LMU
LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Differential– und Integralrechnung 4 — Lösungsvorschlag —

4.1 Wir betrachten die Einschränkung f der Sinusfunktion auf das abgeschlossene Intervall $[a;b]$, es ist also

$$f : [a;b] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x.$$

Damit ist f differenzierbar mit $f'(x) = \cos x$ für alle $x \in [a;b]$; insbesondere genügt f den Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, nämlich Stetigkeit auf $[a;b]$ und Differenzierbarkeit auf $]a;b[$. Der Mittelwertsatz liefert nun ein $\xi \in \,]a;b[$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}, \qquad \text{also} \qquad \cos\xi = \frac{\sin b - \sin a}{b-a}.$$

Da nun die Cosinusfunktion auf den Intervall $[0;\pi]$ streng monoton fallend ist, folgt aus $0 < a < \xi < b < \pi$ schon $\cos a > \cos\xi > \cos b$, also

$$\cos b < \frac{\sin b - \sin a}{b-a} < \cos a,$$

woraus sich wegen $b - a > 0$ die Beziehung

$$(b-a)\,\cos b < \sin b - \sin a < (b-a)\,\cos a$$

ergibt.

4.2 Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin^3 x + \cos x,$$

ist als Summe des Cosinus und der Verknüpfung einer Polynomfunktion und des Sinus stetig und differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt mit der Kettenregel

$$f'(x) = 3\,\sin^2 x \cdot \cos x - \sin x.$$

Seien nun x, $y \in \mathbb{R}$; da für $x = y$ die zu zeigende Ungleichung trivial ist, können wir $x \neq y$ und damit sogar $y < x$ annehmen. Wir wenden den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für die Funktion f auf dem Intervall $[y;x]$ an und erhalten ein $\xi \in \,]y;x[$ mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi) \cdot (x-y).$$

Wegen

$$\begin{aligned}|f'(\xi)| = \left|3\,\sin^2\xi\cdot\cos\xi - \sin\xi\right| \le \left|3\,\sin^2\xi\cdot\cos\xi\right| + |\sin\xi| =&\\ = 3\cdot\underbrace{|\sin\xi|}_{\le 1}^2\cdot\underbrace{|\cos\xi|}_{\le 1} + \underbrace{|\sin\xi|}_{\le 1} \le 3\cdot 1^2\cdot 1 + 1 = 4&\end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned}\left|\sin^3(x) + \cos(x) - \sin^3(y) - \cos(y)\right| = |f(x) - f(y)| =&\\ = |f'(\xi)\cdot(x-y)| = |f'(\xi)|\cdot|x-y| \le 4\cdot|x-y|.&\end{aligned}$$

4.3 Die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x) = \sin\frac{x^3+x}{2},$$

ist als Verknüpfung des Sinus und einer Polynomfunktion stetig und differenzierbar, und für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt mit der Kettenregel

$$f'(x) = \left(\cos\frac{x^3+x}{2}\right)\cdot\frac{3\,x^2+1}{2}.$$

Seien nun $x,\ y\in[-1;1]$; da für $x=y$ die zu zeigende Ungleichung trivial ist, können wir $x\ne y$ und damit sogar $y<x$ annehmen. Wir wenden den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für die Funktion f auf dem Intervall $[y;x]$ an und erhalten ein $\xi\in\,]y;x[$ mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)\cdot(x-y).$$

Wegen $\xi\in\,]y;x[\,\subseteq[-1;1]$ ist $-1\le\xi\le 1$, also $-1\le\xi^3\le 1$, und damit $-2\le\xi^3+\xi\le 2$, also $-1\le\frac{\xi^3+\xi}{2}\le 1$; aufgrund des Monotonieverhaltens des Cosinus erhält man also $\cos\frac{\xi^3+\xi}{2}\ge\cos 1$. Ferner ist $\xi^2\ge 0$ und damit $\frac{3\,\xi^2+1}{2}\ge\frac{1}{2}$, woraus sich

$$f'(\xi) = \underbrace{\cos\frac{\xi^3+\xi}{2}}_{\ge\cos 1}\cdot\underbrace{\frac{3\,\xi^2+1}{2}}_{\ge\frac{1}{2}} \ge \frac{\cos 1}{2} > 0$$

ergibt. Zusammenfassend erhält man

$$\begin{aligned}\left|\sin\frac{x^3+x}{2} - \sin\frac{y^3+y}{2}\right| = |f(x)-f(y)| =&\\ = |f'(\xi)\cdot(x-y)| = |f'(\xi)|\cdot|x-y| \ge \frac{\cos 1}{2}\cdot|x-y|\,.&\end{aligned}$$

4.4 a) Die Funktion f ist als Differenz stetiger und differenzierbarer Funktionen selbst stetig und differenzierbar, und es gilt $f'(x) = 2\,e^x - 1$ für alle $x\in\mathbb{R}^+$. Für das Verhalten von f am Rande von $D_f=\mathbb{R}^+$ ergibt sich zunächst

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}(2\,e^x - x) = 2\cdot e^0 - 0 = 2;$$

ferner gilt nach der Regel von de l'Hospital $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ und damit

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (2\,e^x - x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{e^x}_{\to\infty} \cdot \underbrace{\left(2 - \frac{x}{e^x}\right)}_{\to 2} = +\infty.$$

Wir zeigen nun die Behauptung $W_f =]2;\infty[$ durch den Nachweis der beiden Inklusionen:

- Wegen $f'(x) = 2\,e^x - 1 > 2\,e^0 - 1 = 2 - 1 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ ist f auf $\mathbb{R}^+$ streng monoton wachsend, so daß $2 < f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ und damit $W_f \subseteq]2;\infty[$ gilt.
- Für alle $y \in]2;\infty[$ gibt es wegen $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 2$ ein $0 < a < 1$ mit $f(a) < y$ und wegen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ein $b > 1$ mit $y < f(b)$, so daß nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in]a;b[$ mit $f(\xi) = y$ existiert; damit gilt $]2;\infty[\subseteq W_f$.

b) Die Funktion f ist auf einem Intervall, nämlich $D_f = \mathbb{R}^+$, definiert und gemäß a) streng monoton; daher besitzt f eine zunächst stetige Umkehrfunktion $f^{-1} : W_f \to \mathbb{R}$. Da f ferner differenzierbar ist mit $f'(x) > 1$ und damit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$, ist die Umkehrfunktion f^{-1} sogar differenzierbar.

c) Seien x, $y \in W_f$ mit $x \neq y$; man kann $x > y$ annehmen. Wir wenden den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für die Umkehrfunktion f^{-1} auf dem Intervall $[y;x]$ an und erhalten ein $\xi \in]y;x[$ mit

$$f^{-1}(x) - f^{-1}(y) = \left(f^{-1}\right)'(\xi) \cdot (x - y);$$

dabei gilt nach der Ableitungsregel für Umkehrfunktionen

$$\left(f^{-1}\right)'(\xi) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\xi))}.$$

Wegen $f'(z) > 1$ für alle $z \in D_f$ ist insbesondere $f'(f^{-1}(\xi)) > 1$, und es ergibt sich

$$\left|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\right| = \left|\left(f^{-1}\right)'(\xi)\right| \cdot |x - y| = \left|\frac{1}{f'(f^{-1}(\xi))}\right| \cdot |x - y| < |x - y|.$$

4.5 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Einschränkung f des natürlichen Logarithmus auf das abgeschlossene Intervall $[n;n+1]$, es ist also

$$f : [n;n+1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln x.$$

Damit ist f differenzierbar mit $f'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x \in [n;n+1]$; insbesondere genügt f den Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, nämlich Stetigkeit auf $[n;n+1]$ und Differenzierbarkeit auf $]n;n+1[$. Der Mittelwertsatz liefert nun ein $\xi \in]n;n+1[$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n}, \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{\xi} = \ln(n+1) - \ln(n).$$

Wegen

$$n < \xi < n+1 \qquad \text{folgt} \qquad \frac{1}{n} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{n+1},$$

so daß sich insgesamt

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n},$$

insbesondere also die Behauptung

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

ergibt. Damit gilt die Beziehung

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

auch für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$, und man erhält zum einen

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \\ = \sum_{k=2}^{n+1} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)\end{aligned}$$

und zum anderen

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - 1 = \left(1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\right) - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \\ \leq \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) = \\ = \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) = \ln(n) - \ln 1 = \ln(n).\end{aligned}$$

4.6 Es ist hier die Einschränkung der (beliebig oft differenzierbaren) Tangensfunktion auf das Intervall $\left]\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right[$ zu betrachten; für alle $x \in \left]\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right[$ gilt dabei

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

a) Seien $x,\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; da für $x = y$ die zu zeigende Ungleichung trivial ist, können wir $x \neq y$ und damit sogar $y < x$ annehmen. Wir wenden den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für die Tangensfunktion auf dem Intervall $[y; x]$ an und erhalten ein $\xi \in \,]y; x[$ mit

$$\tan x - \tan y = \tan' \xi \cdot (x - y) = \left(1 + \tan^2 \xi\right) \cdot (x - y),$$

woraus sich

$$|\tan x - \tan y| = \underbrace{\left(1 + \tan^2 \xi\right)}_{\geq 1} \cdot |x - y| \geq |x - y|$$

ergibt.

b) Sei $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Wir wenden den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für die Tangensfunktion auf dem Intervall $[0; x]$ an und erhalten ein $\xi \in \left]0; x\right[$ mit

$$\tan x - \tan 0 = \tan' \xi \cdot (x - 0), \quad \text{also} \quad \tan x = \left(1 + \tan^2 \xi\right) \cdot x;$$

wegen $\xi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ist $\tan \xi > 0$ und damit $1 + \tan^2 \xi > 1$, woraus sich wegen $x > 0$ dann

$$\tan x = \left(1 + \tan^2 \xi\right) \cdot x > 1 \cdot x = x$$

ergibt.

c) Wir nehmen zum Widerspruch an, es gebe zwei verschiedene $x, y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ mit

$$|\tan x - \tan y| = |x - y|;$$

dabei können wir ohne Einschränkung $y < x$ annehmen. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung für die Tangensfunktion auf dem Intervall $[y; x]$ liefert nun ein $\xi \in \left]y; x\right[$ mit

$$\tan x - \tan y = \tan' \xi \cdot (x - y) = \left(1 + \tan^2 \xi\right) \cdot (x - y)$$

und damit

$$|x - y| = |\tan x - \tan y| = \left(1 + \tan^2 \xi\right) \cdot |x - y|;$$

wegen $|x - y| \neq 0$ folgt dann

$$1 = 1 + \tan^2 \xi, \quad \text{also} \quad \tan^2 \xi = 0 \quad \text{bzw.} \quad \tan \xi = 0,$$

so daß wegen $\xi \in \left]y; x\right[\subseteq \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ schon $\xi = 0$ ist. Es gilt also

$$-\frac{\pi}{2} < y < 0 < x < \frac{\pi}{2} \qquad \text{und damit} \qquad 0 < -y < \frac{\pi}{2},$$

woraus sich gemäß b)

$$\tan x > x > 0 \qquad \text{und} \qquad \tan(-y) > -y > 0$$

und somit in

$$|\tan x - \tan y| = \Big|\underbrace{\tan x}_{>0} + \underbrace{\tan(-y)}_{>0}\Big| = \underbrace{\tan x}_{>x} + \underbrace{\tan(-y)}_{>-y} >$$
$$> \underbrace{x}_{>0} + \underbrace{(-y)}_{>0} = |x + (-y)| = |x - y|$$

ein Widerspruch zur Voraussetzung ergibt.

4.7 Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, ist als Verkettung des Cosinus und einer linearen Funktion beliebig oft differenzierbar; mit der Kettenregel erhält man

- $f'(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot 1 = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$,

- $f''(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot 1 = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ und
- $f'''(x) = -\left(-\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot 1 = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen

$$f(0) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f'(0) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad f''(0) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ergibt sich für das zweite Taylorpolynom T_2 von f zum Entwicklungspunkt $a = 0$

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x^2}{2\sqrt{2}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach der Taylorformel gilt nun $f(x) = T_2(x) + R_3(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, insbesondere also $f(1) = T_2(1) + R_3(1)$, wobei es gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes ein ξ zwischen $a = 0$ und $x = 1$ mit

$$R_3(1) = \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot 1^3 = \frac{1}{6}\,f'''(\xi) = \frac{1}{6}\,\sin\left(\xi + \frac{\pi}{4}\right)$$

gibt; damit ergibt sich aber

$$\left|\cos\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - T_2(1)\right| = |f(1) - T_2(1)| = |R_3(1)| = \frac{1}{6} \cdot \underbrace{\left|\sin\left(\xi + \frac{\pi}{4}\right)\right|}_{\leq 1} \leq \frac{1}{6}.$$

4.8 a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\,\sin x$, ist als Produkt einer linearen Funktion und des Sinus beliebig oft differenzierbar, und mit Hilfe der Produktregel ergibt sich

$$f'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x\,\cos x$$

und

$$f''(x) = \cos x + (1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x)) = 2\,\cos x - x\,\sin x$$

sowie

$$f'''(x) = 2\,(-\sin x) - (1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x) = -3\,\sin x - x\,\cos x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(0) = 2,$$

und man erhält für das zweite Taylorpolynom T_2 von f im Entwicklungspunkt $a = 0$

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 = x^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Nach der Taylorformel gilt $f(x) = T_2(x) + R_3(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein ξ zwischen dem Entwicklungspunkt $a = 0$ und x mit $R_3(x) = \dfrac{f'''(\xi)}{3!}\, x^3$ gibt; dabei gilt

$$|f'''(\xi)| = |-3\,\sin\xi - \xi\,\cos\xi| \le 3\,\underbrace{|\sin\xi|}_{\le 1} + \underbrace{|\xi|}_{\le |x|} \cdot \underbrace{|\cos\xi|}_{\le 1} \le 3 + |x|$$

und damit

$$|f(x) - T_2(x)| = |R_3(x)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}\, x^3\right| = \frac{|f'''(\xi)|}{6} \cdot |x^3| \le \frac{1}{6}\,(3 + |x|)\,|x|^3$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

4.9 Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2-x)\,\sin x$, ist als Produkt einer linearen Funktion und des Sinus beliebig oft differenzierbar, und mit Hilfe der Produktregel ergibt sich

$$f'(x) = (-1)\cdot\sin x + (2-x)\cdot\cos x = -\sin x + (2-x)\,\cos x$$

und

$$f''(x) = -\cos x + ((-1)\cdot\cos x + (2-x)\cdot(-\sin x)) = -2\,\cos x - (2-x)\,\sin x$$

sowie

$$f'''(x) = -2\,(-\sin x) - ((-1)\cdot\sin x + (2-x)\cdot\cos x) = 3\,\sin x - (2-x)\,\cos x$$

und

$$f^{(4)}(x) = 3\,\cos x - ((-1)\cdot\cos x + (2-x)\cdot(-\sin x)) = 4\,\cos x + (2-x)\,\sin x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 2, \qquad f''(0) = -2 \quad \text{und} \quad f'''(0) = -2,$$

und man erhält für das dritte Taylorpolynom T_3 von f im Entwicklungspunkt $a = 0$

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 2\,x - x^2 - \frac{1}{3}\,x^3$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach der Taylorformel gilt $f(x) = T_3(x) + R_4(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein ξ zwischen dem Entwicklungspunkt $a = 0$ und x mit $R_4(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\, x^4$ gibt; dabei gilt

$$|f^{(4)}(\xi)| = |4\,\cos\xi + (2-\xi)\,\sin\xi| \le 4\,\underbrace{|\cos\xi|}_{\le 1} + |2-\xi| \cdot \underbrace{|\sin\xi|}_{\le 1} \le$$
$$\le 4 + |2-\xi| \le 4 + (2 + |\xi|) = 6 + \underbrace{|\xi|}_{\le |x|} \le 6 + |x|$$

und damit

$$|f(x) - T_3(x)| = |R_4(x)| = \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\, x^4\right| = \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{24} \cdot |x^4| \le \frac{6 + |x|}{24} \cdot |x|^4.$$

4.10 a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (\pi - x) \cdot \cos x,$$

ist als Produkt einer linearen Funktion und des Cosinus beliebig oft differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1) \cdot \cos x + (\pi - x) \cdot (-\sin x) \\ &= -\cos x + (x - \pi) \cdot \sin x, \\ f''(x) &= -(-\sin x) + (1 \cdot \sin x + (x - \pi) \cdot \cos x) \\ &= 2 \sin x + (x - \pi) \cdot \cos x, \\ f'''(x) &= 2 \cos x + (1 \cdot \cos x + (x - \pi) \cdot (-\sin x)) \\ &= 3 \cos x + (\pi - x) \cdot \sin x. \end{aligned}$$

b) Im Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{2}$ mit $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ und $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ gilt

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos \frac{\pi}{2} &= \frac{\pi}{2} \cdot 0 = 0, \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) \cdot \sin \frac{\pi}{2} &= 0 + \left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 = -\frac{\pi}{2}, \\ f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) \cdot \cos \frac{\pi}{2} &= 2 \cdot 1 + \left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot 0 = 2, \end{aligned}$$

und für das Taylorpolynom T_2 von f ergibt sich damit

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} f''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= 0 + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{3\pi}{2} x + \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Nach der Taylorformel gilt $f(x) = T_2(x) + R_3(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes ein ξ zwischen dem Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{2}$ und x mit

$$R_3(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3$$

gibt; für jedes $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ aus dem symmetrisch zum Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{2}$ liegenden Intervall $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ gilt $\left|x - \frac{\pi}{2}\right| \le \frac{\pi}{4}$, und die Stelle ξ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und x befindet sich ebenfalls im Intervall $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} |f'''(\xi)| &= |3 \cos \xi + (\pi - \xi) \cdot \sin \xi| \le |3 \cos \xi| + |(\pi - \xi) \cdot \sin \xi| = \\ &= 3 \cdot \underbrace{|\cos \xi|}_{\le 1} + \Big|\underbrace{\pi - \xi}_{\ge \frac{\pi}{4} > 0}\Big| \cdot \underbrace{|\sin \xi|}_{\le 1} \le 3 \cdot 1 + \underbrace{(\pi - \xi)}_{\le \frac{3\pi}{4} \le 3} \cdot 1 \le 3 + 3 = 6 \end{aligned}$$

und folglich die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(x) - T_2(x)| = |R_3(x)| &= \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3\right| = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \underbrace{|f'''(\xi)|}_{\le 6} \cdot \underbrace{\left|x - \frac{\pi}{2}\right|^3}_{\le (\frac{\pi}{4})^3} \le \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 = \frac{\pi^3}{64}. \end{aligned}$$

4.11 Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \sin x$, ist als Produkt der Exponentialfunktion und des Sinus beliebig oft differenzierbar; mit Hilfe der Produktregel erhält man

- $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$,
- $f''(x) = e^x (\sin x + \cos x) + e^x (\cos x - \sin x) = 2\, e^x \cos x$,
- $f'''(x) = 2\, e^x \cos x + 2\, e^x (-\sin x) = 2\, e^x (\cos x - \sin x)$,
- $f^{(4)}(x) = 2\, e^x (\cos x - \sin x) + 2\, e^x (-\sin x - \cos x) = -4\, e^x \sin x$ und
- $f^{(5)}(x) = -4\, e^x \sin x - 4\, e^x \cos x = -4\, e^x (\sin x + \cos x)$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1, \qquad f''(0) = 2, \qquad f'''(0) = 2 \quad \text{und} \quad f^{(4)}(0) = 0$$

ergibt sich für das vierte Taylorpolynom T_4 von f zum Entwicklungspunkt $a = 0$

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2}\, x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\, x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\, x^4 = x + x^2 + \frac{x^3}{3}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach der Taylorformel gilt nun $f(x) = T_4(x) + R_5(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei es gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein ξ_x zwischen $a = 0$ und x mit $R_5(x) = \frac{f^{(5)}(\xi_x)}{5!}\, x^5$ gibt. Für $x \neq 0$ erhält man damit

$$\frac{f(x) - T_4(x)}{x^4} = \frac{R_5(x)}{x^4} = \left(\frac{f^{(5)}(\xi_x)}{120}\, x^5 \right) \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{x}{120} \cdot f^{(5)}(\xi_x);$$

beim Grenzübergang $x \to 0$ ergibt sich auch $\xi_x \to 0$, woraus wegen der Stetigkeit der fünften Ableitung $f^{(5)}$ dann $f^{(5)}(\xi_x) \to f^{(5)}(0) = -4$ folgt. Insgesamt erhält man also

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - T_4(x)}{x^4} = \lim_{x \to 0} \left(\underbrace{\frac{x}{120}}_{\to 0} \cdot \underbrace{f^{(5)}(\xi_x)}_{\to -4} \right) = 0 \cdot (-4) = 0.$$

Wir können also $p = T_4$ wählen. Des weiteren gilt

$$|f(x) - T_4(x)| = |R_5(x)| = \left| \frac{f^{(5)}(\xi_x)}{5!}\, x^5 \right| = \left| -4\, e^{\xi_x} (\sin \xi_x + \cos \xi_x) \right| \cdot \frac{|x|^5}{120} \leq$$

$$\leq 4 \underbrace{e^{\xi_x}}_{\leq e^{\frac{1}{2}}} \left(\underbrace{|\sin \xi_x|}_{\leq 1} + \underbrace{|\cos \xi_x|}_{\leq 1} \right) \cdot \frac{|x|^5}{120} \leq 8\, e^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{|x|^5}{120} \underset{|x| \leq \frac{1}{2}}{\leq} 8\, e^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{120} = \frac{\sqrt{e}}{480}$$

für alle $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$; dabei geht ein, daß die Exponentialfunktion monoton wächst.

4.12 a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp(x) \sin(x) = e^x \sin x,$$

ist als Produkt der Exponentialfunktion und des Sinus beliebig oft differenzierbar; mit Hilfe der Produktregel erhält man

- $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$,
- $f''(x) = e^x (\sin x + \cos x) + e^x (\cos x - \sin x) = 2\, e^x \cos x$ und
- $f'''(x) = 2\, e^x \cos x + 2\, e^x (-\sin x) = 2\, e^x (\cos x - \sin x)$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1 \quad \text{und} \quad f''(0) = 2$$

ist das zweite Taylorpolynom T_2 von f zum Entwicklungspunkt $a = 0$ also

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2}\, x^2 = x + x^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Nach der Taylorformel gilt nun $f(x) = T_2(x) + R_3(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei es gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein ξ zwischen $a = 0$ und x mit $R_3(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}\, x^3$ gibt. Speziell für alle $x \in \left[-\frac{1}{10}, 0\right]$ ergibt sich wegen $\xi \in \left[-\frac{1}{10}, 0\right]$ zunächst

$$\begin{aligned} |f'''(\xi)| &= \left|2\, e^\xi (\cos\xi - \sin\xi)\right| = 2\, e^\xi \cdot |\cos\xi - \sin\xi| \le \\ &\le 2\, e^\xi \cdot \Big(\underbrace{|\cos\xi|}_{\le 1} + \underbrace{|\sin\xi|}_{\le 1}\Big) \le 4 \cdot \underbrace{e^\xi}_{\le 1,\text{ da } \xi \le 0} \le 4 \end{aligned}$$

und damit wegen $|x| \le \frac{1}{10}$ dann

$$\begin{aligned} |T_2(x) - f(x)| &= |-R_3(x)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}\, x^3\right| = \\ &= \frac{|f'''(\xi)|}{6} \cdot |x|^3 \le \frac{4}{6} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 < \frac{1}{10^3} = 10^{-3}. \end{aligned}$$

4.13 a) Die gegebene Funktion

$$f : [-1, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}},$$

ist als Verkettung der auf $\mathbb{R}^+$ beliebig oft differenzierbaren Quadratwurzel als äußerer Funktion und der linearen Funktion $x \mapsto 1 + x$ als innerer Funktion auf $]-1; \infty[$ beliebig of differenzierbar, und für alle $x \in\,]-1; \infty[$ gilt

- $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}}$,
- $f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}}$ und
- $f'''(x) = -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (1+x)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8} \cdot (1+x)^{-\frac{5}{2}}$.

Wegen

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad f''(0) = -\frac{1}{4}$$

ergibt sich für das zweite Taylorpolynom T_2 von f zum Entwicklungspunkt $a = 0$

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2}\, x^2 = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

für alle $x \in\,]-1;\infty[$. Nach der Taylorformel gilt nun $f(x) = T_2(x) + R_3(x)$ für alle $x \in\,]-1;\infty[$, wobei es gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes ein ξ_x zwischen $a = 0$ und $x \in\,]-1;\infty[$ mit $R_3(x) = \frac{f'''(\xi_x)}{3!}\, x^3$ gibt. Für $x \neq 0$ erhält man damit

$$\frac{1}{x^2}\left(f(x) - T_2(x)\right) = \frac{1}{x^2} \cdot R_3(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{f'''(\xi_x)}{3!}\, x^3\right) = \frac{x}{6} \cdot f'''(\xi_x);$$

beim Grenzübergang $x \to 0$ ergibt sich auch $\xi_x \to 0$, woraus wegen der Stetigkeit der dritten Ableitung f''' dann $f'''(\xi_x) \to f'''(0) = \frac{3}{8}$ folgt. Insgesamt erhält man also

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - T_2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\underbrace{\frac{x}{6}}_{\to 0} \cdot \underbrace{f'''(\xi_x)}_{\to \frac{3}{8}}\right) = 0 \cdot \frac{3}{8} = 0.$$

Wir können also $p_2 = T_2$ wählen.

b) Für jedes $x \in [0,\infty[$ gilt nach der Taylorformel $f(x) = T_2(x) + R_3(x)$, wobei es gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes ein $\xi \in [0;x]$ mit $R_3(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}\, x^3$ gibt. Folglich erhält man

$$\begin{aligned} |f(x) - p_2(x)| &= |f(x) - T_2(x)| = |R_3(x)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}\, x^3\right| = \\ &= \frac{|f'''(\xi)|}{6}\, \left|x^3\right| \underset{x\geq 0}{=} \frac{1}{6} \cdot \underbrace{\left(\frac{3}{8} \cdot \underbrace{(1+\xi)}_{\geq 1}{}^{-\frac{5}{2}}\right)}_{\leq 1} \cdot x^3 \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot x^3 = \frac{1}{16}\, x^3. \end{aligned}$$

4.14 a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin\left(x^2\right),$$

ist als Hintereinanderausführung von Sinus und der Quadratfunktion beliebig oft differenzierbar, und unter Verwendung der Kettenregel sowie (für die höheren Ableitungen) der Produktregel ergibt sich

$$f'(x) = \cos\left(x^2\right) \cdot (2\,x) = 2\,x \cdot \cos\left(x^2\right)$$

und

$$f''(x) = 2 \cdot \cos\left(x^2\right) + 2\,x \cdot \left(-\sin\left(x^2\right) \cdot (2\,x)\right) = 2\,\cos\left(x^2\right) - 4\,x^2 \cdot \sin\left(x^2\right)$$

sowie (für die bei b) benötigte Restglieddarstellung)

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 2\left(-\sin\left(x^2\right) \cdot (2\,x)\right) - \left(8\,x \cdot \sin\left(x^2\right) + 4\,x^2 \cdot \left(\cos\left(x^2\right) \cdot (2\,x)\right)\right) \\ &= -4\,x \cdot \sin\left(x^2\right) - \left(8\,x \cdot \sin\left(x^2\right) + 8\,x^3 \cdot \cos\left(x^2\right)\right) \\ &= -12\,x \cdot \sin\left(x^2\right) - 8\,x^3 \cdot \cos\left(x^2\right) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f''(0) = 2,$$

und man erhält für das zweite Taylorpolynom T_2 von f im Entwicklungspunkt $a = 0$ dann

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 = x^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Nach der Taylorformel gilt $f(x) = T_2(x) + R_3(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein ξ zwischen dem Entwicklungspunkt $a = 0$ und x mit $R_3(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}\,x^3$ gibt; es ist damit

$$f(x) - T_2(x) = R_3(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}\,x^3.$$

Speziell für $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ gilt auch $\xi \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, und wir erhalten in

$$\begin{aligned}
|f(x) - T_2(x)| &= |R_3(x)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}\,x^3\right| = \frac{|f'''(\xi)|}{6} \cdot \left|x^3\right| \\
&= \frac{1}{6} \cdot \left|-12\,\xi \cdot \sin\left(\xi^2\right) - 8\,\xi^3 \cdot \cos\left(\xi^2\right)\right| \cdot |x|^3 \\
&\le \frac{1}{6} \cdot \left(12 \cdot \underbrace{|\xi|}_{\le \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left|\sin\left(\xi^2\right)\right|}_{\le 1} + 8 \cdot \underbrace{|\xi|^3}_{\le \left(\frac{1}{2}\right)^3} \cdot \underbrace{\left|\cos\left(\xi^2\right)\right|}_{\le 1}\right) \cdot \underbrace{|x|^3}_{\le \left(\frac{1}{2}\right)^3} \\
&\le \frac{1}{6} \cdot \left(12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + 8 \cdot \frac{1}{8} \cdot 1\right) \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{6} \cdot \underbrace{7 \cdot \frac{1}{8}}_{\le 1} \le \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

die Behauptung.

4.15 a) Für die gegebene (als Quadrat des Cosinus beliebig oft stetig differenzierbare) Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos^2 x,$$

zeigen wir für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gestalt ihrer $(2n)$–ten Ableitung

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n 2^{2n-1}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)$$

mit vollständiger Induktion:

- für „$n = 1$“ ergibt sich

$$f'(x) = 2\,\cos x \cdot (-\sin x) = -2\,\cos x\,\sin x$$

und

$$f''(x) = -2\,(\cos x \cdot \cos x + (-\sin x) \cdot \sin x) = -2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right),$$

also

$$f^{(2)}(x) = (-1)^1\,2^{2\cdot 1-1}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right);$$

- für „$n \to n+1$" ergibt sich aus der Induktionsannahme

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n\, 2^{2n-1} \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)$$

zunächst

$$\begin{aligned} f^{(2n+1)}(x) &= (-1)^n\, 2^{2n-1} \big(2\, \cos x \cdot (-\sin x) - 2\, \sin x \cdot \cos x\big) = \\ &= (-1)^n\, 2^{2n-1} \big(-4\, \cos x \cdot \sin x\big) = (-1)^{n+1}\, 2^{2n+1}\, \cos x \cdot \sin x \end{aligned}$$

und dann die Induktionsbehauptung

$$\begin{aligned} f^{(2n+2)}(x) &= (-1)^{n+1}\, 2^{2n+1} \big((-\sin x) \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x\big) = \\ &= (-1)^{n+1}\, 2^{2(n+1)-1} \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right). \end{aligned}$$

Damit haben wir auch die Gestalt der $(2n+1)$–ten Ableitung

$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1}\, 2^{2n+1}\, \cos x \cdot \sin x$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ermittelt.

b) Für Taylorpolynom T_{2N} von f an der Stelle $x_0 = 0$ gilt

$$T_{2N}(x) = \sum_{k=0}^{2N} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\, (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{2N} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei sich gemäß a) wegen $\cos 0 = 1$ und $\sin 0 = 0$

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} f(0) = 1, & \text{falls } k = 0, \\ f^{(2n+1)}(0) = 0, & \text{falls } k = 2n+1 \text{ ungerade}, \\ f^{(2n)}(0) = (-1)^n\, 2^{2n-1}, & \text{falls } k = 2n \text{ gerade}, \end{cases}$$

ergibt; insgesamt erhält man also

$$T_{2N}(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{N} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}\, x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n\, 2^{2n-1}}{(2n)!}\, x^{2n}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt nach der Taylorformel $f(x) = T_{2N}(x) + R_{2N+1}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, speziell für $x = \frac{1}{2}$ also

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = T_{2N}\left(\frac{1}{2}\right) + R_{2N+1}\left(\frac{1}{2}\right),$$

wobei es gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restglieds $R_{2N+1}\left(\frac{1}{2}\right)$ ein ξ zwischen $x_0 = 0$ und $x = \frac{1}{2}$ mit

$$R_{2N+1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f^{(2N+1)}(\xi)}{(2N+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1}$$

gibt; unter Verwendung der in a) ermittelten Gestalt von $f^{(2N+1)}$ erhält man insgesamt

$$\begin{aligned}
\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - T_{2N}\left(\frac{1}{2}\right) \right| &= \left| R_{2N+1}\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \\
&= \left| \frac{f^{(2N+1)}(\xi)}{(2N+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1} \right| = \left| \frac{(-1)^{N+1}\, 2^{2N+1}\, \cos\xi \cdot \sin\xi}{(2N+1)!} \cdot \frac{1}{2^{2N+1}} \right| = \\
&= \frac{1}{(2N+1)!} \cdot \underbrace{|\cos\xi|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|\sin\xi|}_{\leq 1} \leq \frac{1}{(2N+1)!}.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich etwa für $N = 3$ dann

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - T_{2N}\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{(2N+1)!} = \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} \leq 2 \cdot 10^{-4}.$$

4.16 a) Die gegebene Funktion

$$f : \,]-1, \infty[\, \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1+x},$$

ist (als gebrochenrationale Funktion) beliebig oft stetig differenzierbar, und für alle $x > -1$ gilt

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1+x) - x \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2}$$

und damit

$$\begin{aligned}
f''(x) &= (-2) \cdot (1+x)^{-3}, \\
f'''(x) &= (-2)(-3) \cdot (1+x)^{-4}, \\
f^{(4)}(x) &= (-2)(-3)(-4) \cdot (1+x)^{-5},
\end{aligned}$$

wodurch die Vermutung

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot n! \cdot (1+x)^{-(n+1)} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

nahegelegt wird; diese bestätigen wir mittels vollständiger Induktion:

- Für den Induktionsanfang „$n = 1$“ ergibt sich

$$f'(x) = (1+x)^{-2} = (-1)^{1-1} \cdot 1! \cdot (1+x)^{-(1+1)}.$$

- Für den Induktionsschritt „$n \to n+1$“ erhält man aus der Induktionsvoraussetzung

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot n! \cdot (1+x)^{-(n+1)}$$

wegen

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) \\
&= (-1)^{n-1} \cdot n! \cdot \left(-(n+1) \cdot (1+x)^{-(n+1)-1}\right) \\
&= (-1)^{n-1} \cdot n! \cdot \left((-1) \cdot (n+1) \cdot (1+x)^{-((n+1)+1)}\right) \\
&= (-1)^{(n+1)-1} \cdot (n+1)! \cdot (1+x)^{-((n+1)+1)}
\end{aligned}$$

die Induktionsbehauptung.

b) Für den Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ ergibt sich

$$f(2) = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$$

sowie mit den in a) ermittelten Ableitungen

$$f'(2) = (1+2)^{-2} = \frac{1}{9} \qquad \text{und} \qquad f''(2) = (-2) \cdot (1+2)^{-3} = -\frac{2}{27};$$

für das zweite Taylorpolynom von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ erhält man damit

$$\begin{aligned} T_2(x;2) &= f(2) + f'(2) \cdot (x-2) + \frac{f''(2)}{2} \cdot (x-2)^2 \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{9}\,(x-2) - \frac{1}{27}\,(x-2)^2 \end{aligned}$$

für alle $x > -1$.

c) Nach der Taylorformel gilt $f(x) = T_2(x;2) + R_3(x;2)$ für alle $x > -1$, wobei es zu jedem $x > -1$ gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes $R_3(x;2)$ ein ξ zwischen dem Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ und x mit

$$R_3(x;2) = \frac{f'''(\xi)}{3!}\,(x-2)^3$$

gibt; für alle $x \in [1,3]$ gilt $|x-2| \leq 1$ und damit auch $|\xi - 2| \leq 1$, insbesondere also $\xi \geq 1$, und wir erhalten

$$|f'''(\xi)| = \left|6 \cdot (1+\xi)^{-4}\right| = 6 \cdot \underbrace{(1+\xi)}_{\geq 2}{}^{-4} \leq 6 \cdot 2^{-4} = \frac{6}{16}$$

und damit

$$\begin{aligned} |f(x) - T_2(x;2)| = |R_3(x;2)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}\,(x-2)^3\right| &= \\ = \frac{1}{6} \cdot \underbrace{|f'''(\xi)|}_{\leq \frac{6}{16}} \cdot \underbrace{|x-2|}_{\leq 1}{}^3 \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{16} \cdot 1^3 = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

4.17 a) Für $x \in [0,\pi]$ betrachten wir das dritte Taylorpolynom T_3 des Sinus zum Entwicklungspunkt $a = 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} T_3(x) &= \sin 0 + \sin' 0 \cdot x + \frac{\sin'' 0}{2} \cdot x^2 + \frac{\sin''' 0}{6} \cdot x^3 \\ &= \sin 0 + \cos 0 \cdot x + \frac{-\sin 0}{2} \cdot x^2 + \frac{-\cos 0}{6} \cdot x^3 \underset{\cos 0 = 1}{\overset{\sin 0 = 0}{=}} x - \frac{x^3}{6}. \end{aligned}$$

Nach der Taylorformel gilt nun $\sin x = T_3(x) + R_4(x)$, wobei es gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes ein ξ zwischen $a = 0$ und x mit

$$R_4(x) = \frac{\sin^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot x^4 = \frac{\sin \xi}{4!} \cdot x^4$$

gibt; wegen $x \in [0,\pi]$ ist auch $\xi \in [0,\pi]$, und wegen $\sin\xi \geq 0$ ergibt sich

$$\sin x = T_3(x) + R_4(x) = T_3(x) + \underbrace{\frac{\sin\xi}{4!} \cdot x^4}_{\geq 0} \geq T_3(x) = x - \frac{x^3}{6}.$$

b) Die Polynomfunktion

$$p : [\pi, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad p(x) = x - \frac{x^3}{6},$$

ist differenzierbar, und für alle $x \geq \pi$ gilt

$$p'(x) = 1 - \frac{3\,x^2}{6} = 1 - \frac{x^2}{2} \underset{x \geq \pi \geq 3}{\leq} 1 - \frac{3^2}{2} = -\frac{7}{2} \leq 0;$$

damit ist p auf dem Intervall $[\pi, +\infty[$ monoton fallend, und für alle $x > \pi$ ergibt sich

$$p(x) \leq p(\pi) = \pi - \frac{\pi^3}{6} \underset{\pi \geq 3}{\leq} \pi - \frac{3^3}{6} \underset{\pi \leq \frac{7}{2}}{\leq} \frac{7}{2} - \frac{9}{2} = -1,$$

insbesondere also

$$\sin x \geq -1 \geq p(x) = x - \frac{x^3}{6}.$$

4.18 Zum Nachweis der Beziehung

$$e^{-x^2} - 0{,}00015 \leq 1 - x^2 \leq e^{-x^2} \qquad \text{für alle} \qquad |x| \leq 0{,}1$$

bieten sich folgende Möglichkeiten an:

- Die Exponentialreihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$, so daß sich

$$e^{-x^2} \underset{z=-x^2}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{n!}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt; es handelt sich also um die alternierende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{x^{2n}}{n!} \geq 0 \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Für $|x| \leq 0{,}1$ ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ wegen

$$a_n = \frac{\overbrace{x^{2n}}^{\to 0}}{\underbrace{n!}_{\to \infty}} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

eine Nullfolge und wegen

$$a_{n+1} = \frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)!} = \frac{x^{2n}}{n!} \cdot \frac{x^2}{n+1} = a_n \cdot \frac{\overbrace{x^2}^{\leq 1}}{\underbrace{n+1}_{\geq 1}} \underset{a_n \geq 0}{\leq} a_n \cdot 1 = a_n$$

monoton fallend, so daß sich in diesen Fällen die Konvergenz der alternierenden Reihe auch über das Leibnizkriterium nachweisen ließe. Für die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ ergibt sich damit, daß

- die Teilfolge $(s_{2m})_{m\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend sowie
- die Teilfolge $(s_{2m+1})_{m\in\mathbb{N}_0}$ monoton wachsend ist;

damit gilt aber für die Summe s der Reihe

$$s_1 \leq s \leq s_2, \qquad \text{also} \qquad 1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1 - x^2 + \frac{x^4}{2},$$

woraus sich

$$e^{-x^2} - \frac{x^4}{2} \leq 1 - x^2 \leq e^{-x^2},$$

wegen $|x| \leq 0{,}1$ und damit $x^4 \leq 0{,}1^4 = 0{,}0001$, mithin $\frac{x^4}{2} \leq 0{,}00015$, schon

$$e^{-x^2} - 0{,}00015 \leq 1 - x^2 \leq e^{-x^2}$$

ergibt.

- Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist beliebig oft differenzierbar mit $\exp^{(n)} = \exp$ und damit $\exp^{(n)}(0) = \exp(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; für das erste Taylorpolynom T_1 von exp mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$ ergibt sich also

$$T_1(z) = \exp(0) + \exp'(0) \cdot z = 1 + z \qquad \text{für alle} \qquad z \in \mathbb{R}.$$

Nach der Taylorformel gilt $\exp(z) = T_1(z) + R_2(z)$ für alle $z \in \mathbb{R}$, wobei es zu jedem $z \in \mathbb{R}$ gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes ein ζ zwischen dem Entwicklungspunkt $a = 0$ und z mit

$$R_2(z) = \frac{\exp''(\zeta)}{2!} \cdot z^2 = \underbrace{\frac{e^\zeta}{2}}_{>0} \cdot \underbrace{z^2}_{\geq 0} \geq 0$$

gibt. Für $|x| \leq 0{,}1$ betrachten wir nun $z = -x^2$; wegen $0 \leq x^2 \leq 0{,}01$ ist $-0{,}01 \leq z \leq 0$, damit auch $\zeta \leq 0$ sowie $0 \leq z^2 \leq 0{,}0001$, und es gilt

$$R_2(z) = \frac{\exp''(\zeta)}{2!} \cdot z^2 = \underbrace{\frac{e^\zeta}{2}}_{\leq \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{z^2}_{\leq 0{,}0001} \leq 0{,}00005 \leq 0{,}00015.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$e^{-x^2} = \exp(z) = T_1(z) + R_2(z) = 1 - x^2 + R_2(z)$$

mit
$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1 - x^2 + 0{,}00015$$
und damit
$$e^{-x^2} - 0{,}00015 \leq 1 - x^2 \leq e^{-x^2}.$$

4.19 a) Die zu betrachtende Funktion
$$f :]{-1}; \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = x\,e^x - e^{-x},$$
ist als Differenz und Produkt einer linearen Funktion und der Exponentialfunktion differenzierbar, und für alle $x > -1$ gilt
$$f'(x) = (1 \cdot e^x + x \cdot e^x) - e^{-x} \cdot (-1) = \underbrace{(1+x)}_{>0} \cdot \underbrace{e^x}_{>0} + \underbrace{e^{-x}}_{>0} > 0;$$
damit ist f streng monoton steigend, insbesondere umkehrbar, und die Umkehrfunktion $g = f^{-1} : W_f \to \mathbb{R}$ ist wegen $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in]{-1}; \infty[$ differenzierbar.

b) Für $a = 0$ ist $a \in]{-1}; \infty[$ mit
$$b = f(a) = 0 \cdot e^0 - e^{-0} = -1, \qquad \text{also} \qquad g(-1) = f^{-1}(b) = a = 0,$$
und für die Ableitung der Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ ergibt sich
$$g'(-1) = \left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{(1+0) \cdot e^0 + e^{-0}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$
Für das Taylorpolynom ersten Grades T_1 von g um den Entwicklungspunkt $b = -1$ gilt demnach
$$\begin{aligned} T_1(x) &= g(b) + g'(b) \cdot (x - b) = \\ &= g(-1) + g'(-1) \cdot (x - (-1)) = \\ &= 0 + \frac{1}{2} \cdot (x+1) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4.20 Zu betrachten ist eine differenzierbare (mithin stetige) Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(0) = -3 \qquad \text{und} \qquad 1 < f'(x) < 2 \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}.$$
Insbesondere ist damit die Funktion f für jedes $b > 0$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, b]$ stetig und auf dem offenen Intervall $]0, b[$ differenzierbar, erfüllt also die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung; folglich existiert ein $\xi_b \in]0, b[$ mit
$$\frac{f(b) - f(0)}{b - 0} = f'(\xi_b) \qquad \text{bzw.} \qquad f(b) - f(0) = f'(\xi_b) \cdot (b - 0)$$
und damit
$$f(b) = f(0) + f'(\xi_b) \cdot b \qquad \text{bzw.} \qquad f(b) = -3 + f'(\xi_b) \cdot b.$$

Demnach ergibt sich für $b = 1$ zum einen

$$f(1) = -3 + f'(\xi_1) \cdot 1 = -3 + \underbrace{f'(\xi_1)}_{<2} < -3 + 2 = -1 < 0$$

und für $b = 3$ zum anderen

$$f(3) = -3 + f'(\xi_3) \cdot 3 = -3 + 3\,\underbrace{f'(\xi_3)}_{>1} > -3 + 3 \cdot 1 = 0;$$

damit besitzt die auf dem abgeschlossenen Intervall $[1, 3]$ insbesondere stetige Funktion f wegen $f(1) < 0$ und $f(3) > 0$ nach dem Nullstellensatz (mindestens) eine Nullstelle $\xi \in \,]1, 3[\, \subseteq \,]1, 3]$.

4.21 a) Für die mit einem beliebigen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ durch die Rekursionsvorschrift $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definierte Folge ist

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2^n}\,|x_1 - x_0|$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit vollständiger Induktion zu zeigen; dabei ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $|f'(\xi)| \leq \frac{1}{2}$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$.

- Für den Induktionsanfang „$n = 0$“ gilt sogar

$$|x_1 - x_0| = 1 \cdot |x_1 - x_0| = \frac{1}{2^0}\,|x_1 - x_0|\,.$$

- Im Induktionsschritt „$n \to n + 1$“ gehen wir von der Induktionsvoraussetzung

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2^n}\,|x_1 - x_0|$$

aus. Im Falle $x_{n+1} = x_n$ gilt $f(x_{n+1}) = f(x_n)$ und damit

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = |f(x_{n+1}) - f(x_n)| = 0 \leq \frac{1}{2^{n+1}}\,|x_1 - x_0|\,;$$

ansonsten gibt es für die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\xi \in \mathbb{R}$ zwischen x_n und x_{n+1} mit

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) = f'(\xi) \cdot (x_{n+1} - x_n)\,,$$

und damit ergibt sich in

$$\begin{aligned} |x_{n+2} - x_{n+1}| &= |f(x_{n+1}) - f(x_n)| = |f'(\xi) \cdot (x_{n+1} - x_n)| = \\ &= \underbrace{|f'(\xi)|}_{\leq \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{|x_{n+1} - x_n|}_{\leq \frac{1}{2^n}|x_1 - x_0|} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n}\,|x_1 - x_0| = \frac{1}{2^{n+1}}\,|x_1 - x_0| \end{aligned}$$

die Induktionsbehauptung.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Ungleichung

$$|x_n - x_0| \le 2\,|x_1 - x_0|$$

zu zeigen; für $n = 0$ und $n = 1$ ergibt sich

$$|x_0 - x_0| = 0 \le 2\,|x_1 - x_0| \qquad \text{bzw.} \qquad |x_1 - x_0| \le 2\,|x_1 - x_0|\,,$$

und für $n \ge 2$ gilt

$$\begin{aligned}
|x_n - x_0| &= |(x_n - x_{n-1}) + \ldots + (x_1 - x_0)| \\
&\le \underbrace{|x_n - x_{n-1}|}_{\le \frac{1}{2^{n-1}}|x_1 - x_0|} + \ldots + \underbrace{|x_1 - x_0|}_{\le \frac{1}{2^0}|x_1 - x_0|} \\
&\underset{\text{a)}}{\le} \frac{1}{2^{n-1}}\,|x_1 - x_0| + \ldots + \frac{1}{2^0}\,|x_1 - x_0| \\
&= \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{0}\right) \cdot |x_1 - x_0| \\
&\underset{(*)}{=} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \cdot |x_1 - x_0| \\
&= 2 \cdot \underbrace{\left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right)}_{\le 1} \cdot |x_1 - x_0| \\
&\le 2\,|x_1 - x_0|\,;
\end{aligned}$$

dabei geht in $(*)$ die geometrische Summenformel ein.

4.22 Für eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ und $f(2) = 0$ sowie $f(x) > 0$ für alle $x \in \,]0;2[$ ist die Funktion

$$g : \,]0;2[\, \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{f(x)},$$

zu betrachten; damit ist g als Quotient differenzierbarer Funktionen selbst differenzierbar, und die Ableitungsfunktion

$$g' : \,]0;2[\, \to \mathbb{R}, \quad g(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2},$$

ist wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von f' ebenfalls stetig.

a) Die Funktion

$$h : \,]0;2[\, \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - g(1)}{x-1}, & \text{für } x \ne 1, \\ g'(1), & \text{für } x = 1, \end{cases}$$

ist zunächst in allen Punkten $x \ne 1$ als Quotient von Differenzen stetiger Funktionen stetig; dabei geht bei der Zählerfunktion die Stetigkeit von g ein, die sich sofort aus der vorab bemerkten Differenzierbarkeit von g ergibt.

Zum Nachweis der Stetigkeit von h im Punkt 1 ist der Grenzwert

$$h(x) = \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \qquad \text{für} \qquad x \to 1$$

zu betrachten; da g im Punkt 1 stetig ist, handelt es sich hierbei um einen Grenzwert vom Typ „$\frac{0}{0}$“, und mit Hilfe der Regel von de l'Hospital erhält man

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{g'(x)}{1} \underset{(*)}{=} g'(1),$$

wobei in $(*)$ die vorab bemerkte Stetigkeit von g' im Punkt 1 eingeht.

Damit ist h insgesamt eine stetige Funktion.

b) Wir zeigen zunächst, daß die in a) betrachtete Hilfsfunktion h jeden Wert $q \in \mathbb{R}$ annimmt, und folgern dann daraus, daß auch die Ableitung g' von g diese Eigenschaft besitzt; sei dazu $q \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben.

Wegen der Stetigkeit der Funktion f gilt

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = f(0) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 2-} f(x) = f(2) = 0,$$

woraus sich wegen $f(x) > 0$ für alle $x \in]0;2[$ dann

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{f(x)} = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 2-} g(x) = \lim_{x\to 2-} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

ergibt; damit ist aber zum einen

$$\lim_{x\to 0+} h(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\overbrace{g(x)-g(1)}^{\to+\infty}}{\underbrace{x-1}_{\to-1}} = -\infty$$

und zum anderen

$$\lim_{x\to 2-} h(x) = \lim_{x\to 2-} \frac{\overbrace{g(x)-g(1)}^{\to+\infty}}{\underbrace{x-1}_{\to+1}} = +\infty.$$

Wegen $\lim\limits_{x\to 0+} h(x) = -\infty$ gibt es ein $a \in]0;1[$ mit $h(a) < q$, und wegen $\lim\limits_{x\to 2-} h(x) = +\infty$ gibt es ein $b \in]1;2[$ mit $h(b) > q$; damit existiert für die nach a) stetige Funktion h nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a;b] \subseteq]0;2[$ mit $h(\xi) = q$, und wir treffen (hinsichtlich der Lage von ξ) die folgende Fallunterscheidung:

- Im Falle $\xi \in]0;1[$ ist

  $$q = h(\xi) = \frac{g(\xi)-g(1)}{\xi - 1},$$

  und der Mittelwertsatz der Differentialrechnung für die differenzierbare Funktion g auf dem Intervall $[\xi;1]$ liefert ein $x_0 \in]\xi;1[\subseteq]0;2[$ mit

  $$g'(x_0) = \frac{g(\xi)-g(1)}{\xi-1} = q.$$

- Im Falle $\xi = 1$ ist
$$q = h(1) = g'(1),$$
und wir können $x_0 = 1$ wählen.
- Im Falle $\xi \in \,]1;2[$ ist
$$q = h(\xi) = \frac{g(\xi) - g(1)}{\xi - 1},$$
und der Mittelwertsatz der Differentialrechnung für die differenzierbare Funktion g auf dem Intervall $[1;\xi]$ liefert ein $x_0 \in \,]1;\xi[\, \subseteq \,]0;2[$ mit
$$g'(x_0) = \frac{g(\xi) - g(1)}{\xi - 1} = q.$$

Damit gibt es stets ein $x_0 \in \,]0;2[$ mit $g'(x_0) = q$.

4.23 Auf dem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$ mit $a < b$ ist die differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit $f(a) = 0$ sowie die stetige Funktion $w : I \to \mathbb{R}$ mit $0 \leq f'(x) \leq w(x)$ für alle $x \in I$ zu betrachten.

a) Für $x = a$ ist $f(a) = 0$, und für $x \in \,]a, b]$ existiert für die Einschränkung $f|_{[a,x]}$ der als differenzierbar vorausgesetzten Funktion f nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\xi \in [a, x] \subseteq I$ mit
$$0 \leq f'(\xi) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{f(a)=0}{=} \frac{f(x)}{x - a},$$
woraus wegen $x - a > 0$ dann $f(x) \geq 0$ folgt.

b) Da $f : I \to \mathbb{R}$ als differenzierbare Funktion insbesondere stetig ist, ist
$$g : I \to \mathbb{R}, \quad g(x) = w(x) \cdot f(x),$$
als Produkt stetiger Funktionen selbst stetig; damit ist ihre Integralfunktion
$$G : I \to \mathbb{R}, \quad G(x) = \int_a^x g(t)\,dt = \int_a^x w(t)f(t)\,dt,$$
nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung differenzierbar mit
$$G'(x) = g(x) = w(x) \cdot f(x)$$
für alle $x \in I$. Desweiteren ist mit der Funktion f auch ihr Quadrat
$$q : I \to \mathbb{R}, \quad q(x) = f^2(x) = (f(x))^2,$$
differenzierbar, und nach der Kettenregel gilt
$$q'(x) = 2f(x) \cdot f'(x)$$
für alle $x \in I$. Schließlich ist die gegebene Funktion
$$H : I \to \mathbb{R}, \quad H(x) = 2 \cdot \int_a^x w(t)f(t)\,dt - f^2(x),$$

als Linearkombination der beiden differenzierbaren Funktionen G und q selbst differenzierbar, und für alle $x \in I$ gilt

$$H'(x) = 2 \cdot w(x) \cdot f(x) - 2f(x) \cdot f'(x) = 2 \cdot \underbrace{(w(x) - f'(x))}_{\geq 0, \text{ da } f'(x) \leq w(x)} \cdot \underbrace{f(x)}_{\geq 0 \text{ nach a)}} \geq 0;$$

folglich ist die auf dem Intervall I definierte Funktion H monoton steigend.

4.24 Wir haben zu zeigen, daß die Funktion

$$h : [a; b] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = (f(x))^2 - (g(x))^2,$$

auf $]a; b[$ konstant ist und dort stets den Wert 1 annimmt. Da nach Voraussetzung f und g auf $[a; b]$ stetig und auf $]a; b[$ differenzierbar sind, ist h als Differenz der Quadrate von f und g ebenfalls auf $[a; b]$ stetig und auf $]a; b[$ differenzierbar, und für alle $x \in \,]a; b[$ gilt unter Verwendung der Kettenregel

$$h'(x) = 2\, f(x)\, \underbrace{f'(x)}_{=g(x)} - 2\, g(x)\, \underbrace{g'(x)}_{=f(x)} = 2\, f(x)\, g(x) - 2\, g(x)\, f(x) = 0.$$

Folglich ist h auf $]a; b[$ konstant, es gibt also ein $c \in \mathbb{R}$ mit $h(x) = c$ für alle $x \in \,]a; b[$. Wegen der Stetigkeit von h im Punkt a ergibt sich

$$c = \lim_{x \to a+} h(x) = h(a) = (\underbrace{f(a)}_{=1})^2 - (\underbrace{g(a)}_{=0})^2 = 1^2 - 0^2 = 1.$$

Damit gilt $(f(x))^2 - (g(x))^2 = h(x) = 1$ für alle $x \in \,]a; b[$.

4.25 Die Funktion g ist als Quotient differenzierbarer Funktionen selbst differenzierbar, und mit Hilfe der Quotientenregel erhält man

$$g'(x) = \frac{(x-a) \cdot f'(x) - (f(x) - f(a)) \cdot 1}{(x-a)^2} = \frac{1}{x-a} \cdot \left(f'(x) - \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right)$$

für alle $x \in \,]a; b[$; wir zeigen im folgenden $g'(x) > 0$ für alle $x \in \,]a; b[$. Dazu wenden wir den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für die Funktion f auf dem Intervall $[a; x]$ an und erhalten ein $\xi \in \,]a; x[$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(a)}{x-a}.$$

Aus $a < \xi < x$ folgt zum einen $x - a > 0$ und zum anderen auch $f'(\xi) < f'(x)$, also $f'(x) - f'(\xi) > 0$; dabei geht ein, daß f' nach Voraussetzung streng monoton wachsend ist. Insgesamt ergibt sich also

$$g'(x) = \frac{1}{x-a} \cdot \left(f'(x) - \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) = \frac{1}{\underbrace{x-a}_{>0}} \cdot \underbrace{(f'(x) - f'(\xi))}_{>0} > 0.$$

Damit ist aber g streng monoton wachsend.

4.26 Wegen

$$0 > f'(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\, f(h)$$

gibt es ein $h \in \,]0;1[$ mit $\frac{1}{h}\, f(h) < 0$, also $f(h) < 0$. Nun läßt sich auf zweierlei Art argumentieren:

- Da f als differenzierbare Funktion insbesondere stetig ist, gibt es wegen $f(h) < 0 < f(1)$ nach dem Nullstellensatz eine Zwischenstelle $\xi \in \,]h;1[$ mit $f(\xi) = 0$; der Satz von Rolle liefert dann zwischen den Nullstellen 0 und ξ der Funktion f eine Nullstelle $x_0 \in \,]0;\xi[$ ihrer Ableitung f', also $f'(x_0) = 0$.
- Die Einschränkung $f|_{[0;1]}$ der differenzierbaren Funktion f auf das abgeschlossene Intervall $[0;1]$ ist insbesondere stetig, und nach dem Satz von Weierstraß gibt es ein globales Minimum x_0 von $f|_{[0;1]}$. Wegen $f(h) < 0$ ist $f(x_0) \leq f(h) < 0$ und damit $x_0 \in \,]0;1[$. Folglich gilt für das lokale Extremum x_0 von $f|_{[0;1]}$ im Innern des Definitionsintervalls $f'(x_0) = 0$.

4.27 Da die beiden Funktionen f, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar sind, ist auch ihre Differenz

$$h : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = g(x) - f(x),$$

stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar, und wegen $f(a) < g(a)$ sowie $f'(x) \leq g'(x)$ für alle $x \in \,]a,b[$ gilt

$$h(a) = g(a) - f(a) > 0$$

sowie

$$h'(x) = g'(x) - f'(x) \geq 0$$

für alle $x \in \,]a,b[$. Da $f(a) < g(a)$ bereits nach Voraussetzung gilt, sei $x \in \,]a,b]$; wir wenden den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für die Funktion h auf dem Intervall $[a,x]$ an und erhalten ein $\xi \in \,]a,x[$ mit

$$h(x) - h(a) = \underbrace{h'(\xi)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x-a)}_{>0} \geq 0, \qquad \text{also} \qquad h(x) \geq h(a) > 0$$

und damit $f(x) < g(x)$.

4.28 Für das erste Taylorpolynom T_1 der gegebenen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 0$ im Entwicklungspunkt $a = 0$ gilt

$$T_1(x) = f(0) + f'(0) \cdot x = 0 + 0 \cdot x = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, so daß sich nach der Taylorformel

$$f(x) = T_1(x) + R_2(x) = R_2(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt.

Gemäß der Voraussetzung ist f eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, so daß ihre zweite Ableitung f'' noch stetig und damit nach dem Satz von Weierstraß auf dem abgeschlossenen Intervall $[-1,1]$ beschränkt ist; folglich gibt es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit $|f''(x)| \leq C$ für alle $x \in [-1,1]$.

Für jedes $x \in [-1, 1]$ gibt es nun gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes ein ξ zwischen $a = 0$ und x mit $R_2(x) = \frac{f''(\xi)}{2!} x^2$; insbesondere gilt also $\xi \in [-1, 1]$ und damit $|f''(\xi)| \leq C$, und wir erhalten

$$|f(x)| = |R_2(x)| = \left| \frac{f''(\xi)}{2!} x^2 \right| = \frac{|f''(\xi)|}{2} \cdot \left| x^2 \right| \leq \frac{C}{2} \cdot x^2 \leq C\, x^2.$$