ gilt ferner für $h\neq 0$

$$\frac{f(0+h,y)-f(0,y)}{h}=\frac{h^2\cdot\sin\frac{y+1}{h}-0}{h}=h\cdot\sin\frac{y+1}{h}$$

mit
$$\left|h\cdot\sin\frac{y+1}{h}\right|=|h|\cdot\underbrace{\left|\sin\frac{y+1}{h}\right|}_{\leq 1}\leq |h|\xrightarrow[h\to 0]{}0$$

sowie
$$\frac{f(0,y+h)-f(0,y)}{h}=\frac{0-0}{h}=0\xrightarrow[h\to 0]{}0;$$
damit ist f auch in allen Punkten $(0,y)\in\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar mit

$$\partial_x f(0,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,y)-f(0,y)}{h}=0$$

sowie
$$\partial_y f(0,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,y+h)-f(0,y)}{h}=0.$$

b) Für die Folge $(x_n,0)\in\mathbb{R}^2$ mit $x_n=\frac{1}{2\pi n}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$(x_n,0)=\left(\tfrac{1}{2\pi n},0\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}(0,0)$$

und

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x_n,0) &= 2\,x_n \cdot \sin\frac{0+1}{x_n} - (0+1)\cdot\cos\frac{0+1}{x_n} \\
&= 2\,x_n \cdot \sin\frac{1}{x_n} - \cos\frac{1}{x_n} = \frac{1}{\pi n}\cdot\underbrace{\sin(2\pi n)}_{=0} - \underbrace{\cos(2\pi n)}_{=1} \\
&= -1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1 \neq 0 = \partial_x f(0,0);
\end{aligned}$$

damit ist $\partial_x f$ nicht stetig im Punkt $(0,0)$. Für jeden Punkt $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ gilt des weiteren

$$|\partial_y f(x,y) - \partial_y f(0,0)| = |\partial_y f(x,y) - 0| = |\partial_y f(x,y)|\,,$$

wobei für $x\neq 0$ zum einen

$$|\partial_y f(x,y)| = \left|x\cdot\cos\frac{y+1}{x}\right| = |x|\cdot\underbrace{\left|\cos\frac{y+1}{x}\right|}_{\leq 1} \leq |x|$$

und für $x=0$ zum anderen

$$|\partial_y f(x,y)| = |0| = 0 \leq |x|\,,$$

auf jeden Fall also

$$|\partial_y f(x,y) - \partial_y f(0,0)| \leq |x|$$

gilt; für $(x,y)\to(0,0)$ gilt insbesondere $x\to 0$ und damit

$$|\partial_y f(x,y) - \partial_y f(0,0)| \leq |x| \to 0,$$

woraus

$$\partial_y f(x,y) - \partial_y f(0,0) \to 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \partial_y f(x,y) \to \partial_y f(0,0)$$

folgt. Demnach ist $\partial_y f$ stetig im Punkt $(0,0)$.

6.23 a) Die gegebene Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & \text{für } (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

ist zunächst für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ als gebrochenrationale Funktion partiell differenzierbar, und mit der Quotientenregel ergibt sich

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x,y) &= \frac{(x^2+y^2)(3\,x^2\,y - y^3) - (x^3\,y - x\,y^3)\,(2\,x)}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{(3\,x^4\,y - x^2\,y^3 + 3\,x^2\,y^3 - y^5) - (2\,x^4\,y - 2\,x^2\,y^3)}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{x^4\,y + 4\,x^2\,y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

sowie entsprechend

$$\begin{aligned}\partial_y f(x,y) &= \frac{(x^2+y^2)(x^3-3\,x\,y^2)-(x^3\,y-x\,y^3)\,(2\,y)}{(x^2+y^2)^2}\\ &= \frac{(x^5-3\,x^3\,y^2+x^3\,y^2-3\,x\,y^4)-(2\,x^3\,y^2-2\,x\,y^4)}{(x^2+y^2)^2}\\ &= \frac{x^5-4\,x^3\,y^2-x\,y^4}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Ferner ergibt sich

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{0-0}{x} = 0 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

und

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \frac{0-0}{y} = 0 \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

also

$$\partial_x f(0,0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(0,0) = 0,$$

so daß f auch im Punkt $(0,0)$ partiell differenzierbar ist. Des weiteren sind die beiden partiellen Ableitungen

$$\partial_x f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \partial_x f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4\,y+4\,x^2\,y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

und

$$\partial_y f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \partial_y f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5-4\,x^3\,y^2-x\,y^4}{(x^2+y^2)^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

sind zunächst für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ als gebrochenrationale Funktionen partiell differenzierbar. Wegen

$$\frac{\partial_x f(x,0)-\partial_x f(0,0)}{x-0} = \frac{0-0}{x} = 0 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

und

$$\frac{\partial_x f(0,y)-\partial_x f(0,0)}{y-0} = \frac{(-y)-0}{y} = -1 \underset{y\to 0}{\longrightarrow} -1,$$

ergibt sich

$$\partial_x \partial_x f(0,0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \partial_y \partial_x f(0,0) = -1,$$

und wegen

$$\frac{\partial_y f(x,0)-\partial_y f(0,0)}{x-0} = \frac{x-0}{x} = 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$

und

$$\frac{\partial_y f(0,y)-\partial_y f(0,0)}{y-0} = \frac{0-0}{y} = 0 \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$$

ergibt sich

$$\partial_x\partial_y f(0,0) = 1 \qquad \text{und} \qquad \partial_y\partial_y f(0,0) = 0;$$

damit sind $\partial_x f$ und $\partial_y f$ auch im Punkt $(0,0)$ partiell differenzierbar, so daß f insbesondere auch im Punkt $(0,0)$ zweimal partiell differenzierbar ist.

b) Für die Hessematrix der Funktion f im Punkt $(0,0)$ ergibt sich gemäß a)

$$\operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} \partial_x\partial_x f(0,0) & \partial_x\partial_y f(0,0) \\ \partial_y\partial_x f(0,0) & \partial_y\partial_y f(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Die Funktion f ist nicht zweimal stetig partiell differenzierbar. Ansonsten wäre sie auch im Punkt $(0,0)$ zweimal stetig partiell differenzierbar und würde demnach dort wegen

$$\partial_x\partial_y f(0,0) = \partial_y\partial_x f(0,0)$$

gemäß dem Satz von Schwarz eine symmetrische Hessematrix $\operatorname{Hess} f(0,0)$ besitzen; dies ist gemäß b) aber nicht der Fall.

6.24 Die beiden gegebenen Funktionen $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind stetig und auf $]a,b[$ stetig differenzierbar, insbesondere also auf $]a,b[$ differenzierbar, und genügen damit den Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung; folglich gibt es Punkte $\xi \in \,]a,b[$ und $\eta \in \,]a,b[$ mit

$$g'(\xi) = \frac{g(b) - g(a)}{b-a} \underset{(*)}{=} 0 \qquad \text{und} \qquad h'(\eta) = \frac{h(b) - h(a)}{b-a} \underset{(*)}{=} 0,$$

wobei in $(*)$ die zusätzliche Voraussetzung $g(a) = g(b)$ und $h(a) = h(b)$ eingeht.

Da g und h auf $]a,b[$ differenzierbar sind, ist die Funktion

$$f : \,]a,b[\, \times \,]a,b[\, \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = g(x) \cdot h(y),$$

partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in \,]a,b[\, \times \,]a,b[$ gilt

$$\partial_x f(x,y) = g'(x) \cdot h(y) \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(x,y) = g(x) \cdot h'(y),$$

so daß $(\xi,\eta) \in \,]a,b[\, \times \,]a,b[$ wegen

$$\partial_x f(\xi,\eta) = \underbrace{g'(\xi)}_{=0} \cdot h(\eta) = 0 \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(\xi,\eta) = g(\xi) \cdot \underbrace{h'(\eta)}_{=0} = 0,$$

zusammen also

$$\operatorname{grad} f(\xi,\eta) = \big(\partial_x f(\xi,\eta),\ \partial_y f(\xi,\eta)\big) = (0,0),$$

eine Nullstelle von $\operatorname{grad} f$ und damit eine kritische Stelle von f ist.