LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Differential– und Integralrechnung 5 — Lösungsvorschlag —

5.1 Die gegebene Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$ besitzt den Entwicklungspunkt $a = 0$ sowie die Koeffizienten

$$c_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N};$$

dabei ist $(2n)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (2n)$. Wegen

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{(2\,(n+1))!}{(n+1)! \cdot (n+1)!} \cdot \frac{n! \cdot n!}{(2\,n)!} \right| =$$
$$= \left| \frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \right| =$$
$$= \frac{(2n+1)\,(2n+2)}{(n+1)(n+1)} = \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \cdot 2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 4 = c$$

besitzt die gegebene Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = \frac{1}{4}$.

5.2 a) Die gegebene Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ besitzt den Entwicklungspunkt $a = 0$ sowie die Koeffizienten

$$c_n = \frac{n!}{n^n} \neq 0 \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wegen

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \right| = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1)} =$$
$$= (n+1) \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e} = c$$

besitzt die gegebene Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = e$.

b) Die gegebene Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^4+3n^2+n}\, x^n$ besitzt den Entwicklungspunkt $a = 0$ sowie die Koeffizienten

$$c_n = e^{-n^4+3n^2+n} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wegen

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\left|e^{-n^4+3n^2+n}\right|} = \left(e^{-n^4+3n^2+n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{(-n^4+3n^2+n)\cdot\frac{1}{n}} =$$
$$= \exp\big(-n^3+3n+1\big) = \exp\big(\underbrace{-n\,\underbrace{(n^2-3)}_{\to+\infty}}_{\to-\infty}+1\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

besitzt die gegebene Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho = +\infty$.

5.3 a) Wir weisen die Konvergenz der durch

$$a_1 = 4 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach, indem wir zeigen, daß sie monoton fallend und nach unten beschränkt ist; hierfür beweisen wir $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:
„$n = 1$“: Es ist $a_1 = 4$ und $a_2 = \sqrt{6+4} = \sqrt{10}$ und damit $0 \leq a_2 \leq a_1$.
„$n \to n+1$“: Aus der Induktionsvoraussetzung

$$0 \leq a_{n+1} \leq a_n$$

folgt zunächst

$$6 \leq 6 + a_{n+1} \leq 6 + a_n,$$

und man erhält wegen der Monotonie der Quadratwurzel

$$\sqrt{6} \leq \sqrt{6+a_{n+1}} \leq \sqrt{6+a_n},$$

insbesondere also die Induktionsbehauptung

$$0 \leq a_{n+2} \leq a_{n+1}.$$

Für den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ergibt sich mit Hilfe der Rekursionsvorschrift unter Verwendung der Stetigkeit der Quadratwurzel

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6+a_n} = \sqrt{6+\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{6+a}$$

und damit $a^2 = 6 + a$ bzw. $a^2 - a - 6 = 0$, also

$$a = \frac{1}{2}\left(-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot(-6)}\right) = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

und damit $a = -2$ oder $a = 3$; wegen $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist auch $a \geq 0$, woraus sich schließlich $a = 3$ ergibt.

b) Die gegebene Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^n}{\sqrt{n}}\, x^n$$

besitzt den Entwicklungspunkt 0 sowie die Koeffizienten $c_n = \dfrac{a_n^n}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gemäß a) ist $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$, so daß sich unter Verwendung des klassischen Grenzwerts $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ sowie der Stetigkeit der Quadratwurzel

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{a_n^n}{\sqrt{n}}\right|} = \sqrt[n]{\frac{a_n^n}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a_n^n}}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}} = \frac{a_n}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{\sqrt{1}} = 3 = c$$

ergibt; folglich besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = \frac{1}{3}$.

c) Zur Untersuchung, ob die Potenzreihe in $x = \frac{1}{3}$ konvergiert, ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^n}{\sqrt{n}}\, x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^n}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{3}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

zu betrachten. Gemäß a) ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und besitzt den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$, so daß sich sogar $a_n \geq 3$ und folglich

$$\left(\frac{a_n}{3}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \left(\frac{3}{3}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} = 1^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt; damit besitzt die zu untersuchende Reihe die (bekanntermaßen divergente) Minorante $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ und ist damit nach dem Minorantenkriterium selbst divergent.

5.4 a) Die gegebene Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{3^n}\,(5\,n^2+1)}\, x^n$$

besitzt den Entwicklungspunkt $a = 0$ sowie die Koeffizienten

$$c_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{3^n}\,(5\,n^2+1)} \neq 0 \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Wegen

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3^{n+1}}\,(5\,(n+1)^2+1)} \cdot \frac{\sqrt{3^n}\,(5\,n^2+1)}{(-1)^n}\right| =$$

$$= \left|(-1) \cdot \frac{\sqrt{3^n}}{\sqrt{3^{n+1}}} \cdot \frac{5\,n^2+1}{5\,(n+1)^2+1}\right| = \sqrt{\frac{3^n}{3^{n+1}}} \cdot \frac{5\,n^2+1}{5\,n^2\,(1+\frac{1}{n})^2+1} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \frac{5+\frac{1}{n^2}}{5\,(1+\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n^2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \frac{5+0}{5\,(1+0)^2+0} = \frac{1}{\sqrt{3}} = c$$

ergibt sich als Konvergenzradius der gegebenen Potenzreihe $r = \frac{1}{c} = \sqrt{3}$.

b) Wir betrachten die gegebene Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{3^n}\,(5\,n^2+1)}\,x^n \qquad \text{für} \qquad x = \pm\sqrt{3}$$

und erhalten

$$\left|(-1)^n \frac{1}{\sqrt{3^n}\,(5\,n^2+1)}\,x^n\right| = \frac{1}{\sqrt{3^n}\,(5\,n^2+1)}\;|x|^n =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}^{\,n}\,(5\,n^2+1)}\;\sqrt{3}^{\,n} = \frac{1}{5\,n^2+1} \le \frac{1}{5\,n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; damit besitzt die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{3^n}\,(5\,n^2+1)}\,x^n$ die (bekanntlich konvergente) Majorante $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und ist folglich nach dem Majorantenkriterium (absolut) konvergent, so daß auch die gegebene Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{3^n}\,(5\,n^2+1)}\,x^n$ für $x = \pm\sqrt{3}$ (absolut) konvergiert.

5.5 a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = q^{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt:

- Für den Fall $0 < q < 1$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; damit konvergiert aber die zu untersuchende alternierende Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{\sqrt{n}}$ nach dem Leibnitzschen Konvergenzkriterium.
- Für den Fall $1 \le q$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 1, & \text{für } q = 1, \\ \infty, & \text{für } q > 1; \end{cases}$$

  damit ist die Folge $\left((-1)^n a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ der Reihenglieder insbesondere keine Nullfolge, weswegen die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{\sqrt{n}}$ divergiert.

b) Die gegebene Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{q}\;x^n$ besitzt den Entwicklungspunkt $a = 0$ sowie die Koeffizienten $c_n = \sqrt[n]{q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{\sqrt[n+1]{q}}{\sqrt[n]{q}} \;\xrightarrow[n\to\infty]{}\; \frac{1}{1} = 1 = c$$

besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = 1$; damit ist sie insbesondere für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergent. Für $|x| = 1$ ist

$$|\sqrt[n]{q}\;x^n| = \sqrt[n]{q} \;\xrightarrow[n\to\infty]{}\; 1;$$

damit ist die Folge $\left(\sqrt[n]{q}\ x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ der Reihenglieder keine Nullfolge und folglich die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{q}\ x^n$ divergent.

5.6 Die gegebene Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$ und der Koeffizientenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ besitzt den Konvergenzradius $r \in \,]1, \infty[$ und ist damit

- für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $|z| < r$ absolut konvergent sowie
- für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $|z| > r$ divergent;

für $z \in \mathbb{R}$ mit $|z| = r$ ist keine allgemeingültige Aussage möglich.

a) Zu betrachten ist die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{mit} \quad z = x^2 \quad \text{für alle} \;\; n \in \mathbb{N}_0.$$

Damit gilt:

- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \sqrt{r}$ gilt $|z| = |x^2| = |x|^2 < r$, und damit ist die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut konvergent;
- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > \sqrt{r}$ gilt $|z| = |x^2| = |x|^2 > r$, und damit ist die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ divergent;

folglich ergibt sich für die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ der Konvergenzradius $\sqrt{r}$.

b) Zu betrachten ist die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{mit} \quad c_n = a_n^n \quad \text{für alle} \;\; n \in \mathbb{N}_0.$$

Da für den Konvergenzradius r der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ nach Voraussetzung $r > 1$ gilt, ist diese insbesondere für $z = 1$ absolut konvergent; es konvergiert also die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, so daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ihrer Reihenglieder eine Nullfolge ist. Damit ergibt sich

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{|a_n^n|} = \sqrt[n]{|a_n|^n} = |a_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

so daß die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ den Konvergenzradius ∞ besitzt.

5.7 Die gegebenen Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

haben jeweils den Entwicklungspunkt 0 sowie die Koeffizientenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

a) Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, und es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{|a|}{|a|} = 1;$$

folglich besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{1} = 1$ und ist damit insbesondere für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergent. Für $|x| = 1$ ergibt sich

$$|a_n x^n| = |a_n| \cdot |x|^n = |a_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |a| \neq 0;$$

damit ist die Folge $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Reihenglieder keine Nullfolge und folglich die Potenzreihe divergent. Insgesamt konvergiert in diesem Fall die Potenzreihe genau für alle $x \in \,]-1, 1[$.

b) Konvergiert die Folge $(n^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n^2 a_n \neq 0$ und damit auch $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, und es gilt

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(n+1)^2 a_{n+1}}{n^2 a_n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{|(n+1)^2 a_{n+1}|}{|n^2 a_n|} = \\ &= \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \cdot \frac{|(n+1)^2 a_{n+1}|}{|n^2 a_n|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(1+0)^2} \cdot \frac{|a|}{|a|} = 1;\end{aligned}$$

folglich besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{1} = 1$ und ist damit insbesondere für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergent. Für $|x| = 1$ ergibt sich

$$n^2 \cdot |a_n x^n| = \left|n^2 a_n\right| \cdot |x|^n = \left|n^2 a_n\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |a| > 0;$$

damit gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_1$ dann

$$n^2 \cdot |a_n x^n| \leq 2\,|a|\,, \qquad \text{also} \qquad |a_n x^n| \leq \frac{2\,|a|}{n^2}$$

gilt. Damit besitzt die Reihe $\sum_{n=n_1}^{\infty} a_n x^n$ die (bekanntlich konvergente) Reihe $\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{2\,|a|}{n^2}$ als Majorante und ist nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent, also konvergiert auch die gegebene Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Insgesamt konvergiert in diesem Fall die Potenzreihe genau für alle $x \in [-1, 1]$.

c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge, so ist die alternierende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n, \qquad \text{also die Potenzreihe} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{für} \quad x=-1,$$

nach dem Leibnizkriterium konvergent; folglich gilt für ihren Konvergenzradius zunächst $\varrho \geq 1$. Wegen $a_n \geq \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$ besitzt die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \text{also die Potenzreihe} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \text{für} \quad x=1,$$

die (bekanntlich divergente) harmonische Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ als Minorante und ist damit nach dem Minorantenkriterium selbst divergent, also divergiert auch die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für $x=1$; folglich gilt für den Konvergenzradius zudem $\varrho \leq 1$. Insgesamt ergibt sich der Konvergenzradius $\varrho = 1$, und die Potenzreihe konvergiert genau für alle $x \in [-1;1[$.

5.8 Für die zu einer monoton wachsenden Koeffizientenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen zum Entwicklungspunkt $a=0$ gebildete Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ nehmen wir zum Widerspruch an, daß sie einen Konvergenzradius $\varrho > 1$ besitzt. Damit konvergiert aber die gegebene Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| < \varrho$ absolut, wegen $|1-0| = 1 < \varrho$ also insbesondere auch für $x=1$; damit ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot 1^n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, weswegen die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ihrer (als positiv vorausgesetzten) Glieder $a_n > 0$ notwendig eine Nullfolge sein muß. Folglich gibt es zu $\varepsilon = a_1 > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, woraus sich mit der Voraussetzung, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst, in

$$a_{n_0} \underset{a_{n_0}>0}{=} |a_{n_0}| = |a_{n_0} - 0| < \varepsilon = a_1 \leq a_{n_0}$$

ein Widerspruch ergibt; folglich gilt für den Konvergenzradius $\varrho \leq 1$.

5.9 Für ein fest gewähltes $k \geq 0$ sind die Koeffizienten der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ durch den Startwert $a_0 > 0$ und die Rekursionsformel

$$a_n = a_{n-1}^k \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definiert.

a) Wir betrachten zunächst die Spezialfälle $k=0$ und $k=1$ und berechnen jeweils zum Startwert $a_0 = 2$ den Wert der Potenzreihe an der Stelle $x = \frac{1}{2}$:

i) Für $k = 0$ gilt für jeden Startwert $a_0 > 0$ gemäß der Rekursionsformel

$$a_n = a_{n-1}^0 = 1 \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N},$$

und wir haben die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \underbrace{a_0 x^0}_{\text{für } n=0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

zu betrachten; diese geometrische Reihe konvergiert genau für $|x| < 1$ und besitzt damit den Konvergenzradius $\varrho = 1$. Als Wert der Potenzreihe ergibt sich mit Hilfe der Summenformel für geometrische Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(x \cdot x^{n-1} \right) =$$
$$= a_0 + x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = a_0 + x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = a_0 + \frac{x}{1-x};$$

speziell für $a_0 = 2$ und $x = \frac{1}{2}$ erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \frac{x}{1-x} = 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2 + 1 = 3.$$

ii) Für $k = 1$ gilt gemäß der Rekursionsformel

$$a_n = a_{n-1}^1 = a_{n-1} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N},$$

mit dem Startwert $a_0 > 0$ also $a_n = a_0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und wir haben die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 x^n$$

zu betrachten; diese geometrische Reihe konvergiert wegen $a_0 \neq 0$ genau für $|x| < 1$ und besitzt damit den Konvergenzradius $\varrho = 1$. Als Wert der Potenzreihe liefert die Summenformel für geometrische Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 x^n = \frac{a_0}{1-x};$$

speziell für $a_0 = 2$ und $x = \frac{1}{2}$ erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{a_0}{1-x} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4.$$

b) Wir zeigen zunächst für $a_0 > 0$ und $k \geq 0$ die explizite Darstellung

$$a_n = a_0^{(k^n)} \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

mit vollständiger Induktion:

- „$n = 0$": wegen $k^0 = 1$ ergibt sich der Induktionsanfang $a_0 = a_0^1 = a_0^{(k^0)}$.
- „$n \to n+1$": aus der Induktionsvoraussetzung $a_n = a_0^{(k^n)}$ folgt in

$$a_{n+1} = a_n^k = \left(a_0^{(k^n)}\right)^k = a_0^{(k^n \cdot k)} = a_0^{(k^{n+1})}$$

die Induktionsbehauptung.

Zur Bestimmung des Konvergenzradius ϱ der Potenzreihe betrachten wir

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{a_0^{(k^{n+1})}}{a_0^{(k^n)}}\right| = a_0^{(k^{n+1}-k^n)} = a_0^{(k^n(k-1))} = \exp(k^n(k-1)\ln a_0)$$

und treffen die folgende Fallunterscheidung:

- Für $k \in \,]0,1[$ ergibt sich

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \exp\underbrace{\left(\underbrace{k^n}_{\to 0}(k-1)\ln a_0\right)}_{\to 0} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{exp stetig}} \exp(0) = 1$$

unabhängig vom Startwert $a_0 > 0$, und wir erhalten $\varrho = \frac{1}{1} = 1$; gemäß a) gilt dies auch für $k \in \{0,1\}$, insgesamt also für $k \in [0,1]$.

- Für $k \in \,]1,\infty[$, also $k-1 > 0$, ergibt sich
  - im Falle $a_0 < 1$, also $\ln a_0 < 0$,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \exp\underbrace{\left(\underbrace{k^n}_{\to+\infty}\underbrace{(k-1)}_{>0}\underbrace{\ln a_0}_{<0}\right)}_{\to-\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

  und damit $\varrho = \infty$,
  - im Falle $a_0 = 1$, also $\ln a_0 = 0$,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \exp(k^n(k-1)\ln a_0) = \exp(0) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

  und damit $\varrho = \frac{1}{1} = 1$,
  - im Falle $a_0 > 1$, also $\ln a_0 > 0$,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \exp\underbrace{\left(\underbrace{k^n}_{\to+\infty}\underbrace{(k-1)}_{>0}\underbrace{\ln a_0}_{>0}\right)}_{\to+\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

  und damit $\varrho = 0$.

5.10 a) In Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\cos(\alpha + n\pi))^n\, x^n$$

mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$ und den Koeffizienten

$$c_n = (\cos(\alpha + n\pi))^n \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

zu betrachten; für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt mit dem Additionstheorem des Cosinus

$$\cos(\alpha + n\pi) = \cos\alpha \cdot \underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - \sin\alpha \cdot \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} = (-1)^n \cdot \cos\alpha$$

und damit

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{|(\cos(\alpha + n\pi))^n|} = \sqrt[n]{|\cos(\alpha + n\pi)|^n} = |\cos(\alpha + n\pi)| =$$
$$= |(-1)^n \cdot \cos\alpha| = |(-1)^n| \cdot |\cos\alpha| = |\cos\alpha| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |\cos\alpha| = c,$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Im Falle $\cos\alpha = 0$, also für $\alpha \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, ist $c = 0$, so daß die gegebene Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho = \infty$ besitzt.
- Im Falle $\cos\alpha \neq 0$, also für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, ist $c \neq 0$, so daß die gegebene Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = \frac{1}{|\cos\alpha|}$ besitzt.

b) Für den Parameter $\alpha = \frac{\pi}{4}$ gilt $\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, und gemäß a) ergibt sich für den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = \sqrt{2}$, so daß durch die gegebene Potenzreihe die Funktion

$$f_{\frac{\pi}{4}} : \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad f_{\frac{\pi}{4}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right)\right)^n x^n,$$

definiert wird. Für den Wert $x = 1$ ergibt sich damit

$$f_{\frac{\pi}{4}}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right)}_{=(-1)^n \cdot \cos\frac{\pi}{4}}\Bigg)^n \cdot 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \cdot \cos\frac{\pi}{4}\right)^n,$$

wegen

$$(-1)^{n^2} = \left\{ \begin{array}{rl} -1, & \text{falls } n \text{ und damit } n^2 \text{ ungerade,} \\ 1, & \text{falls } n \text{ und damit } n^2 \text{ gerade,} \end{array} \right\} = (-1)^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ also

$$f_{\frac{\pi}{4}}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \cdot \cos\frac{\pi}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^n)^n \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n^2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^n,$$

so daß sich mit der Summenformel für geometrische Reihen wegen $\left|\frac{-1}{\sqrt{2}}\right| < 1$ schließlich

$$f_{\frac{\pi}{4}}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^n \underset{\left|\frac{-1}{\sqrt{2}}\right|<1}{=} \frac{1}{1 - \frac{-1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$$

ergibt.

5.11 a) Bei der gegebenen Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$$

handelt es sich wegen

$$\frac{x^{2n}}{3^n} = \frac{\left(x^2\right)^n}{3^n} = \left(\frac{x^2}{3}\right)^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ um die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \qquad \text{mit} \qquad q = \frac{x^2}{3};$$

diese konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ gilt, wegen

$$|q| < 1 \iff \left|\frac{x^2}{3}\right| < 1 \iff \frac{x^2}{3} < 1 \iff x^2 < 3 \iff |x| < \sqrt{3}$$

also genau für $x \in \left]-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right[$.

b) Gemäß der Summenformel für geometrische Reihen gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \text{für alle} \qquad |q| < 1,$$

also

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{3}} = \frac{3}{3-x^2} \qquad \text{für alle} \qquad x \in \left]-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right[;$$

damit wird die rationale Funktion

$$f : \left]-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{3}{3-x^2},$$

durch die Potenzreihe auf ihrem Konvergenzbereich dargestellt.

5.12 a) Wir betrachten die gegebene Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{(1+x)(1-2x)},$$

auf ihrem maximalen Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$ und bestimmen α, $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\alpha}{1+x} + \frac{\beta}{1-2x} \qquad \text{für alle} \quad x \in D_f.$$

Wegen

$$\frac{\alpha}{1+x} + \frac{\beta}{1-2x} = \frac{\alpha\,(1-2x) + \beta\,(1+x)}{(1+x)(1-2x)} = \frac{(-2\alpha+\beta)\,x + (\alpha+\beta)}{(1+x)(1-2x)}$$

für alle $x \in D_f$ liefert der Koeffizientenvergleich

$$-2\,\alpha + \beta = 1 \qquad \text{und} \qquad \alpha + \beta = 0,$$

also $-3\,\alpha = 1$ bzw. $\alpha = -\frac{1}{3}$ und $3\,\beta = 1$ bzw. $\beta = \frac{1}{3}$, und somit

$$f(x) = \frac{-\frac{1}{3}}{1+x} + \frac{\frac{1}{3}}{1-2x} \qquad \text{für alle} \quad x \in D_f.$$

Für alle $c \in \mathbb{R}$ und $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ konvergiert die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\,q^n \qquad \text{mit} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c\,q^n = \frac{c}{1-q};$$

damit ergibt sich für $c = -\frac{1}{3}$ und $q = -x$ zum einen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)(-x)^n = \frac{-\frac{1}{3}}{1-(-x)} = \frac{-\frac{1}{3}}{1+x} \qquad \text{für alle} \quad |x| < 1$$

sowie für $c = \frac{1}{3}$ und $q = 2x$ zum anderen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\,(2x)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1-2x} \qquad \text{für alle} \quad |x| < \frac{1}{2}.$$

Damit erhält man für alle $|x| < \frac{1}{2}$ insgesamt

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{-\frac{1}{3}}{1+x} + \frac{\frac{1}{3}}{1-2x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)(-x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\,(2x)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3}\,x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 2^n}{3}\,x^n, \end{aligned}$$

also die Potenzreihendarstellung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{(-1)^{n+1} + 2^n}{3} \quad \text{für alle} \;\; n \in \mathbb{N}_0.$$

b) Die in a) ermittelte Potenzreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \frac{1}{2}$; folglich gilt für ihren Konvergenzradius ϱ zunächst $\varrho \geq \frac{1}{2}$. Für $x = \pm\frac{1}{2}$ ist die Folge $(a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ der Reihenglieder wegen

$$\begin{aligned} a_{2k} x^{2k} &= \frac{(-1)^{2k+1} + 2^{2k}}{3} \cdot \left(\pm\frac{1}{2}\right)^{2k} = \\ &= \frac{-1 + 2^{2k}}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \frac{-\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} + 1^{2k}}{3} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{-0+1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

sicherlich keine Nullfolge und damit die Potenzreihe divergent; folglich gilt für ihren Konvergenzradius ϱ dann $\varrho \leq \frac{1}{2}$, insgesamt also $\varrho = \frac{1}{2}$, so daß die Potenzreihe auch für alle $|x| > \frac{1}{2}$ divergiert. Damit besitzt die Potenzreihe das Konvergenzintervall $\left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$.

c) Für die in a) ermittelten Koeffizienten a_n der Potenzreihe gilt

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{(-1)^{0+1}+2^0}{3} = \frac{(-1)+1}{3} = 0 \\ a_1 &= \frac{(-1)^{1+1}+2^1}{3} = \frac{1+2}{3} = 1 \end{aligned}$$

sowie die Rekursionsvorschrift

$$\begin{aligned} a_{n+1} + 2\,a_n &= \frac{(-1)^{(n+1)+1}+2^{n+1}}{3} + 2\cdot\frac{(-1)^{n+1}+2^n}{3} \\ &= \frac{-(-1)^{n+1}+2^{n+1}}{3} + \frac{2\cdot(-1)^{n+1}+2^{n+1}}{3} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}+2\cdot 2^{n+1}}{3} \\ &= \frac{(-1)^{(n+2)+1}+2^{n+2}}{3} = a_{n+2} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

5.13 a) Die für den Parameter $a \neq 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gegebene Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}$ ist wegen

$$\frac{x^n}{a^{n+1}} = \frac{x^n}{a\cdot a^n} = \frac{1}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^n \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\,q^n \qquad \text{mit} \qquad c = \frac{1}{a} \quad \text{und} \quad q = \frac{x}{a}$$

und folglich wegen $c \neq 0$ genau dann konvergent, wenn $|q| < 1$ gilt, also genau für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < |a|$; in diesem Fall ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} c\,q^n = \frac{c}{1-q} = \frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{x}{a}} = \frac{a\cdot\frac{1}{a}}{a\cdot\left(1-\frac{x}{a}\right)} = \frac{1}{a-x}.$$

b) Wir betrachten die gegebene Funktion

$$g : D_g \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{(1+x)(2+x)},$$

in ihrem maximalen Definitionsbereich $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2,-1\}$ und bestimmen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \frac{\alpha}{1+x} + \frac{\beta}{2+x} \qquad \text{für alle} \quad x \in D_g.$$

Wegen

$$\frac{\alpha}{1+x} + \frac{\beta}{2+x} = \frac{\alpha\,(2+x)+\beta\,(1+x)}{(1+x)(2+x)} = \frac{(\alpha+\beta)\,x + (2\,\alpha+\beta)}{(1+x)(2+x)}$$

für alle $x \in D_g$ liefert der Koeffizientenvergleich

$$\alpha + \beta = 0 \qquad \text{und} \qquad 2\,\alpha + \beta = 1,$$

also $\alpha = 1$ und $\beta = -1$, und somit

$$g(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{-1}{2+x} \qquad \text{für alle} \quad x \in D_g.$$

Für die beiden Summanden ergibt sich zum einen mit Hilfe der Summenformel für geometrische Reihen

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \text{für alle} \quad |x| < 1$$

und zum anderen unter Verwendung von Teilaufgabe a)

$$\frac{-1}{2+x} = \frac{1}{(-2)-x} \underset{a=-2}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(-2)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} x^n \quad \text{für alle} \quad |x| < 2,$$

so daß sich für $|x| < 1$ insgesamt

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{-1}{2+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) x^n \end{aligned}$$

und damit für die Funktion g die Taylorreihe

$$T_g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{mit} \quad c_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \quad \text{für alle} \;\; n \in \mathbb{N}_0$$

mit dem Einwicklungspunkt 0 ergibt. Da $T_g(x)$ für alle $|x| < 1$ konvergiert, gilt für den Konvergenzradius der Taylorreihe $\varrho \geq 1$; für $x = -1$ gilt

$$c_n x^n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \cdot (-1)^n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - 0 = 1,$$

so daß die Folge $(c_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Reihenglieder keine Nullfolge ist und folglich die Taylorreihe $T_g(-1)$ divergiert. Damit gilt auch $\varrho \leq 1$, insgesamt $\varrho = 1$.

5.14 a) Die gegebene Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n$ besitzt den Entwicklungspunkt $a = 0$ sowie die Koeffizienten $c_n = \dfrac{n+1}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{(n+2) \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot (n+1)} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} = c$$

besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = 2$.

b) Nach dem Hauptsatz über Potenzreihen ist die Funktion

$$f : \,]-2;2[\, \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}\, x^n,$$

auf dem offenen Konvergenzintervall $D = \,]-2;2[$ stetig und damit insbesondere integrierbar, wobei sich eine Potenzreihendarstellung der Stammfunktion F mit $F(0) = 0$ durch gliedweises Integrieren ergibt; für alle $x \in \,]-2;2[$ gilt demnach

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^n} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{x}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2\,x}{2-x};$$

dabei geht die Summenformel für die wegen $\left|\frac{x}{2}\right| = \frac{|x|}{2} < 1$ konvergenten geometrischen Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$ ein.

c) Für alle $x \in \,]2;2[$ gilt gemäß b)

$$F(x) = \frac{2\,x}{2-x}$$

und damit

$$f(x) = F'(x) = \frac{(2-x)\cdot 2 - 2\,x \cdot (-1)}{(2-x)^2} = \frac{4 - 2\,x + 2\,x}{(2-x)^2} = \frac{4}{(2-x)^2}.$$

5.15 a) Die gegebene Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(x-1)^n$ besitzt den Entwicklungspunkt $a = 1$ sowie die Koeffizienten $c_n = (-1)^n(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{(-1)^n(n+1)}\right| = \frac{n+2}{n+1} = \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 = c$$

besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{1} = 1$; damit ist diese für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| < 1$ konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| > 1$ divergent. Für die verbleibenden Punkte $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| = 1$ gilt

$$|(-1)^n(n+1)(x-1)^n| = |(-1)^n|\,(n+1)\,|x-1|^n = n+1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

weswegen die Folge $((-1)^n(n+1)(x-1)^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Reihenglieder keine Nullfolge und folglich die Potenzreihe divergent ist. Insgesamt ergibt sich wegen

$$|x-1| < 1 \iff -1 < x-1 < 1 \iff 0 < x < 2$$

das Konvergenzintervall $]0;2[$ für die gegebene Potenzreihe.

b) Durch die gegebene Potenzreihe wird gemäß a) die Funktion

$$f :]0;2[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(x-1)^n,$$

definiert; nach dem Hauptsatz über Potenzreihen ist f stetig, insbesondere also integrierbar, und die gliedweise integrierte Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^{n+1}$$

stellt eine Stammfunktion von f dar; damit ergibt sich

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (t-1)^{n+1} \right]_1^x =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^{n+1} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 0^{n+1}}_{=0} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^{n+1}$$

für alle $x \in]0;2[$.

c) Für alle $x \in]0;2[$ gilt unter Verwendung der geometrischen Summenformel

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\, q^n = \frac{c}{1-q}$$

für $c = x - 1$ und $q = 1 - x$ mit $|q| = |1 - x| < 1$ zunächst

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n\,(x-1) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (x-1)(1-x)^n = \frac{x-1}{1-(1-x)} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

und damit dann mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential– und Integralrechnung

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{x^2}.$$

5.16 Zu betrachten ist die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}\, x^n$$

mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$ und den Koeffizienten $c_n = \frac{2^n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\left| \frac{2^n}{n} \right|} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}} = \frac{\sqrt[n]{2^n}}{\sqrt[n]{n}} = \frac{2}{\sqrt[n]{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{1} = 2 = c$$

besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$; damit ist diese für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \frac{1}{2}$ konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| > \frac{1}{2}$ divergent; damit sind noch die verbleibenden Punkte $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = \frac{1}{2}$ gesondert zu untersuchen: für $x = \frac{1}{2}$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 \cdot \frac{1}{2})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

als harmonische Reihe divergent, und für $x = -\frac{1}{2}$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 \cdot (-\frac{1}{2}))^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

als alternierende harmonische Reihe konvergent. Damit ist der Konvergenzbereich der gegebenen Potenzreihe genau das halboffene Intervall $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$, wodurch die Funktion

$$f : \left[-\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n,$$

definiert wird. Nach dem Hauptsatz über Potenzreihen ist f zumindest auf dem offenen Intervall $\left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$ differenzierbar, und für alle $x \in \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$ gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} n\, x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2\,(2x)^n,$$

so daß sich wegen $|2\,x| = 2\,|x| < 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ unter Verwendung der Summenformel für geometrische Reihen

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2\,(2x)^n = \frac{2}{1 - 2\,x} = -\frac{-2}{1 - 2\,x}$$

ergibt. Damit gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so daß

$$f(x) = -\ln|1 - 2\,x| + c \underset{1-2\,x>0}{=} -\ln(1 - 2\,x) + c$$

für alle $x \in \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$ gilt, wobei sich speziell für den Entwicklungspunkt $a = 0$ wegen

$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 \cdot 0)^n}{n} = 0 \qquad \text{und} \qquad -\ln(1 - 2 \cdot 0) = 0$$

dann $c = 0$ ergibt. Folglich ist

$$f(x) = -\ln(1 - 2\,x) \qquad \text{für alle} \quad x \in \left]-\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}\right[;$$

da die Funktion f im Konvergenzpunkt $a - \varrho = -\frac{1}{2}$ der gegebenen Potenzreihe nach dem abelschen Grenzwertsatz zumindest stetig ist, folgt mit der Stetigkeit des Logarithmus auch

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \lim_{x \to -\frac{1}{2}+} f(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{2}+} (-\ln(1 - 2\,x)) = -\ln\left(1 - 2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)\right) = -\ln 2,$$

also

$$f(x) = -\ln(1 - 2\,x) \qquad \text{für alle} \quad x \in \left[-\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}\right[.$$

5.17 Die gegebene Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\,x^n$ besitzt den Entwicklungspunkt $a = 0$ sowie die Koeffizienten $c_n = n+2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{n+3}{n+2} = \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 = c;$$

damit besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho = \dfrac{1}{c} = 1$. Für die Darstellung der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\,x^n$ als gebrochenrationale Funktion betrachten wir die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$; diese konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ und stellt die Funktion

$$f : \left]-1;1\right[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

dar. Damit ist f beliebig oft differenzierbar; für alle $x \in \left]-1;1\right[$ ist zum einen

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

zum anderen dürfen Potenzreihen „gliedweise“ differenziert werden mit

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^n.$$

Wegen

$$(n+2)\,x^n = (n+1)\,x^n + x^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\,x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = f'(x) + f(x) =$$
$$= \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{1+(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{2-x}{(1-x)^2}.$$

5.18 Um das Konvergenzverhalten der gegebenen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^n$$

in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$ zu untersuchen und gegebenenfalls den Grenzwert zu bestimmen, bieten sich die beiden folgenden Möglichkeiten an:

- Es ist $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^n$ die Potenzreihe mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$ und den Koeffizienten $c_n = n+1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{n+2}{n+1}\right| = \frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1+0}{1+0} = 1 = c$$

besitzt sie den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = \frac{1}{1} = 1$, ist folglich für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ (absolut) konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergent; für die beiden verbleibenden Fälle $|x| = 1$ ist die Folge $\left((n+1)\,x^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gemäß

$$\left|(n+1)\,x^n\right| = (n+1)\ |x|^n = (n+1)\cdot 1^n = n+1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

insbesondere keine Nullfolge, so daß hier die Potenzreihe divergiert und sich insgesamt das Konvergenzintervall $]-1,1[$ ergibt. Die dadurch definierte Funktion

$$f:]-1,1[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^n,$$

ist nach dem Hauptsatz über Potenzreihen auf dem offenen Konvergenzintervall $]-1,1[$ stetig, besitzt also insbesondere eine Stammfunktion $F:]-1,1[\to \mathbb{R}$, die sich durch gliedweise Integration ermitteln läßt; für alle $x \in]-1,1[$ ergibt sich damit

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(x\cdot x^n\right) \underset{|x|<1}{\overset{(*)}{=}} \frac{x}{1-x},$$

wobei in $(*)$ die Summenformel für geometrische Reihen eingeht. Gemäß dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung erhält man

$$f(x) = F'(x) = \frac{1\cdot(1-x) - x\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

für alle $x \in]-1,1[$.

- Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$ ist eine geometrische Reihe und konvergiert genau für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$; damit besitzt sie das Konvergenzintervall $]-1,1[$ und folglich den Konvergenzradius $\varrho = 1$. Die dadurch definierte Funktion

$$h:]-1,1[\to \mathbb{R}, \quad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

ist nach dem Hauptsatz über Potenzreihen auf dem offenen Konvergenzintervall $]-1,1[$ differenzierbar, und die Ableitung $h':]-1,1[\to \mathbb{R}$ läßt sich durch gliedweise Differentiation ermitteln, wird demnach gemäß

$$h'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} \qquad \text{für alle} \quad x \in]-1,1[$$

durch die gegebene Potenzreihe dargestellt; da diese im Vergleich zur Originalpotenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ denselben Konvergenzradius $\varrho = 1$ besitzt und keine weiteren Konvergenzpunkte am Rand haben kann, ergibt sich als Konvergenzintervall ebenfalls $]-1,1[$. Für alle $x \in\,]-1,1[$ erhält man zunächst mit Hilfe der geometrischen Summenformel

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$$

und damit durch Differentiation

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1} = h'(x) = (-1)(1-x)^{-2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

5.19 a) Bei der zu untersuchenden Reihe

$$S_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}}\, x^n$$

handelt es sich um eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $a = 0$ mit den Koeffizienten $c_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\begin{aligned}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| &= \left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n+2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}}{(-1)^n}\right| = \left|\frac{(-1)\cdot\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+2}}\right| = \\ &= \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+2}} = \sqrt[3]{\frac{n}{n+2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{1+\frac{2}{n}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt[3]{\frac{1}{1+0}} = \sqrt[3]{1} = 1 = c\end{aligned}$$

besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = 1$; damit ist sie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergent. Für die beiden noch verbleibenden Punkte $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = 1$ gilt:

- Für $x = -1$ ergibt sich

$$S_0(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-(-1))^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}};$$

  für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dabei

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}\cdot n},$$

  so daß $S_0(-1)$ die divergente Minorante $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\cdot n}$ besitzt und daher nach dem Minorantenkriterium selbst divergent ist.

- Für $x = 1$ ergibt sich

$$S_0(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}};$$

  da $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}\,\sqrt[3]{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, ist $S_0(1)$ nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium für alternierende Reihen konvergent.

b) Durch gliedweises Differenzieren der Summanden von $S_0(x)$ ergibt sich die Potenzreihe

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}} \cdot n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n+2}}\, x^n$$

um den Punkt $a = 0$ mit den Koeffizienten $c'_n = \dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n+2}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; sie besitzt denselben Konvergenzradius $\varrho = 1$ wie $S_0(x)$; damit ist auch sie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergent. Ferner gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = 1$

$$\begin{aligned} \left| \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n+2}}\, x^n \right| &= \frac{n+1}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n+2}}\, |x|^n = \frac{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^3}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n+2}} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[3]{n+2}} \cdot \sqrt[3]{n+1} = \underbrace{\sqrt[3]{\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sqrt[3]{n+1}}_{\to\infty} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty; \end{aligned}$$

damit bilden die Reihenglieder von $S_1(x)$ insbesondere keine Nullfolge, weswegen die Reihe $S_1(x)$ nicht konvergieren kann.

c) Gemäß a) ist $I_0 = \,]-1;1] \subseteq \mathbb{R}$ das Konvergenzintervall der Potenzreihe S_0; diese definiert daher die Funktion

$$f : \,]-1;1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = S_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}}\, x^n.$$

Nach dem Hauptsatz über Potenzreihen ist f eine auf dem offenen Intervall $]-1;1[$ beliebig oft differenzierbare Funktion, und für alle $x \in \,]-1;1[$ erhält man durch gliedweises Differenzieren von $S_0(x)$ eine Potenzreihendarstellung von f', damit gilt also $f'(x) = S_1(x)$; für $x = 1$ ist $S_1(1)$ nicht konvergent.

5.20 Jede der gegebenen Funktionen

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp(x) = e^x,$$

und

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x},$$

läßt sich auf unterschiedlichen Wegen in ihre Taylorreihe zum Entwicklungspunkt $a = 2$ entwickeln. Zum einen kann zunächst unter Berechnung aller Ableitungen von exp bzw. f die Taylorreihe nach Definition als

$$T_{\exp}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad \text{bzw.} \qquad T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

aufgestellt und dann ihr Konvergenzbereich bestimmt werden:

- Wegen
$$\exp^{(n)}(x) = e^x \qquad \text{und damit} \qquad \exp^{(n)}(2) = e^2$$
für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist
$$T_{\exp}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$
die Taylorreihe der Exponentialfunktion exp zum Entwicklungspunkt $a = 2$; diese Potenzreihe mit den Koeffizienten $c_n = \frac{e^2}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ besitzt wegen
$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{e^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{e^2}\right| = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
den Konvergenzradius $\varrho = +\infty$; damit ist die Taylorreihe $T_{\exp}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent.
- Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ besitzt die n–te Ableitung von f die Gestalt
$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-(n+1)}$$
für alle $x \in \mathbb{R}^+$; wir weisen dies mit Hilfe vollständiger Induktion nach:
Für „$n = 0$“ ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}^+$
$$(-1)^0 \cdot 0! \cdot x^{-(0+1)} = x^{-1} = \frac{1}{x} = f(x) = f^{(0)}(x).$$
Für „$n \to n+1$“ ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}^+$
$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) \underset{\text{Ind.-vor.}}{=} \left((-1)^n \cdot n! \cdot x^{-(n+1)}\right)' = \\ &= (-1)^n \cdot n! \cdot \left(-(n+1) \cdot x^{-(n+1)-1}\right) = (-1)^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot x^{-(n+2)}. \end{aligned}$$
Damit ist
$$f^{(n)}(2) = (-1)^n \cdot n! \cdot 2^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n \, n!}{2^{n+1}}$$
für alle $n \in \mathbb{N}_0$, weswegen
$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n$$
die Taylorreihe der Funktion f zum Entwicklungspunkt $a = 2$ ist; diese Potenzreihe mit den Koeffizienten $c_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ besitzt wegen
$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{(-1)^n}\right| = \frac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} = c$$
den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = 2$. Damit ist die Taylorreihe $T_f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| < 2$ konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| > 2$ divergent; für die $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| = 2$ ist die Folge $\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Reihenglieder wegen
$$\left|\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n\right| = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot |x-2|^n = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 2^n = \frac{1}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ keine Nullfolge und damit die Taylorreihe divergent. Insgesamt ergibt sich wegen

$$|x-2| < 2 \iff -2 < x-2 < 2 \iff 0 < x < 4$$

das Konvergenzintervall $]0;4[$ der Taylorreihe.

Zum anderen kann der Funktionsterm von exp bzw. f in eine Potenzreihe um den Punkt $a = 2$ entwickelt werden, welche dann mit der Taylorreihe $T_{\exp}(x)$ bzw. $T_f(x)$ zum Entwicklungspunkt $a = 2$ übereinstimmt:

- Unter Verwendung der Exponentialreihe erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\exp(x) = \exp(2 + (x-2)) = e^2 \exp(x-2) = \\ = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n;$$

  damit ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$

  die Taylorreihe der Exponentialfunktion exp an der Stelle $a = 2$, und diese konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$ gegen exp.

- Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2 + (x-2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{x-2}{2}\right)},$$

  und unter Verwendung der für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\left|-\frac{x-2}{2}\right| < 1$, also für $x \in]0;4[$ konvergenten geometrischen Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $q = -\frac{x-2}{2}$ ergibt sich damit

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n;$$

  damit ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n$$

  die Taylorreihe der Funktion f an der Stelle $a = 2$, und diese konvergiert auf $]0;4[$ gegen f.

5.21 a) Die Funktion

$$f :]0;\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln x,$$

ist beliebig oft differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f''(x) = (-1) \cdot x^{-2}, \quad f'''(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot x^{-3},$$

$$f^{(4)}(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot x^{-4} \quad \text{usw.}$$

weswegen die Vermutung

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ naheliegt; wir weisen dies mit vollständiger Induktion nach:
„$n = 1$“:

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = (-1)^0 \cdot 0! \cdot x^{-1}.$$

„$n \to n+1$“:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) = \left((-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}\right)' = \\ &= (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot \left((-n) \cdot x^{-n-1}\right) = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-(n+1)}. \end{aligned}$$

Wegen

$$f(2) = \ln 2 \qquad \text{und} \qquad f^{(n)}(2) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{2^n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

ergibt sich für die Taylorreihe von f mit dem Entwicklungspunkt $a = 2$

$$\begin{aligned} T_f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!} (x-2)^n = f(2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!} (x-2)^n = \\ &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{2^n \cdot n!} (x-2)^n = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} (x-2)^n \end{aligned}$$

für alle $x \in]0; \infty[$.

b) Bei der in a) bestimmten Taylorreihe $T_f(x)$ handelt es sich um eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $a = 2$ mit den Koeffizienten

$$c_0 = \ln 2 \qquad \text{und} \qquad c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot n}{2^{n+1} \cdot (n+1) \cdot (-1)^{n-1}}\right| = \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2(1+\frac{1}{n})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} = c$$

ergibt sich für den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = 2$; damit ist die Potenzreihe konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| < 2$, also für alle $x \in]0; 4[$, und divergent für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| > 2$, also für alle $x \in]-\infty; 0[\cup]4; \infty[$. Für $x = 0$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} (x-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

als (negative) harmonische Reihe divergent, und für $x = 4$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} (x-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

als alternierende harmonische Reihe konvergent. Insgesamt konvergiert also die Taylorreihe $T_f(x)$ genau für alle $x \in]0; 4]$.

5.22 Da die Integrandenfunktion

$$f :]-1;1[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^3},$$

(als gebrochenrationale Funktion) stetig ist, ist die Integralfunktion

$$F :]-1;1[\to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3},$$

nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung differenzierbar, und für alle $x \in]-1,1[$ gilt

$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{1-(-x^3)},$$

woraus sich wegen $|-x^3| = |x|^3 < 1$ unter Verwendung der Summenformel für geometrische Reihen dann

$$F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^3\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}$$

ergibt. Nach dem Hauptsatz über Potenzreihen stellt damit die gliedweise integrierte Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}\, x^{3n+1}$$

mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$ auf dem Konvergenzintervall $]-1;1[$ eine Stammfunktion von F' dar, es gibt also eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}\, x^{3n+1} + c$$

für alle $x \in]-1;1[$. Speziell für den Entwicklungspunkt $x = 0$ ergibt sich

$$F(0) = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^3} = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}\, 0^{3n+1} = 0,$$

so daß man $c = 0$ und damit schließlich

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}\, x^{3n+1}$$

für alle $x \in]-1;1[$ erhält.

5.23 a) Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp\left(x^2\right).$$

Die Exponentialreihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z),$$

so daß sich

$$f(x) = \exp\left(x^2\right) \underset{z=x^2}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(x^2\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^{2k}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt; dies ist eine Potenzreihendarstellung von f mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$ und stimmt damit mit der Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt $a = 0$ überein.

b) Gemäß Teilaufgabe a) wird die Funktion f durch die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad \text{mit} \qquad c_n = \begin{cases} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(\frac{n}{2})!}, & \text{für } n = 2\,k \text{ gerade,} \\ 0, & \text{für } n = 2\,k+1 \text{ ungerade,} \end{cases}$$

gegeben; nach dem Hauptsatz über Potenzreihen ergibt sich damit

$$f^{(n)}(0) = n! \cdot c_n = \begin{cases} \frac{n!}{(\frac{n}{2})!}, & \text{für } n \text{ gerade,} \\ 0, & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

5.24 a) Die gegebene Potenzreihe

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{8^n}{(3n)!}\, x^{3n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

konvergiert zunächst in ihrem Entwicklungspunkt $a = 0$; für alle $x \neq 0$ ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{8^{n+1} \cdot x^{3(n+1)}}{(3(n+1))!} \cdot \frac{(3n)!}{8^n \cdot x^{3n}}\right| = \left|\frac{8^{n+1}}{8^n}\right| \cdot \left|\frac{x^{3n+3}}{x^{3n}}\right| \cdot \left|\frac{(3n)!}{(3n+3)!}\right| = \\ &= 8 \cdot \left|x^3\right| \cdot \frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 8 \cdot \left|x^3\right| \cdot 0 = 0 < 1, \end{aligned}$$

so daß die Reihe $(*)$ nach dem Quotientenkriterium (absolut) konvergiert. Insgesamt ist die Potenzreihe $(*)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent.

b) Durch die gegebene Potenzreihe $(*)$ wird gemäß a) die Grenzfunktion

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{(3n)!}\, x^{3n},$$

definiert; nach dem Hauptsatz über Potenzreihen ist ϕ beliebig oft differenzierbar, und durch gliedweises Differenzieren erhält man zunächst

$$\phi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{(3n)!} \left(3n\, x^{3n-1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{(3n-1)!}\, x^{3n-1},$$

sodann

$$\phi''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{(3n-1)!} \left((3n-1)\, x^{3n-2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{(3n-2)!}\, x^{3n-2}$$

und schließlich

$$\phi'''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{(3n-2)!} \left((3n-2)\, x^{3n-3}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{(3n-3)!}\; x^{3n-3} =$$

$$= 8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{n-1}}{(3(n-1))!}\; x^{3(n-1)} = 8 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{(3n)!}\; x^{3n} = 8 \cdot \phi(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist ϕ eine Lösung der linearen Differentialgleichung $y''' = 8\, y$ dritter Ordnung und genügt wegen

$$\phi(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8^n}{(3n)!} \cdot \underbrace{0^{3n}}_{=0 \text{ für } n \in \mathbb{N}} \right) \underset{n=0}{=} \frac{8^0}{0!} \cdot 0^0 = 1$$

sowie

$$\phi'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8^n}{(3n-1)!} \cdot \underbrace{0^{3n-1}}_{=0 \text{ für } n \in \mathbb{N}} \right) = 0$$

und

$$\phi''(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8^n}{(3n-2)!} \cdot \underbrace{0^{3n-2}}_{=0 \text{ für } n \in \mathbb{N}} \right) = 0$$

auch den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ und $y''(0) = 0$.

5.25 a) Nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung ist die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

differenzierbar mit $F'(x) = e^{-x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

ergibt sich damit

$$F'(x) = e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\; x^{2n}.$$

Nach dem Hauptsatz über Potenzreihen darf die auf $\mathbb{R}$ konvergente Potenzreihe „gliedweise“ integriert werden, so daß wir

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + c = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}\; x^{2n+1} + c$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ erhalten; dabei ergibt sich wegen

$$F(0) = \int_0^0 e^{-t^2} = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)} \cdot 0^{2n+1} = 0$$

für die noch bestimmende Integrationskonstante $c = 0$. Demnach gilt

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}\; x^{2n+1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Die in a) ermittelte Potenzreihendarstellung für die Funktion F stimmt mit der Taylorreihe T_F von F überein; damit ist

$$F(x) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{x}_{T_1(x)=T_2(x)} - \frac{1}{3}\,x^3}_{T_3(x)=T_4(x)} + \frac{1}{10}\,x^5}_{T_5(x)=T_6(x)} - \frac{1}{42}\,x^7}_{T_7(x)=T_8(x)} \pm \cdots$$

wobei T_n das n–te Taylorpolynom von F zum Entwicklungspunkt 0 sei. Für $x = 1$ ergibt sich demnach

$$F(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)} \cdot 1^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)},$$

also die alternierende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{1}{n!\,(2n+1)} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0;$$

da nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, ließe sich die Konvergenz dieser Reihe mit dem Leibnizkriterium nachweisen. Für die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ ergibt sich damit, daß

- die Teilfolge $(s_{2m})_{m\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend sowie
- die Teilfolge $(s_{2m+1})_{m\in\mathbb{N}_0}$ monoton wachsend ist;

damit folgt aber für die Summe s der Reihe, daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$

- einerseits s zwischen s_n und s_{n+1} sowie
- andererseits s_{n+2} zwischen s_n und s

liegt, woraus man

$$a_{n+1} - a_{n+2} = |s_{n+2} - s_n| \le |s - s_n| \le |s_{n+1} - s_n| = a_{n+1}$$

erhält. Wegen

$$|s - s_2| \le a_3 = \frac{1}{42} < \frac{1}{40}$$

und

$$|s - s_1| \ge a_2 - a_3 = \frac{1}{10} - \frac{1}{42} = \frac{8}{105} \ge \frac{1}{40}$$

ist

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)}\; x^{2k+1} = x - \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{10}\,x^5 = T_5(x)$$

das gesuchte Taylorpolynom.

5.26 a) Die Exponentialreihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$, so daß sich

$$f(x) = e^{-x^2} \underset{z=-x^2}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \, x^{2n}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt; nach dem Hauptsatz über Potenzreihen darf diese Potenzreihe gliedweise integriert werden, und es gilt

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \, \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^x =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \, \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \, \frac{0^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} \, x^{2n+1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Wegen

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x) \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

ist der Graph G_f von f achsensymmetrisch zur y–Achse, und es ergibt sich für

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx = 2 \cdot \int_0^1 e^{-x^2}\,dx = 2 \cdot F(1) =$$
$$= 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)} \, 1^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2}{n!\,(2n+1)}$$

die alternierende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{2}{n!\,(2n+1)} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0;$$

da nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, ließe sich die Konvergenz dieser Reihe mit dem Leibnizkriterium nachweisen. Für die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ ergibt sich damit, daß

- die Teilfolge $(s_{2m})_{m\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend sowie
- die Teilfolge $(s_{2m+1})_{m\in\mathbb{N}_0}$ monoton wachsend ist;

damit liegt aber die Summe s der Reihe stets zwischen zwei aufeinanderfolgenden Partialsummen s_n und s_{n+1}, so daß sich

$$|s - s_n| \le |s_{n+1} - s_n| = \left|(-1)^{n+1} a_{n+1}\right| = a_{n+1}$$

mit

$$a_{n+1} = \frac{2}{(n+1)!\,(2(n+1)+1)} = \frac{2}{(n+1)!\,(2n+3)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ergibt; für $n = 2$ erhält man also

$$|s - s_2| \le a_2 = \frac{2}{3! \cdot 7} = \frac{2}{6 \cdot 7} = \frac{1}{21} < \frac{1}{10}.$$

Damit wird der Wert $s = \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx$ des Integrals durch

$$s_2 = \sum_{n=0}^{2}(-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 = 2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{23}{15}$$

bis auf einen Fehler von weniger als $\frac{1}{10}$ approximiert.

5.27 a) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $a_n = (-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}\,x^{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; wegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}\,x^{2n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{n}} = \frac{\sqrt[n]{x^{2n}}}{\sqrt[n]{n}} = \frac{x^2}{\sqrt[n]{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{x^2}{1} = x^2$$

ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}\,x^{2n}$ nach dem Wurzelkriterium für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergent. Des weiteren ist für die verbleibenden $x \in \{-1, 1\}$ die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}\,x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ als alternierende harmonische Reihe konvergent.

b) Nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung ist die Funktion

$$F : [0;1[\,\to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x \ln\left(t^2+1\right)dt,$$

differenzierbar mit $F'(x) = \ln\left(x^2+1\right)$ für alle $x \in [0;1[$. Mit Hilfe der Reihenentwicklung des natürlichen Logarithmus

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,x^n$$

für alle $x \in \,]-1;1]$ ergibt sich damit insbesondere für alle $x \in [0;1[$

$$F'(x) = \ln\left(x^2+1\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,x^{2n}.$$

Nach dem Hauptsatz über Potenzreihen darf die sogar auf $]-1;1[$ konvergente Potenzreihe „gliedweise" integriert werden, so daß wir

$$F(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right) + c$$

für alle $x \in [0;1[$ erhalten; dabei ergibt sich wegen

$$F(0) = \int_0^0 \ln\left(t^2+1\right)dt = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{0^{2n+1}}{2n+1} = 0$$

für die noch bestimmende Integrationskonstante $c = 0$. Demnach gilt

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\,(2n+1)}\,x^{2n+1}$$

für alle $x \in [0;1[$.

5.28 a) Die gegebene Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{n(n-1)}$ besitzt den Entwicklungspunkt $a = 0$ sowie die Koeffizienten $c_n = \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Wegen

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{n\,(n-1)}{(n+1)\,n} = \frac{n-1}{n+1} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1-0}{1+0} = 1 = c$$

gilt für den Konvergenzradius ϱ der Potenzreihe $\varrho = \dfrac{1}{c} = 1$; damit ist die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} c_n\, x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{n(n-1)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergent. Ferner gilt für $x \in \{-1; 1\}$

$$|c_n\, x^n| = |c_n| = \frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{1}{(n-1)^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$; damit besitzt in diesem Fall die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} c_n\, x^n$ die konvergente Majorante $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und ist folglich nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent.

b) Da die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{n(n-1)}$ gemäß a) den Konvergenzradius $\varrho = 1$ besitzt, definiert sie die beliebig oft differenzierbare Funktion

$$f : \,]-1;1[\, \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{n(n-1)},$$

mit

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n\, x^{n-1}}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{n-1}}{n-1}$$

sowie

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n-1)\, x^{n-2}}{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n x^{n-2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Daneben betrachten wir die ebenfalls beliebig oft differenzierbare Funktion

$$g : \,]-1;1[\, \to \mathbb{R}, \quad g(x) = -x + (1+x)\, \ln(1+x),$$

und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ ergibt sich

$$g'(x) = -1 + \left(1 \cdot \ln(1+x) + (1+x) \cdot \frac{1}{1+x}\right) = \\ = -1 + \ln(1+x) + 1 = \ln(1+x)$$

sowie

$$g''(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt demnach

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-2} x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} (-x)^{n-2} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} = g''(x)$$

und folglich $f'(x) = g'(x) + c_1$ mit einer geeigneten Konstante $c_1 \in \mathbb{R}$; speziell im Entwicklungspunkt $a = 0$ ergibt sich $f'(0) = 0$ sowie $g'(0) = \ln 1 = 0$ und damit $c_1 = 0$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt also $f'(x) = g'(x)$ und folglich $f(x) = g(x) + c_0$ mit einer geeigneten Konstante $c_0 \in \mathbb{R}$; speziell im Entwicklungspunkt $a = 0$ ergibt sich $f(0) = 0$ sowie $g(0) = \ln 1 = 0$ und damit auch $c_0 = 0$. Insgesamt erhält man also

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)} = f(x) = g(x) = -x + (1+x) \ln(1+x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.