Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Differential– und Integralrechnung 3 — Lösungsvorschlag —

3.1 In Abhängigkeit vom Parameter $m \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f_m :]-\infty, 2\pi[\to \mathbb{R}, \quad f_m(x) = \begin{cases} mx, & \text{für } x \leq 0, \\ \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}, & \text{für } x > 0, \end{cases}$$

zu betrachten.

a) Für die Stetigkeit der Funktion f_m an der Stelle $x_0 = 0$ ist

$$\lim_{x \to 0-} f_m(x) = f_m(0) = \lim_{x \to 0+} f_m(x)$$

zu zeigen; dabei ist $f_m(0) = m \cdot 0 = 0$ sowie der linksseitige Grenzwert

$$\lim_{x \to 0-} f_m(x) \underset{x<0}{=} \lim_{x \to 0-} m\,x = m \cdot 0 = 0,$$

und für den rechtsseitigen Grenzwert ergibt sich

$$\lim_{x \to 0+} f_m(x) \underset{x>0}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{x - \sin x}{1 - \cos x} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x \to 0+} \frac{1 - \cos x}{\sin x} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{\cos x} \underset{(*)}{=} \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0,$$

wobei sowohl bei $(*)$ als auch für „$\frac{0}{0}$“ bei der Anwendung der Regel von de l'Hospital die Stetigkeit von Sinus und Cosinus an der Stelle $x_0 = 0$ eingeht. Folglich ist die Funktion f_m für jedes $m \in \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig.

b) Für jedes $m \leq 0$ ist

$$f_m\left(]-\infty, 2\pi[\right) = [0, \infty[$$

zu zeigen. Für „$\subseteq$“ sei $x \in]-\infty, 2\pi[$, und es gilt:

- im Falle $x \leq 0$ ist

$$f_m(x) = \underbrace{m}_{\leq 0} \cdot \underbrace{x}_{\leq 0} \geq 0, \qquad \text{also} \quad f_m(x) \in [0, \infty[\,.$$

- im Falle $x > 0$ wenden wir zunächst den Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf die differenzierbare Funktion $\sin|_{[0,x]}$ an und erhalten

$$\sin x - \underbrace{\sin 0}_{=0} = \underbrace{\sin' \xi}_{=\cos\xi \le 1} \cdot \underbrace{(x-0)}_{=x>0} \qquad \text{für ein} \quad \xi \in \,]0, x[\,,$$

woraus $\sin x \le x$ und wegen $\cos x < 1$ damit

$$f_m(x) = \frac{\overbrace{x - \sin x}^{\ge 0}}{\underbrace{1 - \cos x}_{>0}} \ge 0, \qquad \text{also} \quad f_m(x) \in [0, \infty[\,,$$

folgt.

Für „$\supseteq$" sei $y \in [0, \infty[$, und es ist $f_m(0) = 0 \le y$; des weiteren gilt unter Verwendung der Stetigkeit von Sinus und Cosinus an der Stelle 2π aber

$$f_m(x) = \frac{\overbrace{x - \sin x}^{\to 2\pi - \sin(2\pi) = 2\pi}}{\underbrace{1 - \cos x}_{\to 1 - \cos(2\pi) = 0+}} \xrightarrow[x \to 2\pi-]{} +\infty,$$

so daß es ein $b \in \,]0, 2\pi[$ mit $f_m(b) \ge y$ gibt. Da nun die Funktion $f_m|_{[0,b]}$ an der Stelle $x_0 = 0$ gemäß a) sowie auf $]0, b]$ als Quotient stetiger Funktionen stetig ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\zeta \in [0, b]$ mit $f_m(\zeta) = y$, insbesondere ist also $y \in f_m\left(]-\infty, 2\pi[\right)$.

c) Für $m = \frac{1}{3}$ ist die Differenzierbarkeit von f_m an der Stelle $x_0 = 0$ nachzuweisen; dafür ist zu zeigen, daß der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\frac{f_m(x) - f_m(0)}{x - 0} \underset{f_m(0)=0}{=} \frac{f_m(x)}{x} \qquad \text{für} \qquad x \to 0$$

im eigentlichen Sinne existiert. Für den linksseitigen Grenzwert gilt

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f_m(x)}{x} \underset{x<0}{=} \lim_{x \to 0-} \frac{m\,x}{x} = \lim_{x \to 0-} m = m = \frac{1}{3},$$

und für den rechtsseitigen Grenzwert ergibt sich

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0+} \frac{f_m(x)}{x} &\underset{x>0}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{x - \sin x}{x\,(1 - \cos x)} \overset{\text{L'H}}{\underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \\
= \lim_{x \to 0+} \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos x) + x \sin x} &\overset{\text{L'H}}{\underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{\sin x + (\sin x + x \cos x)} = \\
= \lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{2 \sin x + x \cos x} &\overset{\text{L'H}}{\underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x \to 0+} \frac{\cos x}{2 \cos x + (\cos x - x \sin x)} = \\
= \lim_{x \to 0+} \frac{\cos x}{3 \cos x - x \sin x} &\underset{(*)}{=} \frac{\cos 0}{3 \cos 0 - 0 \cdot \sin 0} = \frac{1}{3 - 0} = \frac{1}{3};
\end{aligned}$$

dabei geht sowohl bei $(*)$ als auch für „$\frac{0}{0}$" bei der Anwendung der Regel von de l'Hospital die Stetigkeit von Sinus und Cosinus an der Stelle $x_0 = 0$ ein.

Zusammenfassend existiert demnach der Differentialquotient

$$f'_m(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_m(x) - f_m(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f_m(x)}{x} = \frac{1}{3}$$

von f_m in $x_0 = 0$, und die Funktion f_m ist in $x_0 = 0$ differenzierbar.

3.2 a) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig (auf ganz $\mathbb{R}$), wenn f in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist, also

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0+} f(x)$$

für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt. Für die in Abhängigkeit von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x}\right), & \text{für } x \neq 0, \\ a, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

ergibt sich für den rechtsseitigen Grenzwert von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$

$$f(x) \underset{x>0}{=} \exp\Bigg(\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to+\infty}\Bigg) \underset{x\to 0+}{\longrightarrow} +\infty;$$

damit ist f, unabhängig von der Wahl von a, an der Stelle $x_0 = 0$ unstetig.

b) Gemäß der Definition der allgemeinen Potenz $a^b = \exp(b \ln a)$ für alle $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ ergibt sich für die gegebene Funktion

$$f :]0; \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^{\ln x} = \exp(\ln x \cdot \ln x) = \exp\left((\ln x)^2\right);$$

damit ist f als Verkettung der Exponentialfunktion, der Quadratfunktion und des natürlichen Logarithmus differenzierbar, und für alle $x > 0$ ergibt sich nach der Kettenregel

$$f'(x) = \exp\left((\ln x)^2\right) \cdot \left(2 \ln x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

mit

$$f'(x) = 0 \iff \underbrace{\exp\left((\ln x)^2\right)}_{>0} \cdot \underbrace{\frac{2}{x}}_{>0} \cdot \ln x = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1;$$

folglich besitzt die Ableitung f' genau eine Nullstelle, nämlich $x = 1$.

3.3 Gemäß der Definition der allgemeinen Potenz $a^b = e^{b \ln a}$ für alle $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ ergibt sich für die gegebene Funktion

$$f :]0; \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^{\sin x} = e^{\sin x \cdot \ln x};$$

dementsprechend betrachten wir auch die Funktion

$$g :]0; \infty[\to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sin x \cdot \ln x.$$

a) Wegen

$$\lim_{x\to 0+} \sin x = 0+ \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$$

ist der Grenzwert der Funktion

$$g(x) = \sin x \cdot \ln x \qquad \text{für} \quad x \to 0+$$

vom Typ „$(0+)\cdot(-\infty)$“, so daß sich über die Umformung

$$g(x) = \sin x \cdot \ln x = \frac{\ln x}{(\sin x)^{-1}} \qquad \text{für} \quad x \to 0+$$

ein Grenzwert vom Typ „$\frac{-\infty}{+\infty}$“ ergibt; eine zweifache Anwendung der Regel von de l'Hospital liefert dann

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} (\sin x \cdot \ln x) &= \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{(\sin x)^{-1}} \underset{„\frac{\pm\infty}{\pm\infty}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \\ &= \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{(-1)(\sin x)^{-2}\cdot\cos x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin^2 x}{-x\cos x} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \\ &= \lim_{x\to 0+} \frac{2\sin x\cdot\cos x}{-(\cos x - x\sin x)} = \frac{2\cdot 0\cdot 1}{-(1-0\cdot 0)} = \frac{0}{-1} = 0.\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Stetigkeit der Exponentialfunktion erhält man damit

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} e^{g(x)} = e^{\lim_{x\to 0+} g(x)} = e^0 = 1,$$

so daß

$$\widetilde{f} : [0;\infty[\to \mathbb{R}, \quad \widetilde{f}(x) = \begin{cases} x^{\sin x}, & \text{für } x > 0, \\ 1, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

eine stetige Fortsetzung der gegebenen Funktion f ist.

b) Die gegebene Funktion f ist als Komposition der Exponentialfunktion und der als Produkt des Sinus und des natürlichen Logarithmus differenzierbaren Funktion g selbst differenzierbar, und für alle $x \in]0;\infty[$ gilt

$$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) = x^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\right).$$

Wegen

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\cos x}{1} = 1$$

ergibt sich damit

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \Bigg(\underbrace{x^{\sin x}}_{\substack{\to 1 \\ \text{a)}}} \cdot \underbrace{\left(\underbrace{\cos x}_{\to 1} \cdot \underbrace{\ln x}_{\to -\infty} + \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \right)}_{\to -\infty} \Bigg) = -\infty.$$

c) Wegen der Stetigkeit der Fortsetzung $\widetilde{f}$ im Punkt $a = 0$ ergibt sich

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - 1}{x - 0} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x \to 0+} \frac{f'(x)}{1} \underset{\text{b)}}{=} -\infty;$$

damit existiert der Differentialquotient von $\widetilde{f}$ im Punkt $a = 0$ nur im uneigentlichen Sinne, mithin ist $\widetilde{f}$ in $a = 0$ nicht differenzierbar.

3.4 Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x + x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{für } x < 0, \\ e^x - 1, & \text{für } x \geq 0, \end{cases}$$

ist zunächst für alle $x \neq 0$ als Summe, Produkt und Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar; dabei gilt

$$f'(x) = 1 + \left(2\,x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \right) = 1 + 2\,x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

für alle $x < 0$ sowie $f'(x) = e^x$ für alle $x > 0$.

Zum Nachweis der Differenzierbarkeit von f an der Stelle 0 betrachten wir das Grenzverhalten des Differenzenquotienten: der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{e^x - 1}{x} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x \to 0+} \frac{e^x}{1} = \frac{e^0}{1} = 1$$

ergibt sich unter Verwendung der Stetigkeit der Exponentialfunktion direkt mit Hilfe der Regel von de l'Hospital; für den linksseitigen Grenzwert gilt dann

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 1 \right| &= \left| \frac{x + x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}}{x} - 1 \right| = \left| \left(1 + x \cdot \sin \frac{1}{x} \right) - 1 \right| = \\ &= \left| x \cdot \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \underbrace{\left| \sin \frac{1}{x} \right|}_{\leq 1} \leq |x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0, \end{aligned}$$

woraus sich unter Verwendung des Schrankenlemmas

$$\lim_{x \to 0-} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 1 \right) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

ergibt. Insgesamt ist f differenzierbar mit

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} 1 + 2\,x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{für } x < 0, \\ 1, & \text{für } x = 0, \\ e^x, & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Zum Nachweis, daß die Ableitung f' im Punkt $x = 0$ unstetig ist, betrachten wir die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D_f mit

$$a_n = -\frac{1}{2\,n\,\pi} \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N};$$

damit ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, aber

$$f'(a_n) = 1 + \frac{2}{-2\,n\,\pi} \cdot \underbrace{\sin(-2\,n\,\pi)}_{=0} - \underbrace{\cos(-2\,n\,\pi)}_{=1} = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \neq 1 = f'(0).$$

Damit ist f' unstetig im Punkt $x = 0$, insbesondere also f nicht stetig differenzierbar.

3.5 a) Zu betrachten ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Für alle $x \neq 0$ gilt

$$|f(x) - f(0)| = \left| x \cos \frac{1}{x} - 0 \right| = |x| \cdot \underbrace{\left| \cos \frac{1}{x} \right|}_{\leq 1} \leq |x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

woraus sich mit dem Schrankenlemma in

$$|f(x) - f(0)| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

die Stetigkeit von f im Punkt $a = 0$ ergibt. Als Differenzenquotient von f im Punkt $a = 0$ ergibt sich

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \cos \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \frac{x \cos \frac{1}{x}}{x} = \cos \frac{1}{x} \quad \text{mit} \quad x \neq 0;$$

zum einen ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Nullfolge mit

$$\lim_{n\to\infty} \cos \frac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\cos(2n\pi)}_{=1} = 1,$$

zum anderen ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Nullfolge mit

$$\lim_{n\to\infty} \cos \frac{1}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\cos((2n+1)\pi)}_{=-1} = -1,$$

so daß dieser Differenzenquotient für $x \to 0$ keinen Grenzwert besitzt. Folglich ist f im Punkt $a = 0$ nicht differenzierbar.

b) Zu betrachten ist die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Als Differenzenquotient von g im Punkt $a = 0$ ergibt sich

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \cos \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{x} = x \cos \frac{1}{x} = f(x) \quad \text{mit} \quad x \neq 0,$$

und unter Verwendung von a) erhält man die Existenz des Grenzwerts

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$$

im eigentlichen Sinne; folglich ist g im Punkt $a=0$ differenzierbar und damit insbesondere auch stetig.

3.6 a) Die gegebene Funktion

$$f:[-1,1]\to\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2}, & \text{für } x\neq 0,\\ 0, & \text{für } x=0,\end{cases}$$

ist zunächst in allen Punkten $x\neq 0$ als Produkt einer quadratischen Funktion und der Verkettung des Sinus und einer gebrochenrationalen Funktion differenzierbar mit

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\,x\cdot\sin\frac{1}{x^2}+x^2\cdot\left(\cos\frac{1}{x^2}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)\right)\\ &= 2\,x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}; \end{aligned}$$

für $x=0$ und $h\neq 0$ ergibt sich ferner

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{h^2\sin\frac{1}{h^2}-0}{h}=h\sin\frac{1}{h^2}$$

mit

$$\left|h\sin\frac{1}{h^2}\right|=|h|\cdot\underbrace{\left|\sin\frac{1}{h^2}\right|}_{\le 1}\le|h|\underset{h\to 0}{\longrightarrow}0,$$

so daß f auch im Punkt $x=0$ wegen

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h^2}=0$$

differenzierbar ist. Wir erhalten damit insgesamt die Ableitung

$$f':[-1,1]\to\mathbb{R},\quad f'(x)=\begin{cases}2\,x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & \text{für } x\neq 0,\\ 0, & \text{für } x=0.\end{cases}$$

b) Für alle $n\in\mathbb{N}$ ist $2n\pi\ge 1$ und damit $\sqrt{2n\pi}\ge 1$, so daß sich für

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\qquad\text{dann}\qquad 0<x_n\le 1,$$

insbesondere also $x_n\in[-1,1]$ ergibt; dabei gilt

$$\begin{aligned} f'(x_n) &= 2\,x_n\cdot\sin\frac{1}{x_n^2}-\frac{2}{x_n}\cdot\cos\frac{1}{x_n^2}\\ &= \frac{2}{\sqrt{2n\pi}}\cdot\underbrace{\sin(2n\pi)}_{=0}-2\sqrt{2n\pi}\cdot\underbrace{\cos(2n\pi)}_{=1}=-2\sqrt{2n\pi}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}-\infty; \end{aligned}$$

damit ist die Funktion f' nicht beschränkt.

3.7 a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\ln|x|), & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

ist zunächst in allen Punkten $x \neq 0$ als Produkt einer quadratischen Funktion und der Verkettung des Sinus und des Logarithmus differenzierbar mit

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot \sin(\ln|x|) + x^2 \cdot \left(\cos(\ln|x|) \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= 2x \sin(\ln|x|) + x \cos(\ln|x|); \end{aligned}$$

für $x = 0$ und $h \neq 0$ ergibt sich ferner

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \sin(\ln|h|) - 0}{h} = h \sin(\ln|h|)$$

mit

$$\big| h \sin(\ln|h|) \big| = |h| \cdot \underbrace{|\sin(\ln|h|)|}_{\leq 1} \leq |h| \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

so daß f auch im Punkt $x = 0$ wegen

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin(\ln|h|) = 0$$

differenzierbar ist. Die Ableitung

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(\ln|x|) + x \cos(\ln|x|), & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

ist zunächst in allen Punkten $x \neq 0$ als Summe von Produkten linearer Funktionen und den Verkettungen des Sinus bzw. Cosinus mit dem Logarithmus stetig; wegen

$$\begin{aligned} |f'(x) - f'(0)| &\underset{f'(0)=0}{=} \big| (2x \sin(\ln|x|) + x \cos(\ln|x|)) \big| \leq \\ &\leq 2|x| \cdot \underbrace{|\sin(\ln|x|)|}_{\leq 1} + |x| \cdot \underbrace{|\cos(\ln|x|)|}_{\leq 1} \leq 3|x| \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

gilt

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = f'(0),$$

so daß f' auch im Punkt 0 stetig ist. Folglich ist f' stetig und damit f stetig differenzierbar.

b) Für $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 \sin(\ln x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \sin(\ln x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \ln x = k\pi \ \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = e^{k\pi} \ \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}; \end{aligned}$$

wegen $e^{k_1\pi} \neq e^{k_2\pi}$ für alle $k_1 \neq k_2$ besitzt damit f unendlich viele positive Nullstellen, nämlich $e^{k\pi}$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Dabei gilt

$$e^{k\pi} \in \left]0,1\right[\iff e^{k\pi} < 1 \iff k\pi < \ln 1 \underset{\ln 1 = 0}{\iff} k < 0$$

sowie

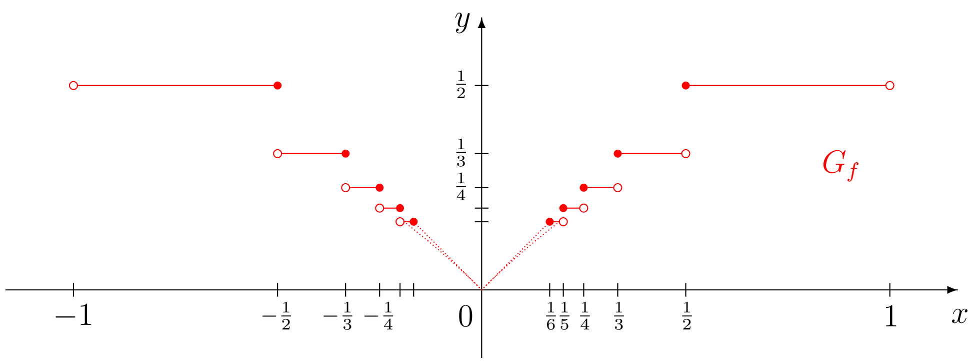
$$e^{k\pi} \in \left]1,\infty\right[\iff e^{k\pi} > 1 \iff k\pi > \ln 1 \underset{\ln 1 = 0}{\iff} k > 0,$$

so daß in $]0,1[$ und $]1,\infty[$ jeweils unendliche viele Nullstellen von f liegen.

3.8 Zu betrachten ist die abschnittsweise definierte Funktion

$$f : \left]-1,1\right[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } \frac{1}{n} \leq |x| < \frac{1}{n-1} \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

a) Für den Graphen von f ergibt sich die folgende Skizze:



b) Für alle $x \in \left]-1,1\right[$ mit $x \neq 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $\frac{1}{n} \leq |x| < \frac{1}{n-1}$, und nach Definition von f ergibt sich

$$f(x) = \frac{1}{n} > 0, \qquad \text{also} \qquad |f(x)| = \frac{1}{n} \leq |x|,$$

und wegen

$$|f(x) - f(0)| = |f(x) - 0| = |f(x)| \leq |x| \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

folgt mit Hilfe des Schrankenlemmas

$$|f(x) - f(0)| \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{bzw.} \qquad f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} f(0);$$

damit ist f an der Stelle $a = 0$ stetig.

c) Wir betrachten den Differenzenquotienten von f an der Stelle $a = 0$ und erhalten

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} \qquad \text{für alle } x \in \left]-1,1\right[\text{ mit } x \neq 0;$$

damit gilt für die Folge $(a_n)_{n \geq 2}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ wegen $f(a_n) = \frac{1}{n}$ zum einen

$$\frac{f(a_n) - f(0)}{a_n - 0} = \frac{f(a_n)}{a_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$$

sowie für die Folge $(b_n)_{n\geq 2}$ mit $b_n = -\frac{1}{n}$ wegen $f(b_n) = \frac{1}{n}$ zum anderen

$$\frac{f(b_n) - f(0)}{b_n - 0} = \frac{f(b_n)}{b_n} = \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = -1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1.$$

Folglich besitzt der Differenzenquotient von f an der Stelle $a = 0$ keinen Grenzwert für $x \to 0$, so daß f an der Stelle $a = 0$ nicht differenzierbar ist.

3.9 Für alle $x \in \,]0, \pi[$ gilt

$$x > 0 \quad \text{und} \quad \sin x > 0, \qquad \text{also} \qquad \frac{\sin x}{x} > 0,$$

und gemäß der Definition der allgemeinen Potenz $a^b = \exp(b \ln a)$ für alle $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ ergibt sich

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}} = \exp\left(\frac{3}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}\right) = \exp\left(\frac{3\,(\ln(\sin x) - \ln x)}{x^2}\right),$$

und wir betrachten zunächst den Grenzwert der inneren Funktion für $x \to 0+$; dabei fließt mehrfach die Stetigkeit von Sinus und Cosinus an der Stelle 0 ein. Es ist

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x\to 0+} \cos x = \cos 0 = 1,$$

also

$$\lim_{x\to 0+} 3\,(\ln(\sin x) - \ln x) = 3 \cdot \lim_{x\to 0+} \ln \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}_{\to 1} \underset{\ln\ \text{stetig}}{=} 3 \cdot \ln 1 = 0,$$

und durch mehrfache Anwendung der Regel von de L'Hospital ergibt sich

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} \frac{3}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x\to 0+} \frac{3\,(\ln(\sin x) - \ln x)}{x^2} \\
&\underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{3\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)}{2\,x} = \lim_{x\to 0+} \frac{3\,(x \cos x - \sin x)}{2\,x^2 \sin x} \\
&\underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{3\,((\cos x - x \sin x) - \cos x)}{2\,(2\,x\ \sin x + x^2 \cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{-3\,x \sin x}{2\,x\,(2 \sin x + x \cos x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{-3 \sin x}{2\,(2 \sin x + x \cos x)} \\
&\underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{-3 \cos x}{2\,(2 \cos x + (\cos x - x \sin x))} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{-3 \cos x}{6 \cos x - 2\,x \sin x} = \frac{-3 \cos 0}{6 \cos 0 - 2 \cdot 0 \cdot \sin 0} = -\frac{1}{2};
\end{aligned}$$

die Stetigkeit der Exponentialfunktion an der Stelle $-\frac{1}{2}$ liefert schließlich

$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \exp\left(\frac{3}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Wegen

$$\lim_{x\to 0-}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{\sin(-x)}{-x}\right)^{\frac{3}{(-x)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0+}\left(\frac{-\sin x}{-x}\right)^{\frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

ergibt sich insgesamt

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

3.10 a) Mit der Stetigkeit des Cosinus (an der Stelle 0) und des natürlichen Logarithmus (an der Stelle 1) gilt

$$\ln(\underbrace{\cos t}_{\to\cos 0=1}) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \ln 1 = 0 \qquad \text{sowie} \qquad t^2 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

und mit der Regel von de l'Hospital ergibt sich damit

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\cos t)}{t^2} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{t\to 0}\frac{\frac{-\sin t}{\cos t}}{2t} = -\frac{1}{2}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t\cos t} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}}$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{\cos t - t\sin t} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-0\cdot 0} = -\frac{1}{2};$$

dabei geht die Stetigkeit von Sinus und Cosinus (an der Stelle 0) ein.

b) Gemäß der Definition der allgemeinen Potenz

$$a^b = \exp(b\ln a) \qquad \text{für alle} \quad a\in\mathbb{R}^+ \;\text{ und }\; b\in\mathbb{R}$$

ergibt sich

$$\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \exp\left(n\cdot\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

mit

$$n\cdot\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} \qquad \text{für alle } n\in\mathbb{N}.$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ erhält man mit Hilfe von a) insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(\cos t)}{t^2} = -\frac{1}{2},$$

woraus mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion (an der Stelle $-\frac{1}{2}$) dann

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\exp\left(n\cdot\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

folgt.

3.11 a) Gegeben ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = b_n + c_n \qquad \text{für} \quad b_n = \frac{n}{2\,n+1} \quad \text{und} \quad c_n = \frac{n}{3^n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N};$$

für beide Summanden ergibt sich bei $n \to \infty$ jeweils ein Grenzwert vom Typ „$\frac{\infty}{\infty}$“; für die entsprechenden Funktionengrenzwerte erhalten wir mit Hilfe der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2\,x+1} \underset{„\frac{\infty}{\infty}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \text{insbesondere also} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2},$$

sowie

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{3^x} \underset{„\frac{\infty}{\infty}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3^x \ln 3} = 0, \qquad \text{insbesondere also} \quad \lim_{n\to\infty} c_n = 0,$$

und insgesamt ergibt sich damit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_n + c_n) = \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

b) Für die auf ihr Verhalten bei $x \to 2$ zu untersuchende Funktion

$$f :]1,\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 - \sqrt{6+5\,x}}{\ln(x-1)},$$

betrachten wir die jeweils differenzierbaren (Zähler– und Nenner–)Funktionen $g :]1,\infty[\to \mathbb{R}$ und $h :]1,\infty[\to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = x^2 - \sqrt{6+5\,x} \qquad \text{und} \qquad h(x) = \ln(x-1);$$

dabei ergibt sich

$$g'(x) = 2\,x - \frac{5}{2\sqrt{6+5\,x}} \qquad \text{und} \qquad h'(x) = \frac{1}{x-1} \neq 0$$

für alle $x > 1$, und des weiteren gilt

$$g(x) = x^2 - \sqrt{6+5\,x} \xrightarrow[x\to 2]{\sqrt{\cdot}\text{ stetig}} 2^2 - \sqrt{6+5\cdot 2} = 4 - \sqrt{16} = 4 - 4 = 0$$

und

$$h(x) = \ln(x-1) \xrightarrow[x\to 2]{\ln\text{ stetig}} \ln(2-1) = \ln 1 = 0.$$

Da nun der Grenzwert

$$\frac{g'(x)}{h'(x)} = \frac{2\,x - \frac{5}{2\sqrt{6+5\,x}}}{\frac{1}{x-1}} \xrightarrow[x\to 2]{\sqrt{\cdot}\text{ stetig}} \frac{2\cdot 2 - \frac{5}{2\sqrt{6+5\cdot 2}}}{\frac{1}{2-1}} = \frac{4 - \frac{5}{2\sqrt{16}}}{1} = 4 - \frac{5}{8} = \frac{27}{8}$$

existiert, existiert nach der Regel von de l'Hospital auch der Grenzwert von $\dfrac{g(x)}{h(x)}$ für $x \to 2$, und es gilt

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - \sqrt{6+5\,x}}{\ln(x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to 2} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \frac{27}{8}.$$

3.12 Aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion sowie der trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus gilt

$$\lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0} e^{-x} = e^{-0} = 1$$

sowie

$$\lim_{x\to 0} \sin x = \sin 0 = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1,$$

so daß eine zweimalige Anwendung der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

ergibt. Des weiteren gilt

$$\frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} \cdot \left(x \cos \frac{1}{x}\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z} \cdot \pi)$, so daß wir das Grenzverhalten für $x \to 0$ der beiden Faktoren

$$\frac{x}{\sin x} \qquad \text{und} \qquad \left(x \cos \frac{1}{x}\right)$$

getrennt untersuchen können. Zum einen liefert die Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1,$$

zum anderen ergibt sich wegen

$$\left| x \cos \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \underbrace{\left| \cos \frac{1}{x} \right|}_{\leq 1} \leq |x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

unter Verwendung des Schrankenlemmas

$$\lim_{x\to 0} \left(x \cos \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Insgesamt erhält man also

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0} x \cos \frac{1}{x}\right) = 1 \cdot 0 = 0.$$

3.13 a) Wegen der Stetigkeit von Sinus und Cosinus an der Stelle $a = 0$ gilt

$$\lim_{x\to 0} \sin x = \sin 0 = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0} \sin(x^2) = \sin 0 = 0$$

sowie

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0} \cos(x^2) = \cos 0 = 1;$$

damit ergibt sich durch dreimalige Anwendung der Regel von de l'Hospital

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^2)-1}{x^3\sin x} &\overset{\text{L'H}}{\underset{„\frac{0}{0}“}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x^2)\cdot 2\,x}{3\,x^2\sin x + x^3\cos x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(x^2)}{3\,x\sin x + x^2\cos x}\\
&\overset{\text{L'H}}{\underset{„\frac{0}{0}“}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{-2\,(\cos(x^2)\cdot 2x)}{(3\sin x + 3\,x\cos x)+(2x\cos x - x^2\sin x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-4\cos(x^2)\cdot x}{3\sin x + 5\,x\cos x - x^2\sin x}\\
&\overset{\text{L'H}}{\underset{„\frac{0}{0}“}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{-4(-\sin(x^2)\cdot 2x)\cdot x - 4\cos(x^2)}{3\cos x + 5\,(\cos x - x\sin x)-(2x\sin x + x^2\cos x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{8\sin(x^2)\cdot x^2 - 4\cos(x^2)}{8\cos x - 7x\sin x - x^2\cos x}\\
&= \frac{8\sin(0^2)\cdot 0^2 - 4\cos(0^2)}{8\cos 0 - 7\cdot 0\sin 0 - 0^2\cos 0} = \frac{0-4}{8-0+0} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

b) Für alle $a>0$ ist die Funktion

$$f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f_a(x)=\frac{\sin x}{a+(\sin x)^2},$$

wegen

$$f_a(-x)=\frac{\sin(-x)}{a+(\sin(-x))^2}=\frac{-\sin x}{a+(-\sin x)^2}=-\frac{\sin x}{a+(\sin x)^2}=-f_a(x)$$

für alle $x\in\mathbb{R}$ ungerade; dementsprechend ist ihr Graph G_{f_a} punktsymmetrisch zum Ursprung. Für das bestimmte Integral von f_a über das symmetrisch zum Ursprung liegende Intervall $[-\pi,\pi]$ gilt demnach

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(x)}{a+\sin(x)^2}\,dx=0.$$

3.14 Wir betrachten die gebrochenrationale Funktion

$$\varphi:]0,3[\,\to\mathbb{R},\quad \varphi(x)=\pi\,\frac{3x-3}{3x-x^2},$$

mit

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \pi\cdot\frac{3x-3}{x\cdot(3-x)}=\pi\cdot\frac{2x+(x-3)}{x\cdot(3-x)}=\pi\cdot\frac{2x-(3-x)}{x\cdot(3-x)}=\\
&= \pi\cdot\left(\frac{2x}{x\cdot(3-x)}-\frac{3-x}{x\cdot(3-x)}\right)=\pi\cdot\left(\frac{2}{3-x}-\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

für alle $x\in\,]0,3[$, insbesondere also

$$\varphi(1)=\pi\cdot\left(\frac{2}{3-1}-\frac{1}{1}\right)=0\qquad\text{und}\qquad\varphi(2)=\pi\cdot\left(\frac{2}{3-2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{3\,\pi}{2};$$

die Funktion φ ist stetig differenzierbar, und für alle $x \in \,]0,3[$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \pi \cdot \left(-\frac{2}{(3-x)^2} \cdot (-1) - \left(-\frac{1}{x^2} \right) \right) = \\ &= \pi \cdot \left(\frac{2}{(3-x)^2} + \frac{1}{x^2} \right) = \pi \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2 - 6x + 9} \right).\end{aligned}$$

Für das zu berechnende Integral ergibt sich mit der Substitutionsregel $(*)$ im Hinblick auf die Stetigkeit des Cosinus

$$\begin{aligned}&\int_1^2 \cos\left(\pi \frac{3x-3}{3x-x^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2-6x+9} \right) dx = \\ &\quad = \int_1^2 \cos(\varphi(x)) \cdot \frac{\varphi'(x)}{\pi}\, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_1^2 \cos(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx \underset{(*)}{=} \\ &\quad = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\varphi(1)}^{\varphi(2)} \cos u\, du = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos u\, du = \frac{1}{\pi} \cdot \Big[\sin u \Big]_0^{\frac{3\pi}{2}} = \\ &\qquad\qquad = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\sin \frac{3\pi}{2} - \sin 0 \right) = \frac{1}{\pi} \cdot ((-1) - 0) = -\frac{1}{\pi}.\end{aligned}$$

3.15 a) Gemäß der Definition der allgemeinen Potenz $a^b = e^{b \ln a}$ für $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}$ ist

$$f(x) = x^x = e^{x \ln x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$, so daß f zumindest in allen Punkten $x > 0$ als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig ist. Ferner ergibt sich im Exponenten wegen

$$x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \qquad \text{mit} \quad \ln x \underset{x \to 0+}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{und} \quad \frac{1}{x} \underset{x \to 0+}{\longrightarrow} +\infty$$

für $x \to 0+$ ein Grenzwert der Form „$\frac{\infty}{\infty}$“. Wir betrachten die jeweils differenzierbaren (Zähler– und Nenner–)Funktionen

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \ln x, \qquad \text{und} \qquad h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{x},$$

mit

$$g'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{und} \qquad h'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$; des weiteren gilt $\lim\limits_{x \to 0+} h(x) = \infty$. Da nun der Grenzwert

$$\frac{g'(x)}{h'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x \underset{x \to 0+}{\longrightarrow} 0$$

existiert, existiert nach der Regel von de l'Hospital auch der Grenzwert von $\dfrac{g(x)}{h(x)}$ für $x \to 0+$, und es gilt

$$\lim_{x \to 0+} x \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to 0+} \frac{g'(x)}{h'(x)} = 0.$$

Folglich erhalten wir (wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion exp an der Stelle 0) dann

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^0 = 1,$$

so daß die gegebene Funktion

$$f : [0,\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^x, & \text{falls } x > 0, \\ c, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

genau dann auch an der Stelle 0 und damit als Funktion stetig ist, wenn

$$c = f(0) = \lim_{x\to 0+} f(x) = 1$$

gilt.

b) Nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung ist die zur gemäß a) stetigen Funktion $f : [0;\infty[\to \mathbb{R}$ gebildete Integralfunktion

$$F : [0;\infty[\to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

differenzierbar mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [0;\infty[$. Speziell an der Stelle 0 ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} F(x) \underset{F(0)=0}{=} \\ = \lim_{x\to 0+} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = F'(0) = f(0) = 1. \end{aligned}$$

3.16 a) Die gegebene Funktion

$$f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln x + \frac{1}{x},$$

ist (als Summe des natürlichen Logarithmus und einer gebrochenrationalen Funktion) differenzierbar, und für alle $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}.$$

Wegen

$$f'(x) = \frac{\overbrace{x-1}^{\leq 0}}{\underbrace{x^2}_{>0}} \leq 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in]0,1]$$

ist f auf $]0,1]$ monoton fallend, und für alle $0 < x \leq 1$ gilt $f(x) \geq f(1)$. Wegen

$$f'(x) = \frac{\overbrace{x-1}^{\geq 0}}{\underbrace{x^2}_{>0}} \geq 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in [1,+\infty[$$

ist f auf $[1, +\infty[$ monoton wachsend, und für alle $1 \leq x$ gilt $f(1) \leq f(x)$. Für alle $x > 0$ gilt damit insgesamt

$$f(x) \geq f(1) = \ln 1 + \frac{1}{1} = 0 + 1 = 1 > 0.$$

b) Da die Funktion $f :]0, +\infty[$ als differenzierbare Funktion insbesondere stetig ist, ist ihre Integralfunktion

$$F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_1^x f(t)\, dt,$$

nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung differenzierbar, und gemäß a) gilt

$$F'(x) = f(x) > 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in]0, \infty[\,;$$

damit ist F streng monoton wachsend, insbesondere also injektiv. Zum Nachweis der Surjektivität von F mit

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x \left(\ln t + \frac{1}{t}\right) dt = \Big[\big(t \ln t - t\big) + \ln t\Big]_1^x = \\ &= \Big[\big(x \ln x - x\big) + \ln x\Big] - \Big[\big(1 \cdot \underbrace{\ln 1}_{=0} - 1\big) + \underbrace{\ln 1}_{=0}\Big] \\ &= x \ln x - x + \ln x + 1 \qquad \text{für alle} \quad x \in]0, \infty[\end{aligned}$$

sei $y \in \mathbb{R}$; wegen

$$\lim_{x \to 0+} F(x) = \lim_{x \to 0+} \Big(\underbrace{(x+1)}_{\to 1} \cdot \underbrace{\ln x}_{\to -\infty} + \underbrace{(1-x)}_{\to 1} \Big) = -\infty$$

gibt es ein $a \in]0, 1[$ mit $F(a) \leq y$, und wegen

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \Big(\underbrace{x}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{(\ln x - 1)}_{\to +\infty} + \underbrace{(\ln x + 1)}_{\to +\infty} \Big) = +\infty$$

gibt es ein $b \in]1, +\infty[$ mit $F(b) \geq y$, so daß es für die stetige Funktion F nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a, b] \subseteq]0, +\infty[$ mit $F(\xi) = y$ gibt. Folglich ist F auch surjektiv, insgesamt also bijektiv.

3.17 a) Für die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x \cdot \sin x,$$

ergibt sich mit Hilfe partieller Integration

$$\begin{aligned} \int f(x)\, dx &= \int \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{v'(x)}\, dx = \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{v(x)} - \int \underbrace{1}_{u'(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{v(x)}\, dx = \\ &= -x \cdot \cos x + \int \cos x\, dx = -x \cdot \cos x + \sin x + C, \end{aligned}$$

und damit ist etwa

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = -x \cdot \cos x + \sin x,$$

eine Stammfunktion von f.

b) Die Funktion F ist (als Summe und Produkt linearer und trigonometrischer Funktionen) beliebig oft differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung

$$\begin{aligned} F'(x) = f(x) &= x \cdot \sin x, \\ F''(x) = f'(x) &= \sin x + x \cdot \cos x. \end{aligned}$$

Als lokale Extremstellen der auf ganz $\mathbb{R}$ definierten und differenzierbaren Funktion F kommen lediglich die Nullstellen ihrer Ableitung $F' = f$ in Frage, wegen

$$\begin{aligned} F'(x) = 0 \iff x \cdot \sin x = 0 \iff (x = 0 \ \text{ oder } \ \sin x = 0) \iff \\ \iff (x = 0 \ \text{ oder } \ x \in \mathbb{Z} \cdot \pi) \iff x = k \cdot \pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ also genau die ganzzahligen Vielfachen von π. Wir überprüfen das Verhalten von F an diesen kritischen Stellen $k\,\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ zunächst mit Hilfe der 2. Ableitung

$$F''(x) = \underbrace{\sin(k\,\pi)}_{=0} + (k\,\pi) \cdot \underbrace{\cos(k\,\pi)}_{=(-1)^k} = (-1)^k\,k\,\pi$$

und erhalten

$$F''(x) = (-1)^k\,k\,\pi \begin{cases} > 0, & \text{für } k > 0 \text{ gerade oder } k < 0 \text{ ungerade}, \\ = 0, & \text{für } k = 0, \\ < 0, & \text{für } k > 0 \text{ ungerade oder } k < 0 \text{ gerade}; \end{cases}$$

damit besitzt F an allen Stellen $k\,\pi$ mit $k > 0$ gerade oder $k < 0$ ungerade ein (isoliertes) lokales Minimum und an allen Stellen $k\,\pi$ mit $k > 0$ ungerade oder $k < 0$ gerade ein (isoliertes) lokales Maximum.
Wir untersuchen das Verhalten von F in einer Umgebung der verbleibenden Nullstelle $x = 0$ von F': wegen

$$F'(x) = \underbrace{x}_{<0} \cdot \underbrace{\sin x}_{<0} > 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in \,]-\pi, 0[$$

ist die stetige Funktion F auf $[-\pi, 0]$ streng monoton wachsend, und wegen

$$F'(x) = \underbrace{x}_{>0} \cdot \underbrace{\sin x}_{>0} > 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in \,]0, \pi[$$

ist die stetige Funktion F auf $[0, \pi]$ streng monoton wachsend, so daß F auf $[-\pi, \pi]$ streng monoton wächst und damit in $x = 0$ kein lokales Extremum besitzen kann.

3.18 Die zu betrachtende Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \cosh(\cosh(x)) \cdot \sinh(x) \cdot \cosh(x),$$

ist als Komposition und Produkt der hyperbolischen Funktionen

$$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

und

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

beliebig oft differenzierbar, insbesondere also stetig; dabei gilt bekanntlich

$$\cosh'(x) = \sinh(x) \qquad \text{und} \qquad \sinh'(x) = \cosh(x) \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Zur Bestimmung einer Stammfunktion von φ verwenden wir die Substitution

$$t = \cosh(x) \qquad \text{mit} \qquad \frac{dt}{dx} = \sinh(x), \quad \text{also} \quad dt = \sinh(x)\,dx,$$

und erhalten

$$\int \varphi(x)\,dx = \int \cosh(\underbrace{\cosh(x)}_{=t}) \cdot \underbrace{\cosh(x)}_{=t} \cdot \underbrace{\sinh(x)\,dx}_{=dt} = \int \cosh(t) \cdot t\,dt;$$

ferner ergibt sich mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int \varphi(x)\,dx &= \int \underbrace{\cosh(t)}_{u'(t)} \cdot \underbrace{t}_{v(t)}\,dt = \underbrace{\sinh(t)}_{u(t)} \cdot \underbrace{t}_{v(t)} - \int \underbrace{\sinh(t)}_{u(t)} \cdot \underbrace{1}_{v'(t)}\,dt \\ &= \sinh(t) \cdot t - \int \sinh(t)\,dt = \sinh(t) \cdot t - \cosh(t) + C \\ &= \sinh(\cosh(x)) \cdot \cosh(x) - \cosh(\cosh(x)) + C. \end{aligned}$$

Damit ist etwa

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \sinh(\cosh(x)) \cdot \cosh(x) - \cosh(\cosh(x)),$$

eine Stammfunktion von φ.

b) Da die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist, ist ihre Integralfunktion

$$f : \left]-1, \infty\right[\to \mathbb{R}, \quad f(y) = \int_{-1}^{y} \cosh(\cosh(x)) \cdot \sinh(x) \cdot \cosh(x)dx,$$

nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung differenzierbar, und für alle $y \in \left]-1, \infty\right[$ gilt

$$f'(y) = \varphi(y) = \cosh(\cosh(y)) \cdot \sinh(y) \cdot \cosh(y)$$

für alle $y \in \left]-1, \infty\right[$. Die stetige Funktion f ist zum einen wegen

$$f'(y) = \underbrace{\cosh(\cosh(y))}_{>0} \cdot \underbrace{\sinh(y)}_{<0} \cdot \underbrace{\cosh(y)}_{>0} < 0$$

für alle $y < 0$ auf $\left]-1, 0\right]$ streng monoton fallend und zum anderen wegen

$$f'(y) = \underbrace{\cosh(\cosh(y))}_{>0} \cdot \underbrace{\sinh(y)}_{>0} \cdot \underbrace{\cosh(y)}_{>0} > 0$$

für alle $y > 0$ auf $\left[0, \infty\right[$ streng monoton wachsend; damit besitzt f genau eine Extremstelle, nämlich ein (sogar globales) Minimum bei $y = 0$.

3.19 a) Durch dreimalige partielle Integration erhält man

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \underbrace{x^3}_{u_1(x)} \underbrace{\cos x}_{v_1'(x)} \, dx &= \Big[\underbrace{x^3}_{u_1(x)} \underbrace{\sin x}_{v_1(x)} \Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \underbrace{3\,x^2}_{u_1'(x)} \underbrace{\sin x}_{v_1(x)} \, dx \\
&= \Big((2\pi)^3 \underbrace{\sin(2\pi)}_{=0} - 0^3 \underbrace{\sin 0}_{=0} \Big) + 3 \int_0^{2\pi} \underbrace{x^2}_{u_2(x)} \underbrace{(-\sin x)}_{v_2'(x)} \, dx \\
&= 3 \left(\Big[\underbrace{x^2}_{u_2(x)} \underbrace{\cos x}_{v_2(x)} \Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \underbrace{2\,x}_{u_2'(x)} \underbrace{\cos x}_{v_2(x)} \, dx \right) \\
&= 3 \Big((2\pi)^2 \underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} - 0^2 \underbrace{\cos 0}_{=1} \Big) - 6 \int_0^{2\pi} \underbrace{x}_{u_3(x)} \underbrace{\cos x}_{v_3'(x)} \, dx \\
&= 12\pi^2 - 6 \left(\Big[\underbrace{x}_{u_3(x)} \underbrace{\sin x}_{v_3(x)} \Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \underbrace{1}_{u_3'(x)} \underbrace{\sin x}_{v_3(x)} \, dx \right) \\
&= 12\pi^2 - 6 \Big(2\pi \underbrace{\sin(2\pi)}_{=0} - 0 \underbrace{\sin 0}_{=0} \Big) - 6 \int_0^{2\pi} (-\sin x) \, dx \\
&= 12\pi^2 - \Big[\cos x \Big]_0^{2\pi} = 12\pi^2 - \Big(\underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} - \underbrace{\cos 0}_{=1} \Big) = 12\pi^2.
\end{aligned}$$

b) Die gegebene Funktion

$$f :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x},$$

ist als Quotient des Sinus und der Identität differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \frac{1}{x} \cdot \cos x - \frac{1}{x^2} \cdot \sin x$$

für alle $x > 0$. Für alle $x \in \left[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi\right]$ gilt dabei $\cos x \leq 0$ und $\sin x \geq 0$, also

$$f'(x) = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{x}}_{>0} \cdot \underbrace{\cos x}_{\leq 0}}_{\leq 0} - \underbrace{\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{>0} \cdot \underbrace{\sin x}_{\geq 0}}_{\geq 0} \leq 0,$$

und folglich ist die Funktion f auf dem Intervall $\left[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi\right]$ monoton fallend.

c) Für alle $x \in \left[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi\right]$ gilt

$$\tfrac{1}{2}\pi \leq x \leq \tfrac{3}{4}\pi;$$

da f gemäß b) auf $\left[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi\right]$ monoton fallend ist, folgt daraus

$$f(\tfrac{1}{2}\pi) \geq f(x) \geq f(\tfrac{3}{4}\pi)$$

mit

$$f(\tfrac{1}{2}\pi) = \frac{\sin(\frac{1}{2}\pi)}{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi} = \frac{2}{\pi}$$

und

$$f(\tfrac{3}{4}\pi) = \frac{\sin(\frac{3}{4}\pi)}{\frac{3}{4}\pi} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{3}{4}\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi},$$

insgesamt also

$$\frac{2\sqrt{2}}{3\pi} \leq f(x) \leq \frac{2}{\pi}.$$

Wegen der Monotonie des Integrals ergibt sich daraus

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}\,dx \leq \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} f(x)\,dx \leq \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{2}{\pi}\,dx$$

mit

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}\,dx = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \qquad \text{und} \qquad \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{2}{\pi}\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2},$$

insgesamt also die zu zeigende Abschätzung

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} \leq \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} f(x)\,dx \leq \frac{1}{2}.$$

3.20 Die gegebene Funktion

$$f : \,]1,\infty[\, \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1+\ln x}{x\ln x} = \frac{1}{x\ln x} + \frac{1}{x},$$

ist (als Quotient aus einer Summe und einer Differenz einer linearen Funktion und des Logarithmus) stetig und auch differenzierbar, und für alle $x > 1$ gilt

$$f'(x) = -\frac{1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}}{(x\ln x)^2} - \frac{1}{x^2} = -\left(\frac{1+\ln x}{x^2(\ln x)^2} + \frac{1}{x^2}\right).$$

a) Für alle $x \in \,]1,\infty[$ gilt $x > 1$ und damit $\ln x > \ln 1 = 0$, woraus sich

$$f(x) = \frac{\overbrace{1+\ln x}^{>\ln x>0}}{\underbrace{x}_{>0}\cdot\underbrace{\ln x}_{>0}} > 0$$

ergibt; folglich ist zunächst $f\left(]1,\infty[\right) \subseteq \,]0,\infty[$. Zum Nachweis von „$\supseteq$“ sei $y \in \,]0,\infty[$ beliebig; wegen

$$\underbrace{x}_{\to 1}\cdot\underbrace{\ln x}_{\to\ln(1+)=0+} \underset{x\to 1+}{\longrightarrow} 0+ \quad \text{und damit} \quad f(x) = \frac{1}{\underbrace{x\ln x}_{\to+\infty}} + \frac{1}{\underbrace{x}_{\to 1}} \underset{x\to 1+}{\longrightarrow} +\infty$$

gibt es ein $a \in \,]1,e[$ mit $f(a) > y$, und wegen

$$\underbrace{x}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{\ln x}_{\to+\infty} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{und damit} \quad f(x) = \frac{1}{\underbrace{x\ln x}_{\to 0}} + \frac{1}{\underbrace{x}_{\to 0}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

gibt es in $b \in \,]e,\infty[$ mit $f(b) < y$. Folglich gibt es für die stetige Funktion $f|_{[a,b]}$ nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a,b] \subseteq \,]1,\infty[$ mit $f(\xi) = y$, und damit gilt $y \in f\left(]1,\infty[\right)$. Insgesamt ergibt sich $f\left(]1,\infty[\right) = \,]0,\infty[$.

b) Zu betrachten ist die alternierende Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\, a_n \qquad \text{mit} \qquad a_n = f(n) \quad \text{für alle} \quad n \geq 2;$$

mit den Eigenschaften der Funktion f ergibt sich dabei:

- für alle $x > 1$ gilt $1 + \ln x > 1 + \ln 1 = 1 > 0$ und damit

$$f'(x) = -\underbrace{\left(\frac{1+\ln x}{x^2(\ln x)^2} + \frac{1}{x^2}\right)}_{>0} < 0;$$

  folglich ist f auf dem Intervall $]1, \infty[$ (sogar streng) monoton fallend, so daß auch die Folge $(a_n)_{n\geq 2}$ wegen

$$a_{n+1} = f(n+1) \leq f(n) = a_n \qquad \text{für alle} \quad n \geq 2$$

  monoton fallend ist.
- gemäß a) gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \qquad \text{und damit} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f(n) = 0;$$

  damit ist $(a_n)_{n\geq 2}$ eine Nullfolge.

Damit ist $(a_n)_{n\geq 2}$ eine monoton fallende Nullfolge, so daß nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium die alternierende Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\, a_n$ konvergiert.

c) Für alle $x \in\,]1, \infty[$ gilt

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x} + \frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} + \frac{1}{x} = \frac{\ln' x}{\ln x} + \frac{1}{x},$$

und folglich ist

$$F : \,]1, \infty[\,, \quad F(x) = \ln|\ln x| + \ln|x| \underset{\ln x > 0}{\overset{x\geq 1}{=}} \ln(\ln x) + \ln x,$$

eine Stammfunktion von f.

3.21 a) Zu betrachten ist die Integralfunktion

$$g : [2, \infty[\, \to \mathbb{R}, \quad g(a) = \int_2^a \frac{x^2 - 2x - 1}{x - x^3}\, dx;$$

die gebrochen–rationale Integrandenfunktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x - x^3},$$

besitzt wegen

$$x - x^3 = x\left(1 - x^2\right) = x(1-x)(1+x) = 0 \iff$$
$$\iff (x = 0 \;\text{ oder }\; 1 - x = 0 \;\text{ oder }\; 1 + x = 0) \iff x \in \{-1, 0, 1\}$$

die maximale Definitionsmenge $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, so daß $D = \,]1, \infty[$ das maximale Definitionsintervall ist, in dem die untere Integrationsgrenze 2 liegt. Wir unterwerfen f der Partialbruchzerlegung und bestimmen Konstanten α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{1-x} + \frac{\gamma}{1+x} \qquad \text{für alle} \quad x \in \,]1, \infty[\,;$$

wegen

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{1-x} + \frac{\gamma}{1+x} &= \frac{\alpha \cdot (1-x)\,(1+x) + \beta \cdot x\,(1+x) + \gamma \cdot x\,(1-x)}{x\,(1-x)\,(1+x)} \\ &= \frac{\alpha \cdot (1-x^2) + \beta \cdot (x+x^2) + \gamma \cdot (x-x^2)}{x-x^3} \\ &= \frac{(-\alpha+\beta-\gamma)\,x^2 + (\beta+\gamma)\,x + \alpha}{x-x^3} \end{aligned}$$

für alle $x \in \,]1, \infty[$ ergibt sich über den Koeffizientenvergleich

$$-\alpha + \beta - \gamma = 1 \qquad \text{und} \qquad \beta + \gamma = -2 \qquad \text{und} \qquad \alpha = -1,$$

also $\beta - \gamma = 1 + \alpha = 0$ bzw. $\beta = \gamma$, und damit $\beta = \gamma = -1$. Wegen

$$f(x) = \frac{-1}{x} + \frac{-1}{1-x} + \frac{-1}{1+x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

für alle $x \in \,]1, \infty[$ ergibt sich für $a \geq 2$ damit

$$\begin{aligned} g(a) &= \int_2^a \frac{x^2 - 2\,x - 1}{x - x^3}\,dx \\ &= \int_2^a \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \Big[-\ln|x| + \ln|x-1| - \ln|x+1| \Big]_2^a \\ &= \Big(-\ln|a| + \ln|a-1| - \ln|a+1| \Big) - \Big(-\ln 2 + \ln 1 - \ln 3 \Big) \\ &\underset{a \geq 2}{=} -\ln a + \ln(a-1) - \ln(a+1) + \ln 6 \;=\; \ln \frac{6\,(a-1)}{a\,(a+1)}. \end{aligned}$$

b) Die Integrandenfunktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist als gebrochen–rationale Funktion stetig, und damit ist ihre Integralfunktion $g : [2, \infty[\,\to \mathbb{R}$ nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung differenzierbar, und für alle $x \in [2, \infty[$ gilt

$$g'(x) = f(x) = \frac{x^2 - 2\,x - 1}{x - x^3} = \frac{(x-1)^2 - 2}{x\,(1-x^2)}.$$

Für alle $x \in [2, \infty[$ gilt $2 \leq x$, also $x > 0$ und $1 - x^2 \leq 1 - 2^2 = -3 < 0$, und damit für den Nenner $x\,(1-x^2) < 0$; des weiteren ergibt sich:

- für alle $x \in \left[2, 1+\sqrt{2}\right[$ gilt $2 \le x < 1+\sqrt{2}$, also $1 \le x-1 < \sqrt{2}$ mit $(x-1)^2 < 2$, und damit für den Zähler $(x-1)^2 - 2 < 0$, insgesamt also

$$g'(x) = \frac{\overbrace{(x-1)^2 - 2}^{<0}}{\underbrace{x\left(1-x^2\right)}_{<0}} > 0,$$

  so daß die stetige Funktion g auf dem Intervall $\left[2, 1+\sqrt{2}\right]$ streng monoton wächst: es ist also $f(x) < f(1+\sqrt{2})$ für alle $x \in \left[2, 1+\sqrt{2}\right[$.
- für alle $x \in \left]1+\sqrt{2}, \infty\right[$ gilt $x > 1+\sqrt{2}$, also $x-1 > \sqrt{2}$ mit $(x-1)^2 > 2$, und damit für den Zähler $(x-1)^2 - 2 > 0$, insgesamt also

$$g'(x) = \frac{\overbrace{(x-1)^2 - 2}^{>0}}{\underbrace{x\left(1-x^2\right)}_{<0}} < 0,$$

  so daß die stetige Funktion g auf dem Intervall $\left[1+\sqrt{2}, \infty\right[$ streng monoton fällt: es ist also $f(x) < f(1+\sqrt{2})$ für alle $x \in \left]1+\sqrt{2}, \infty\right[$.

Damit besitzt $g : [2, \infty[\to \mathbb{R}$ in $a = 1+\sqrt{2}$ ein globales Maximum.

3.22 a) Die gegebene Funktion

$$f :]1, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x \ln x} = (x \cdot \ln x)^{-1},$$

ist als Komposition einer Potenzfunktion und dem Produkt einer linearen Funktion und des natürlichen Logarithmus differenzierbar, und für alle $x > 1$ gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)\,(x \cdot \ln x)^{-2} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) \\ &= \underbrace{-\frac{1}{(x \ln x)^2}}_{<0} \cdot \underbrace{\big(\underbrace{\ln x}_{>\ln 1 = 0} + 1\big)}_{>1>0} < 0; \end{aligned}$$

damit ist die Funktion f auf dem Intervall $]1, \infty[$ streng monoton fallend.

b) Es ist $\ln :]1, \infty[\to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\ln' x = \frac{1}{x}$ für alle $x > 1$, und gemäß der Substitutionsregel $(*)$ ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \int_e^{e^2} f(x)\,dx &= \int_e^{e^2} \frac{1}{x\,\ln x}\,dx = \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}\right) dx \\ &= \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln x} \cdot \ln' x\,dx \underset{(*)}{=} \int_{\ln e}^{\ln e^2} \frac{1}{u}\,du \\ &= \int_1^2 \frac{1}{u}\,du = \big[\ln |u|\big]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2. \end{aligned}$$

3.23 Zu betrachten ist die Funktion

$$f : [1, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_1^x \left(\frac{t}{e}\right)^t \ln t \, dt,$$

also eine Integralfunktion der Funktion

$$\varphi : [1, \infty[\to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \ln x;$$

für diese gilt gemäß der Definition der allgemeinen Potenz $a^b = \exp(b \ln a)$ für alle $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ wegen

$$\left(\frac{x}{e}\right)^x = \exp\left(x \ln \frac{x}{e}\right) = \exp\left(x(\ln x - \underbrace{\ln e}_{=1})\right) = \exp(x \ln x - x)$$

damit

$$\varphi(x) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \ln x = \exp(x \ln x - x) \cdot \ln x$$

für alle $x \in [1, \infty[$. Folglich ist φ als Summe, Produkt und Komposition linearer Funktionen sowie der Exponentialfunktion und des Logarithmus insbesondere stetig.

a) Zur Berechnung von $f(x)$ betrachten wir die differenzierbare Funktion

$$g : [1, \infty[\to \mathbb{R}, \quad g(t) = t \ln t - t,$$

mit

$$g'(t) = \left(1 \cdot \ln t + t \cdot \frac{1}{t}\right) - 1 = (\ln t + 1) - 1 = \ln t$$

und erhalten mit Hilfe der Substitutionsregel

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_1^x \varphi(t) \, dt = \int_1^x \exp(t \ln t - t) \cdot \ln t \, dt \\ &= \int_1^x \exp(g(t)) \cdot g'(t) \, dt = \int_{g(1)}^{g(x)} \exp(u) \, du \\ &= \int_{-1}^{x \ln x - x} \exp(u) \, du = \Big[\exp(u) \Big]_{-1}^{x \ln x - x} \\ &= \exp(x \ln x - x) - \exp(-1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x - e^{-1} \end{aligned}$$

für alle $x \in [1, \infty[$.

b) Gemäß obigen Überlegungen ist die Integrandenfunktion φ stetig; damit ist ihre Integralfunktion f nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung differenzierbar, und für alle $x \in [1, \infty[$ gilt

$$f'(x) = \varphi(x) = \exp(x \ln x - x) \cdot \ln x.$$

Wegen $\ln 1 = 0$ und $\ln e = 1$ ergibt sich

$$f'(1) = \exp(1 \cdot \ln 1 - 1) \cdot \ln 1 = \exp(-1) \cdot 0 = 0$$

und

$$f'(e) = \exp(e \cdot \ln e - e) \cdot \ln e = \exp(0) \cdot 1 = e^0 = 1,$$

es ist also

$$f'(1) = 0 < \tfrac{1}{e} < 1 = f'(e);$$

damit existiert für die stetige Funktion $f' = \varphi$ auf dem Intervall $[1, e]$ nach dem Zwischenwertsatz eine Stelle ξ mit $f'(\xi) = \frac{1}{e}$, und damit besitzt die Tangente an den Graphen G_f an der Stelle $\xi \in [1, e]$ die Steigung $f'(\xi) = \frac{1}{e}$.

3.24 Zu betrachten ist die Funktion

$$f :]3, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_3^{x^2+x} \frac{1}{t^3+1}\, dt.$$

Die Integrandenfunktion

$$\varphi :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{t^3+1},$$

ist (als gebrochenrationale Funktion) stetig, besitzt also nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung eine Stammfunktion $\Phi :]0, \infty[\to \mathbb{R}$. Wir erhalten

$$f(x) = \int_3^{x^2+x} \frac{1}{t^3+1}\, dt = \int_3^{x^2+x} \varphi(t)\, dt = \Big[\Phi(t)\Big]_3^{x^2+x} = \Phi(x^2+x) - \Phi(3)$$

für alle $x \in]3, \infty[$; damit ist f (von der additiven Konstanten $-\Phi(3)$ abgesehen) die Komposition der differenzierbaren Funktion Φ und einer (ebenfalls differenzierbaren) quadratischen Funktion. Damit ist f nach der Kettenregel differenzierbar, und für alle $x \in]3, \infty[$ ergibt sich

$$f'(x) = \Phi'(x^2+x) \cdot (2\,x+1) = \varphi(x^2+x) \cdot (2\,x+1) = \frac{2\,x+1}{(x^2+x)^3+1}.$$

3.25 Das achsenparallele Rechteck Q besitzt die Ecke $(0;0)$ im Nullpunkt, die beiden Ecken $(x;0)$ und $(0;y)$ auf den Koordinatenachsen und damit die weitere Ecke $(x;y)$, die auf dem Graphen der Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{4-x}{2+x},$$

ist; es ist also

$$y = \frac{4-x}{2+x}.$$

Da Q nach Voraussetzung im ersten Quadranten liegt, muß $x > 0$ und $y > 0$ mit

$$y > 0 \iff \frac{4-x}{2+x} > 0 \underset{2+x>0}{\iff} 4 - x > 0 \iff 4 > x$$

gelten; für den zu betrachtenden Flächeninhalt von Q ergibt sich damit

$$A(x) = x \cdot y = x \cdot \frac{4-x}{2+x} = \frac{4\,x - x^2}{2+x},$$

und es ist $x \in \,]0;4[$ mit dem größtmöglichen $A(x)$ zu bestimmen. Die Funktion

$$A : \,]0;4[\, \to \mathbb{R}, \quad A(x) = \frac{4\,x - x^2}{2 + x},$$

ist nun als gebrochenrationale Funktion differenzierbar, und für alle $x \in \,]0;4[$ gilt

$$\begin{aligned} A'(x) = \frac{(4 - 2\,x) \cdot (2 + x) - (4\,x - x^2) \cdot 1}{(2 + x)^2} &= \\ = \frac{(8 + 4\,x - 4\,x - 2\,x^2) - (4\,x - x^2)}{(2 + x)^2} &= -\frac{x^2 + 4\,x - 8}{(2 + x)^2} \end{aligned}$$

mit $(2 + x)^2 > 0$ und

$$\begin{aligned} x^2 + 4\,x - 8 = \big(x^2 + 4\,x + 4\big) - 12 &= \\ = (x + 2)^2 - (2\sqrt{3})^2 &= \underbrace{\Big(x + 2 - 2\sqrt{3}\Big)}_{=0 \iff x = 2\,(\sqrt{3} - 1)} \underbrace{\Big(x + 2 + 2\sqrt{3}\Big)}_{>0}; \end{aligned}$$

wegen $0 < 2\,(\sqrt{3} - 1) < 4$ ergibt sich folglich:

- für alle $x \in \big]0;\, 2\,(\sqrt{3} - 1)\big[$ ist $x + 2 - 2\sqrt{3} < 0$ und damit $A'(x) > 0$, so daß A auf $\big]0;\, 2\,(\sqrt{3} - 1)\big]$ streng monoton wächst;
- für alle $x \in \big]2\,(\sqrt{3} - 1);\, 4\big[$ ist $x + 2 - 2\sqrt{3} > 0$ und damit $A'(x) < 0$, so daß A auf $\big[2\,(\sqrt{3} - 1);\, 4\big[$ streng monoton fällt.

Damit besitzt A in $x = 2\,(\sqrt{3} - 1)$ ein isoliertes lokales Maximum, und der größtmögliche Flächeninhalt beträgt

$$\begin{aligned} A\Big(2\,(\sqrt{3} - 1)\Big) = \frac{4 \cdot 2\,(\sqrt{3} - 1) - (2\,(\sqrt{3} - 1))^2}{2 + 2\,(\sqrt{3} - 1)} &= \\ = \frac{8\,(\sqrt{3} - 1) - 4\,(3 - 2\,\sqrt{3} + 1)}{2\,\sqrt{3}} &= \frac{16\,\sqrt{3} - 24}{2\,\sqrt{3}} = 8 - 4\,\sqrt{3}. \end{aligned}$$

3.26 Die Funktion

$$f : \,]-1;\infty[\, \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (x + 1)^{-2},$$

ist (als gebrochen–rationale Funktion) differenzierbar mit

$$f'(x) = -2\,(x + 1)^{-3} \qquad \text{für alle} \quad x \in \,]-1;\infty[\,.$$

Für die Tangente t_a an den Graphen G_f von f im Punkt $x = a > 0$ gilt damit

$$\begin{aligned} y = t_a(x) &= f'(a) \cdot (x - a) + f(a) \\ &= -2\,(a + 1)^{-3} \cdot (x - a) + (a + 1)^{-2} \\ &= (a + 1)^{-3} \cdot \big(-2\,(x - a) + (a + 1)\big) \\ &= (a + 1)^{-3} \cdot \big(-2\,x + (3\,a + 1)\big); \end{aligned}$$

wegen

$$t_a(x) = 0 \iff (a+1)^{-3} \cdot \big(-2\,x + (3\,a+1)\big) = 0 \underset{a+1\neq 0}{\iff} x = \frac{1}{2}\,(3\,a+1)$$

ist $S_x = \big(\frac{1}{2}\,(3\,a+1)\,;0\big)$ der Schnittpunkt mit der x–Achse, und wegen

$$y = t_a(0) = (a+1)^{-3} \cdot \big(-2\cdot 0 + (3\,a+1)\big) = (a+1)^{-3}(3\,a+1)$$

ist $S_y = (0;(a+1)^{-3}(3\,a+1))$ der Schnittpunkt mit der y–Achse. Damit besitzt das von den beiden Koordinatenachsen und der Tangente t_A begrenzte (rechtwinklige) Dreieck den Flächeninhalt

$$A(a) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(3\,a+1)\cdot(a+1)^{-3}(3\,a+1) = \frac{1}{4}\cdot(3\,a+1)^2\cdot(a+1)^{-3}.$$

Die Funktion

$$A :]0;\infty[\to \mathbb{R}, \quad A(a) = \frac{1}{4}\cdot(3\,a+1)^2\cdot(a+1)^{-3},$$

ist (als gebrochen–rationale Funktion) differenzierbar, und für alle $a>0$ gilt

$$\begin{aligned} A'(a) &= \frac{1}{4}\cdot(2\,(3\,a+1)\cdot 3)\cdot(a+1)^{-3} + \frac{1}{4}\cdot(3\,a+1)^2\cdot\big((-3)\,(a+1)^{-4}\big) \\ &= \frac{3}{4}\,(3\,a+1)\,(a+1)^{-4}\cdot\big(2\,(a+1)-(3\,a+1)\big) \\ &= \frac{3}{4}\,(3\,a+1)\,(a+1)^{-4}\cdot(1-a); \end{aligned}$$

wegen

$$A'(a) = \underbrace{\frac{3}{4}\,(3\,a+1)\,(a+1)^{-4}}_{>0}\cdot\underbrace{(1-a)}_{>0}$$

für alle $a \in\,]0;1[$ ist A auf $]0;1]$ streng monoton wachsend, und wegen

$$A'(a) = \underbrace{\frac{3}{4}\,(3\,a+1)\,(a+1)^{-4}}_{>0}\cdot\underbrace{(1-a)}_{<0}$$

für alle $a \in\,]1;\infty[$ ist A auf $[1;\infty[$ streng monoton fallend. Folglich besitzt A an der Stelle $a=1$ eine globales Maximum, so daß sich als größtmöglicher Flächeninhalt

$$A(1) = \frac{1}{4}\cdot(3\cdot 1+1)^2\cdot(1+1)^{-3} = \frac{1}{4}\cdot 4^2\cdot 2^{-3} = \frac{1}{2}$$

ergibt.

3.27 Die gegebene Funktion

$$h :]-2;\infty[\to \mathbb{R}, \quad h(x) = (x-1)\cdot\ln(x+2),$$

besitzt wegen

$$\begin{aligned} h(x) = 0 \quad &\iff \quad (x-1)\cdot\ln(x+2) = 0 \\ &\iff \quad \big(x-1=0 \ \text{ oder } \ \ln(x+2)=0\big) \\ &\iff \quad \big(x-1=0 \ \text{ oder } \ x+2=1\big) \\ &\iff \quad \big(x=1 \ \text{ oder } \ x=-1\big) \end{aligned}$$

für alle $x \in\,]-2;\infty[$ genau zwei Nullstellen, nämlich $a = -1$ und $b = 1$; dabei verläuft der Graph G_h zwischen den beiden Nullstellen wegen

$$h(x) = \underbrace{(x-1)}_{<0} \cdot \underbrace{\ln \underbrace{(x+2)}_{>1}}_{>\ln 1 = 0} < 0$$

für alle $x \in\,]-1;1[$ unterhalb der x–Achse. Für den gesuchten Inhalt A der vom Graphen G_h und der x–Achse zwischen den beiden Nullstellen $a = -1$ und $b = 1$ eingeschlossenen Fläche gilt damit

$$\begin{aligned}
A &= \int_a^b (0 - h(x))\,dx = \int_{-1}^1 \underbrace{-(x-1)}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x+2)}_{v(x)}\,dx \\
&= \Bigg[\underbrace{-\frac{(x-1)^2}{2}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\ln(x+2)}_{v(x)}\Bigg]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \underbrace{-\frac{(x-1)^2}{2}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x+2}}_{v'(x)}\,dx \\
&= \left(-\frac{0^2}{2} \cdot \ln 3\right) - \left(-\frac{(-2)^2}{2} \cdot \ln 1\right) + \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{(x-1)^2}{x+2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{x^2 - 2x + 1}{x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{x\,(x+2) - 4\,(x+2) + 9}{x+2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \left(x - 4 + \frac{9}{x+2}\right) dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^2}{2} - 4x + 9\ln(x+2)\right]_{-1}^1 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{1^2}{2} - 4 + 9\ln 3\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 4 + 9\ln 1\right)\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} - 4 + 9\ln 3\right) - \left(\frac{1}{2} + 4\right)\right] = \frac{9}{2}\ln 3 - 4.
\end{aligned}$$

3.28 Gegeben ist die gebrochenrationale und damit insbesondere stetige Funktion

$$f : \,]-e, \infty[\, \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x-e}{x+e},$$

und wegen

$$f(x) = \frac{x-e}{x+e} = \frac{(x+e) - 2e}{x+e} = \frac{x+e}{x+e} + \frac{-2e}{x+e} = 1 - 2e \cdot \frac{1}{x+e}$$

für alle $x > -e$ ist etwa

$$F : \,]-e, \infty[\, \to \mathbb{R}, \quad F(x) = x - 2e \cdot \ln(x+e),$$

eine Stammfunktion von f. Die zu betrachtende Fläche, die vom Graphen G_f und der x–Achse zwischen den Geraden $x = 0$ und $x = 3e$ eingeschlossen wird, besitzt den Flächeninhalt

$$A = \int_0^{3e} |f(x)|\,dx,$$

wobei der Graph G_f wegen

$$f(x) = \frac{\overbrace{x-e}^{\leq 0}}{\underbrace{x+e}_{>0}} \leq 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in [0, e]$$

im Bereich $[0, e]$ auf und unterhalb der x–Achse sowie wegen

$$f(x) = \frac{\overbrace{x-e}^{\geq 0}}{\underbrace{x+e}_{>0}} \geq 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in [e, 3e]$$

im Bereich $[e, 3e]$ auf und oberhalb der x–Achse verläuft. Damit gilt

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{3e} |f(x)|\, dx = \int_0^e \underbrace{|f(x)|}_{=-f(x)} dx + \int_e^{3e} \underbrace{|f(x)|}_{=f(x)} dx = \\ &= -\int_0^e f(x)\, dx + \int_e^{3e} f(x)\, dx = -\big[F(x)\big]_0^e + \big[F(x)\big]_e^{3e} = \\ &= -\big(F(e) - F(0)\big) + \big(F(3e) - F(e)\big) = F(3e) - 2F(e) + F(0) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} F(3e) &= 3e - 2e \cdot \ln(3e + e) = 3e - 2e \cdot \ln(4e) \\ &= 3e - 2e \cdot (\ln 4 + \ln e) = 3e - 2e \cdot (2 \ln 2 + 1) = e - 4e \ln 2 \\ F(e) &= e - 2e \cdot \ln(e + e) = e - 2e \cdot \ln(2e) \\ &= e - 2e \cdot (\ln 2 + \ln e) = e - 2e \cdot (\ln 2 + 1) = -e - 2e \ln 2 \\ F(0) &= 0 - 2e \cdot \ln(0 + e) = -2e \cdot \ln e = -2e \cdot 1 = -2e, \end{aligned}$$

woraus sich insgesamt

$$\begin{aligned} A = F(3e) - 2F(e) + F(0) = \\ &= (e - 4e \ln 2) - 2 \cdot (-e - 2e \ln 2) + (-2e) = \\ &\qquad = e - 4e \ln 2 + 2e + 4e \ln 2 - 2e = e \end{aligned}$$

ergibt.

3.29 a) Die gegebene Menge

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \ \text{ und } \ e^x - 1 \leq y \leq e^{-x} + 1\right\}.$$

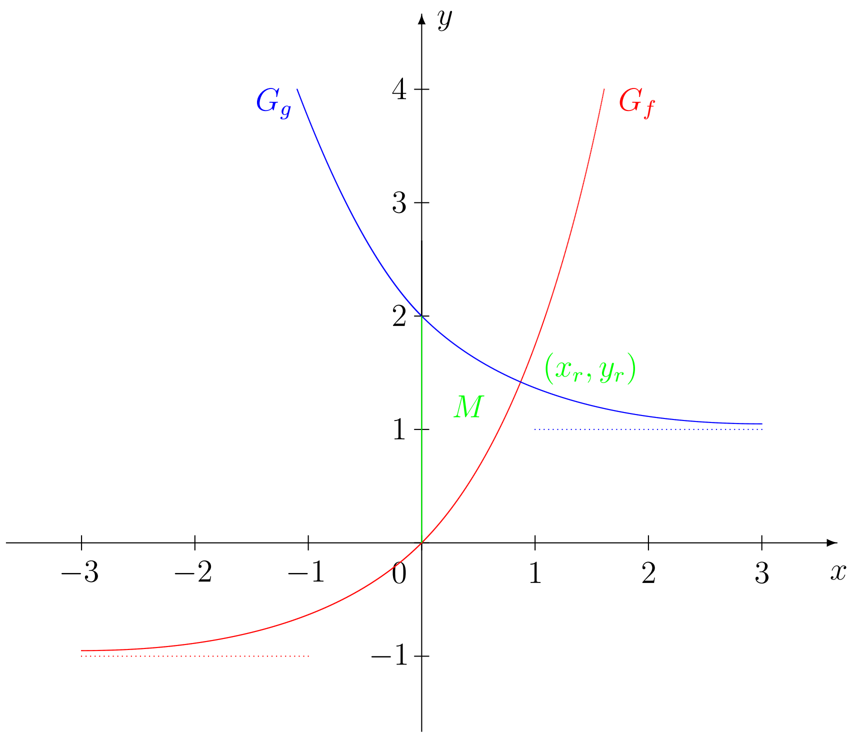
wird durch die y–Achse nach links sowie den Graphen G_f der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x - 1,$$

nach unten und den Graphen G_g der Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = e^{-x} + 1,$$

nach oben begrenzt.



Für den rechten Eckpunkt (x_r, y_r) von M gilt $f(x_r) = y_r$ und $g(x_r) = y_r$, also

$$e^{x_r} - 1 = f(x_r) = y_r = g(x_r) = e^{-x_r} + 1,$$

und mit der Substitution

$$z = e^{x_r} > 0 \qquad \text{und damit} \qquad e^{-x_r} = \frac{1}{e^{x_r}} = \frac{1}{z}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} & e^{x_r} - 1 = e^{-x_r} + 1 \iff z - 1 = \frac{1}{z} + 1 \iff z - 2 = \frac{1}{z} \iff \\ & \iff z^2 - 2\,z = 1 \iff z^2 - 2\,z + 1 = 2 \iff (z-1)^2 = 2 \underset{z-1>-1}{\iff} \\ & \iff z - 1 = \sqrt{2} \iff z = 1 + \sqrt{2} \iff x_r = \ln z = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

und damit

$$y_r = e^{x_r} - 1 = e^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} - 1 = \left(1 + \sqrt{2}\right) - 1 = \sqrt{2}.$$

b) Für den gesuchten Flächeninhalt A_M von M ergibt sich

$$\begin{aligned}
A_M &= \int_0^{x_r} (g(x) - f(x))\, dx = \int_0^{x_r} \Big(\big(e^{-x} + 1\big) - (e^x - 1) \Big)\, dx = \\
&= \int_0^{x_r} \big(e^{-x} - e^x + 2\big)\, dx = \Big[-e^{-x} - e^x + 2\,x \Big]_0^{x_r} = \\
&= \Bigg(- \underbrace{e^{-x_r}}_{\underset{\text{a)}}{=} e^{x_r} - 2} - e^{x_r} + 2\,x_r \Bigg) - \Bigg(-e^0 - e^0 + 2 \cdot 0 \Bigg) = \\
&= \Big(2 - 2\,e^{x_r} + 2\,x_r \Big) + 2 = 4 - 2\,e^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} + 2\,\ln\Big(1 + \sqrt{2}\Big) = \\
&= 4 - 2\Big(1 + \sqrt{2}\Big) + 2\,\ln\Big(1 + \sqrt{2}\Big) = 2 - 2\sqrt{2} + 2\,\ln\Big(1 + \sqrt{2}\Big).
\end{aligned}$$

3.30 Zu betrachten ist die Menge

$$F = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi \le x \le \pi \;\text{ und }\; \sin x \le y \le \cos x \Big\};$$

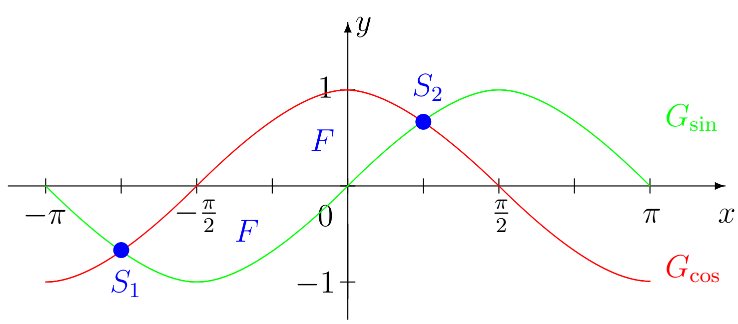
wegen

$$\cos x = \sin x \iff 1 = \tan x \iff x \in \Big\{ -\tfrac{3\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4} \Big\}$$

für alle $x \in [-\pi, \pi]$ besitzen die beiden Graphen $G_{\cos}$ und $G_{\sin}$ in diesem Bereich genau die beiden Schnittpunkte $S_1 = \left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ und $S_2 = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$, und wegen

$$\sin x \le \cos x \iff x \in \Big[-\tfrac{3\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4} \Big]$$

ist $F \subseteq \mathbb{R}^2$ genau der abgeschlossene Bereich, der von den Graphen $G_{\cos}$ und $G_{\sin}$ zwischen ihren Schnittpunkten S_1 und S_2 begrenzt wird:



Für den Flächeninhalt A_F der Menge F ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
A_F &= \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx = \Big[\sin x - (-\cos x) \Big]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \Bigg(\underbrace{\sin\frac{\pi}{4}}_{=\frac{1}{2}\sqrt{2}} + \underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{=\frac{1}{2}\sqrt{2}} \Bigg) - \Bigg(\underbrace{\sin\Big(-\frac{3\pi}{4}\Big)}_{=-\frac{1}{2}\sqrt{2}} + \underbrace{\cos\Big(-\frac{3\pi}{4}\Big)}_{=-\frac{1}{2}\sqrt{2}} \Bigg) \\
&= \sqrt{2} - \Big(-\sqrt{2}\Big) = 2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

3.31 Zu betrachten ist das Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$, das von dem Graphen G_f der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{6}\left(e + \frac{1}{e}\right) - \frac{1}{3}\cosh(3x),$$

und der x–Achse eingeschlossen wird; dabei ist der Cosinus hyperbolicus

$$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

und mit dem Sinus hyperbolicus

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

gilt bekanntlich

$$\cosh' x = \sinh x \quad \text{und} \quad \sinh' x = \cosh x \quad \text{sowie} \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

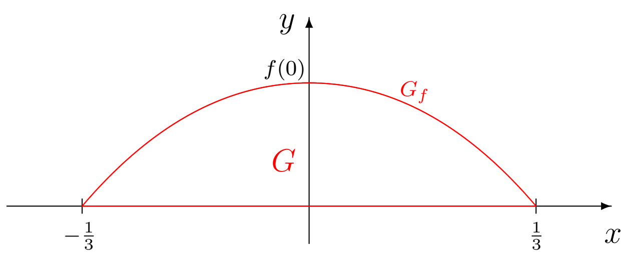
für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{e + e^{-1}}{2} - \frac{1}{3}\cosh(3x) = \frac{1}{3}\big(\cosh(1) - \cosh(3x)\big)$$

mit

$$f(x) = 0 \iff \cosh(3x) = \cosh(1) \iff 3x = \pm 1 \iff x = \pm\frac{1}{3}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ besitzt f genau die beiden Nullstellen $-\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{3}$, und für alle $x \in \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$ gilt $|3x| < 1$, also $\cosh(3x) < \cosh(1)$ und damit $f(x) > 0$; wir erhalten damit zur Veranschaulichung für $G \subseteq \mathbb{R}^2$ die folgende Skizze:



a) Für den Flächeninhalt A_G des Gebietes $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
A_G &= \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} f(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}\big(\cosh(1) - \cosh(3x)\big)dx \\
&= \frac{1}{3}\left[\cosh(1) \cdot x - \frac{\sinh(3x)}{3}\right]_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{9}\Big[\cosh(1) \cdot (3x) - \sinh(3x)\Big]_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{9}\Big[(\cosh(1) - \sinh(1)) - (-\cosh(1) - \underbrace{\sinh(-1)}_{=-\sinh(1)})\Big] \\
&= \frac{2}{9}(\cosh(1) - \sinh(1)) = \frac{2}{9}\left(\frac{e + e^{-1}}{2} - \frac{e - e^{-1}}{2}\right) = \frac{2}{9}e^{-1}.
\end{aligned}$$

b) Der Rand ∂G des Gebietes $G \subseteq \mathbb{R}^2$ setzt sich aus dem jeweils zwischen den beiden Nullstellen $-\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{3}$ gelegenen Teil (i) der x–Achse und (ii) des Graphen G_f zusammen:

- Bei (i) handelt es sich um eine Strecke der Länge
$$L_{(\mathrm{i})} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$
- Bei (ii) handelt es sich um die Bildmenge der Kurve
$$\varphi : \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = (t, f(t));$$
da f stetig differenzierbar mit
$$f'(x) = -\frac{1}{3}\big(\sinh(3x) \cdot 3\big) = -\sinh(3x)$$
für alle $x \in \mathbb{R}$ ist, ist auch die Kurve φ stetig differenzierbar, und für alle $t \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ besitzt der Tangentialvektor $\varphi'(t) = (1, f'(t))$ die Länge
$$\begin{aligned}\|\varphi'(t)\| &= \sqrt{1^2 + (f'(t))^2} = \sqrt{1 + (-\sinh(3t))^2} = \\ &= \sqrt{1 + \sinh^2(3t)} = \sqrt{\cosh^2(3t)} = |\cosh(3t)| = \cosh(3t).\end{aligned}$$
Damit ist die Kurve φ rektifizierbar, und für ihre Bogenlänge gilt
$$\begin{aligned}L_{(\mathrm{ii})} &= \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \|\varphi'(t)\|\, dt = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \cosh(3t)\, dt = \left[\frac{\sinh(3t)}{3}\right]_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} = \\ &= \frac{\sinh(1)}{3} - \frac{\sinh(-1)}{3} = \frac{2}{3}\sinh(1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{e - e^{-1}}{2} = \frac{e - e^{-1}}{3}.\end{aligned}$$

Für den Umfang L des Gebietes $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ergibt sich damit
$$L = L_{(\mathrm{i})} + L_{(\mathrm{ii})} = \frac{2}{3} + \frac{e - e^{-1}}{3} = \frac{2 + e - e^{-1}}{3}.$$

3.32 Die beiden gegebenen Funktionen
$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (\ln x)^2, \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \ln\left(x^2\right),$$
sind (als Kompositionen des natürlichen Logarithmus und einer quadratischen Funktion) stetig differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt
$$f'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}\ln x \qquad \text{und} \qquad g'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot (2\,x) = \frac{2}{x}.$$

a) Für einen Schnittpunkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ der Graphen G_f und G_g der beiden gegebenen Funktionen gilt
$$(\ln x)^2 = f(x) = y = g(x) = \ln\left(x^2\right) = 2\ln x$$
mit
$$\begin{aligned}(\ln x)^2 = 2\ln x &\iff (\ln x)^2 - 2\ln x = 0 \iff \ln x \cdot (\ln x - 2) = 0 \\ &\iff \big(\ln x = 0 \ \text{ oder } \ \ln x = 2\big) \iff \big(x = 1 \ \text{ oder } \ x = e^2\big);\end{aligned}$$
damit besitzen G_f und G_g genau zwei Schnittpunkte, nämlich $(1, 0)$ und $(e^2, 4)$; deren x–Koordinaten sind also $a = 1$ und $b = e^2$ mit $a < b$.

b) Für alle $x \in [a,b]$ gilt $1 \le x \le e^2$, woraus mit dem Monotonieverhalten des Logarithmus

$$0 = \ln 1 \le \ln x \le \ln e^2 = 2,$$

also

$$\ln x \le 2 \qquad \text{und} \qquad 0 \le \ln x,$$

woraus mit dem Monotoniegesetz der Multiplikation

$$f(x) = (\ln x)^2 = \ln x \cdot \ln x \le 2 \cdot \ln x = \ln\left(x^2\right) = g(x)$$

folgt. Damit ergibt sich für den Inhalt A der durch G_f und G_g zwischen a und b begrenzten Fläche

$$\begin{aligned}
A &= \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx = \int_a^b \underbrace{1}_{v'(x)} \cdot \underbrace{(g(x) - f(x))}_{u(x)}\, dx \\
&= \Big[\underbrace{x}_{v(x)} \cdot \underbrace{(g(x) - f(x))}_{u(x)}\Big]_a^b - \int_a^b \underbrace{x}_{v(x)} \cdot \underbrace{(g'(x) - f'(x))}_{u'(x)}\, dx \\
&= \Big[b \cdot \underbrace{(g(b) - f(b))}_{=0} - a \cdot \underbrace{(g(a) - f(a))}_{=0}\Big] - \int_a^b x \cdot (g'(x) - f'(x))\, dx \\
&= \int_a^b x\,(f'(x) - g'(x))\, dx.
\end{aligned}$$

c) Mit den bereits bestimmten Ableitungen f' und g' ergibt sich

$$\begin{aligned}
A &\underset{\text{b)}}{=} \int_a^b x\left(\frac{2}{x}\ln x - \frac{2}{x}\right) dx = \int_a^b \underbrace{2}_{v'(x)} \cdot \underbrace{(\ln x - 1)}_{u(x)}\, dx \\
&= \Big[\underbrace{2x}_{v(x)} \cdot \underbrace{(\ln x - 1)}_{u(x)}\Big]_a^b - \int_a^b \underbrace{2x}_{v(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)}\, dx \\
&= \Big[2x \cdot (\ln x - 1)\Big]_a^b - \int_a^b 2\, dx \\
&= \Big[2x \cdot (\ln x - 1)\Big]_a^b - \Big[2x\Big]_a^b = \Big[2x \cdot (\ln x - 2)\Big]_1^{e^2} = \\
&= 2e^2 \cdot \underbrace{(\ln e^2 - 2)}_{=2-2=0} - 2 \cdot \big(\underbrace{\ln 1}_{=0} - 2\big) = -2 \cdot (-2) = 4.
\end{aligned}$$

3.33 a) Mit Hilfe partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \underbrace{e^x}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{u(x)}\, dx &= \Big[\underbrace{e^x}_{v(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{u(x)}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{e^x}_{v(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{u'(x)}\, dx \\
&= \Big(e^\pi \cdot \underbrace{\sin \pi}_{=0} - e^0 \cdot \underbrace{\sin 0}_{=0}\Big) - \int_0^\pi e^x \cos x\, dx \\
&= -\int_0^\pi e^x \cos x\, dx.
\end{aligned}$$

b) Mit erneuter partieller Integration ergibt sich ferner

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi e^x \sin x\,dx &\underset{\text{a)}}{=} -\int_0^\pi \underbrace{e^x}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{u(x)}\,dx \\
&= -\left(\Big[\underbrace{e^x}_{v(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{u(x)}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{e^x}_{v(x)} \cdot \big(\underbrace{-\sin x}_{u'(x)}\big)\,dx\right) \\
&= -\left(\Big(e^\pi \cdot \underbrace{\cos\pi}_{=-1} - e^0 \cdot \underbrace{\cos 0}_{=1}\Big) + \int_0^\pi e^x \sin x\,dx\right) \\
&= -\big(-e^\pi - 1\big) - \int_0^\pi e^x \sin x\,dx,
\end{aligned}$$

woraus man

$$2 \cdot \int_0^\pi e^x \sin x\,dx = e^\pi + 1$$

und damit schließlich

$$\int_0^\pi e^x \sin x\,dx = \frac{1+e^\pi}{2}$$

erhält.

3.34 Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ergibt sich mit Hilfe partieller Integration

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^\pi (\sin x)^n\,dx = \int_0^\pi \underbrace{(\sin x)^{n-1}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{v'(x)}\,dx \\
&= \Big[\underbrace{(\sin x)^{n-1}}_{u(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{v(x)}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{(n-1)(\sin x)^{n-2} \cdot \cos x}_{u'(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{v(x)}\,dx \\
&= \Big((\sin\pi)^{n-1} \cdot (-\cos\pi) - (\sin 0)^{n-1} \cdot (-\cos 0)\Big) + \\
&\qquad + (n-1) \cdot \int_0^\pi (\sin x)^{n-2} \cdot (\cos x)^2\,dx \\
&= \Big(0^{n-1} \cdot 1 - 0^{n-1} \cdot (-1)\Big) + (n-1) \cdot \int_0^\pi (\sin x)^{n-2} \cdot \big(1 - (\sin x)^2\big)\,dx \\
&= (n-1) \cdot \int_0^\pi \big((\sin x)^{n-2} - (\sin x)^n\big)\,dx \\
&= (n-1) \cdot \left(\int_0^\pi (\sin x)^{n-2}\,dx - \int_0^\pi (\sin x)^n\,dx\right) \\
&= (n-1) \cdot (I_{n-2} - I_n) = (n-1) \cdot I_{n-2} - (n-1) \cdot I_n,
\end{aligned}$$

woraus sich

$$n \cdot I_n = (n-1) \cdot I_{n-2} \qquad \text{und damit} \qquad I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$$

ergibt.

3.35 Die zu betrachtenden bestimmten Integrale

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} \qquad \text{und} \qquad \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$$

besitzen unterschiedliche Integrationsgrenzen, wodurch die Anwendung der Substitutionsregel nahegelegt wird. Mit der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{1+t^2},$$

und der Substitution

$$g :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad g(u) = \frac{1}{u},$$

mit

$$g'(u) = -\frac{1}{u^2} \qquad \text{für alle} \qquad u \in]0, \infty[$$

erhält man

$$\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{g(1)}^{g(x)} f(t)\, dt = \int_1^x f(g(u)) \cdot g'(u)\, du =$$

$$= \int_1^x \frac{1}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = -\int_1^x \frac{1}{u^2+1}\, du = \int_x^1 \frac{du}{1+u^2}$$

und damit die zu zeigende Gleichheit

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Unter Verwendung der Stammfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von f ergibt sich damit

$$\Big[\arctan t\Big]_x^1 = \Big[\arctan t\Big]_1^{\frac{1}{x}},$$

also

$$\arctan 1 - \arctan x = \arctan \frac{1}{x} - \arctan 1,$$

woraus sich wegen $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ die Funktionalgleichung des Arcus tangens

$$\arctan \frac{1}{x} + \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

ergibt.

3.36 Die für einen Parameter $a > 0$ gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}},$$

ist (als Verknüpfung und Differenz von Potenzfunktionen und einer konstanten Funktion) differenzierbar, und für alle $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \frac{3}{2} \cdot \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right) = -\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{3}},$$

also

$$(f'(x))^2 = \left(-\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right) \cdot x^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{2}{3}} - 1,$$

und damit

$$\sqrt{1+(f'(x))^2} = \sqrt{1+\left(a^{\frac{2}{3}}\cdot x^{-\frac{2}{3}}-1\right)} = \sqrt{a^{\frac{2}{3}}\cdot x^{-\frac{2}{3}}} = a^{\frac{1}{3}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}.$$

Für alle $\varepsilon > 0$ ergibt sich demnach

$$\int_\varepsilon^a \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_\varepsilon^a \left(a^{\frac{1}{3}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}\right)dx = \left[a^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_\varepsilon^a =$$

$$= \left[\frac{3}{2}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}\right]_\varepsilon^a = \underbrace{\frac{3}{2}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}}_{=\frac{3}{2}\,a} - \frac{3}{2}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot \underbrace{\varepsilon^{\frac{2}{3}}}_{\to 0} \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} \frac{3}{2}\,a,$$

also

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^a \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \frac{3}{2}\,a.$$

3.37 Zu betrachten ist die reelle Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} x^2\,(1-2\ln|x|)\,, & \text{für } x\neq 0,\\ 0, & \text{für } x = 0;\end{cases}$$

wir stellen zunächst die Grenzwerte

$$(*)\qquad \lim_{x\to 0\pm} x\ln|x| = \lim_{x\to 0\pm}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{\underset{„\frac{\infty}{\infty}“}{=}} \lim_{x\to 0\pm}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0\pm}(-x) = 0$$

zur Verfügung, da diese im folgenden mehrfach verwendet werden.

a) Für den Differenzenquotienten von f im Punkt $x_0 = 0$ erhält man für alle $x\in\mathbb{R}$ mit $x\neq x_0$ zunächst

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2\,(1-2\ln|x|)-0}{x-0} = x\,(1-2\ln|x|) = x - 2\,x\ln|x|\,,$$

und mit dem oben ermittelten Grenzwert ergibt sich für den Differentialquotienten von f im Punkte $x_0 = 0$ dann

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0}\Big(\underbrace{x}_{\to 0} - 2\cdot\underbrace{x\ln|x|}_{\to 0}\Big) = 0;$$

folglich ist f im Punkt $x_0 = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

b) Die Funktion f ist in allen Punkten $x_0 \neq 0$ (als Produkt zweier differenzierbarer Funktionen) differenzierbar, und für alle $x\neq 0$ gilt gemäß der Produktregel

$$f'(x) = 2\,x\cdot(1-2\ln|x|) + x^2\cdot\frac{-2}{x} = 2\,x - 4\,x\ln|x| - 2\,x = -4\,x\ln|x|\,;$$

unter Berücksichtigung von a) ist also f eine differenzierbare Funktion mit

$$f'(x) = \begin{cases} -4\,x\ln|x|\,, & \text{für } x\neq 0,\\ 0, & \text{für } x = 0.\end{cases}$$

Folglich kommen für die lokalen Extrema von f nur die Nullstellen von f' in Frage; dies sind neben $x = 0$ wegen

$$-4\,x\ln|x| = 0 \underset{x\neq 0}{\Longleftrightarrow} \ln|x| = 0 \Longleftrightarrow |x| = 1 \qquad \text{für alle} \quad x \neq 0$$

ferner auch $x = -1$ und $x = 1$. Zur Ermittlung des Vorzeichens von $f'(x)$ außerhalb der Nullstellen betrachten wir die folgende Tabelle:

	$x \in\,]-\infty;-1[$	$x \in\,]-1;0[$	$x \in\,]0;1[$	$x \in\,]1;\infty[$
$-4\,x$	>0	>0	<0	<0
$\ln|x|$	>0	<0	<0	>0
$f'(x)$	>0	<0	>0	<0

Damit ist f auf $]-\infty;-1]$ und $[0;1]$ jeweils streng monoton steigend sowie auf $[-1;0]$ und $[1;\infty[$ jeweils streng monoton fallend; die Funktion f besitzt damit

- in $x = -1$ ein isoliertes lokales Maximum mit $f(-1) = 1$,
- in $x = 0$ ein isoliertes lokales Minimum mit $f(0) = 0$ und
- in $x = 1$ ein isoliertes lokales Maximum mit $f(1) = 1$.

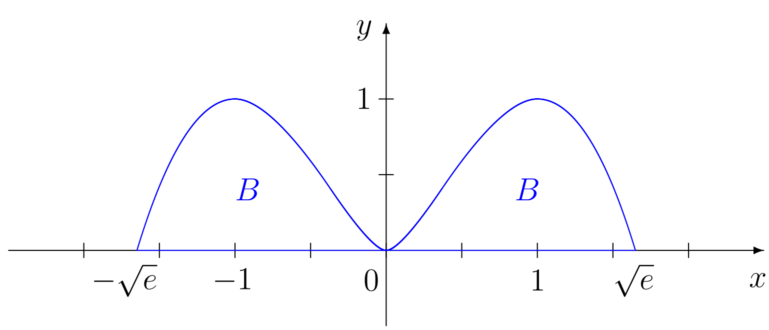
c) Der gegebene Bereich

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x)\right\}$$

besteht aus allen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, die sowohl (wegen $0 \leq y$) auf oder oberhalb der x–Achse als auch (wegen $y \leq f(x)$) auf oder unterhalb des Graphen G_f liegen; dabei besitzt f neben $x = 0$ wegen

$$x^2\,(1 - 2\ln|x|) = 0 \underset{x\neq 0}{\Longleftrightarrow} \ln|x| = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow |x| = \sqrt{e} \qquad \text{für alle} \quad x \neq 0$$

die beiden weiteren Nullstellen $x = -\sqrt{e}$ und $x = \sqrt{e}$. Damit ergibt sich im kartesischen (x,y)–Koordinatensystem unter Berücksichtigung der bisher erzielten Ergebnisse die folgende Skizze:



Der Flächeninhalt A des vom Graphen G_f und der x–Achse zwischen den beiden Nullstellen $x = -\sqrt{e}$ und $x = \sqrt{e}$ begrenzten Bereichs B entspricht genau dem bestimmten Integral

$$A = \int_{-\sqrt{e}}^{\sqrt{e}} f(x)\,dx;$$

wegen

$$f(-x) = (-x)^2\,(1 - 2\ln|-x|) = x^2\,(1 - 2\ln|x|) = f(x)$$

für alle $x \neq 0$ ist die Funktion f gerade, ihr Graph G_f also symmetrisch zur y–Achse, und damit ergibt sich

$$A = \int_{-\sqrt{e}}^{\sqrt{e}} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{e}} f(x)\,dx.$$

Mit Hilfe partieller Integration erhält man

$$\int \underbrace{x^2}_{u'(x)} \cdot \underbrace{(1 - 2\ln|x|)}_{v(x)}\,dx = \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{u(x)} \cdot \underbrace{(1 - 2\ln|x|)}_{v(x)} - \int \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{2}{x}\right)}_{v'(x)}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot (1 - 2\ln|x|) + \int \frac{2\,x^2}{3}\,dx = \frac{x^3}{3}\,(1 - 2\ln|x|) + \frac{2\,x^3}{9} + C$$

für jedes Intervall, welches den Nullpunkt nicht enthält, für alle $a > 0$ damit

$$\int_a^{\sqrt{e}} f(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\,(1 - 2\ln|x|) + \frac{2\,x^3}{9}\right]_a^{\sqrt{e}} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{e}^3}{3}\,\underbrace{\left(1 - 2\,\ln\left|\sqrt{e}\right|\right)}_{=1-2\cdot\frac{1}{2}=0} + \frac{2\,\sqrt{e}^3}{9}\right) - \left(\frac{a^3}{3}\,(1 - 2\ln|a|) + \frac{2\,a^3}{9}\right) =$$

$$= \frac{2\,e\,\sqrt{e}}{9} - \left(\underbrace{\frac{5\,a^3}{9}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{2\,a^2}{3}}_{\to 0} \cdot \underbrace{a\ln|a|}_{\to 0}\right) \xrightarrow[a\to 0+]{} \frac{2\,e\,\sqrt{e}}{9}$$

und schließlich

$$A = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{e}} f(x)\,dx = 2 \cdot \lim_{a\to 0+} \int_a^{\sqrt{e}} f(x)\,dx = 2 \cdot \frac{2\,e\,\sqrt{e}}{9} = \frac{4\,e\,\sqrt{e}}{9}.$$

3.38 Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^{2010} - x - 1,$$

ist (als Polynomfunktion) stetig und differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = 2010 \cdot x^{2009} - 1 = 2010 \cdot \left(x^{2009} - \frac{1}{2010}\right);$$

dabei gilt

$$f'(a) = 0 \iff a^{2009} = \frac{1}{2010} \iff a = \frac{1}{\sqrt[2009]{2010}}.$$

Wegen $f'(x) < 0$ für alle $x < a$ ist f auf $]-\infty; a]$ streng monoton fallend, und wegen $f'(x) > 0$ für alle $x > a$ ist f auf $[a; \infty[$ streng monoton steigend; insbesondere besitzt f auf $]-\infty; a]$ und auf $[a; \infty[$ jeweils höchstens eine Nullstelle, insgesamt also höchstens zwei reelle Nullstellen.

Wegen $f(-1) = 1 > 0$ und $f(0) = -1 < 0$ und $f(2) = 2^{2010} - 3 > 0$ besitzt die stetige Funktion f gemäß dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle $\xi_1 \in \,]-1; 0[$ und mindestens eine Nullstelle $\xi_2 \in \,]0; 2[$, insgesamt also mindestens zwei reelle Nullstellen.

Folglich besitzt die Funktion f genau zwei verschiedene Nullstellen in $\mathbb{R}$.

3.39 Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2}{2} - x + \sin x$$

besitzt zunächst wegen

$$f(0) = \frac{0^2}{2} - 0 + \sin 0 = 0 - 0 + 0 = 0$$

die offensichtliche Nullstelle $a = 0$; es bleibt also zu zeigen, daß f keine weiteren Nullstellen besitzen kann. Dabei ist f (als Summe einer quadratischen Funktion und des Sinus) stetig und beliebig oft differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = x - 1 + \cos x \qquad \text{und} \qquad f''(x) = 1 - \sin x.$$

Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\sin x \neq 1$ und damit $(f')'(x) = f''(x) = 1 - \sin x > 0$ für alle $x \in \left]\frac{\pi}{2} + k\,\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$, so daß f' auf $\left[\frac{\pi}{2} + k\,\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right]$, streng monoton wächst; folglich ist f' eine auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsende Funktion, die zudem wegen

$$f'(0) = 0 - 1 + \cos 0 = 0 - 1 + 1 = 0$$

ebenfalls in $a = 0$ eine Nullstelle besitzt; damit erhält man:

- für alle $x < 0$ gilt $f'(x) < f'(0) = 0$, so daß f auf $\mathbb{R}_0^-$ streng monoton fällt, woraus sich $f(x) > f(0) = 0$ für alle $x < 0$ ergibt;
- für alle $x > 0$ gilt $f'(x) > f'(0) = 0$, so daß f auf $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton wächst, woraus sich $f(x) > f(0) = 0$ für alle $x > 0$ ergibt.

Somit ist $f(x) \neq 0$ für alle $x \neq 0$ und folglich $a = 0$ die einzige Nullstelle von f.

3.40 a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x - x,$$

ist (als Differenz des Sinus und der Identität) stetig und differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = \cos x - 1$$

mit

$$f'(x) = 0 \iff \cos x - 1 = 0 \iff \cos x = 1 \iff x \in 2\pi \cdot \mathbb{Z};$$

damit besitzt f' unendlich viele Nullstellen, nämlich $x_k = 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

b) Wegen

$$f'(x) = \underbrace{\cos x}_{\leq 1} - 1 \leq 1 - 1 = 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

ist die Funktion f zunächst monoton fallend. Zum Nachweis der strengen Monotonie seien $x', x'' \in \mathbb{R}$ mit $x' < x''$; ferner sei $k \in \mathbb{Z}$ mit $x_k \leq x' < x_{k+1}$. Da x_k und x_{k+1} zwei aufeinanderfolgende Nullstellen von f' sind, gilt

$$f'(x) = \underbrace{\cos x}_{<1} - 1 < 1 - 1 = 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in \,]x_k, x_{k+1}[\,,$$

so daß die stetige Funktion f auf $[x_k, x_{k+1}]$ sogar streng monoton fallend ist; wir treffen nun bezüglich der Lage von x'' die folgende Fallunterscheidung:

- Ist $x'' \leq x_{k+1}$, so folgt aus $x_k \leq x' < x'' \leq x_{k+1}$ wegen der strengen Monotonie von f auf $[x_k, x_{k+1}]$ direkt $f(x') > f(x'')$.
- Ist $x_{k+1} < x''$, so ergibt sich aufgrund der Monotonie von f zum einen $f(x_{k+1}) \geq f(x'')$; aus $x_k \leq x' < x_{k+1}$ folgt wegen der strengen Monotonie von f auf $[x_k, x_{k+1}]$ zum anderen $f(x') > f(x_{k+1})$, insgesamt also $f(x') > f(x'')$.

Damit ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton fallend.

c) Wegen

$$f(0) = \sin 0 - 0 = 0 - 0 = 0$$

besitzt f die Nullstelle 0; da f gemäß b) streng monoton fallend ist, gilt $f(x) > 0$ für alle $x < 0$ und $f(x) < 0$ für alle $x > 0$, so daß f keine weitere Nullstelle besitzen kann. Es ist $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ein abgeschlossenes Intervall der Länge π, das die eindeutig bestimmte Nullstelle 0 enthält.

3.41 Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp(x^3) + \arctan(x) + x^2 - 2$$

ist als Summe und Komposition von Polynomfunktionen, der Exponentialfunktion und des Arcus tangens selbst stetig und (beliebig oft) differenzierbar; ferner ist

$$f(0) = \exp(0^3) + \arctan 0 + 0^2 - 2 = 1 + 0 + 0 - 2 = -1 < 0.$$

Wegen

$$f(x) = \underbrace{\exp(x^3)}_{\to 0} + \underbrace{\arctan(x)}_{\to -\frac{\pi}{2}} + \underbrace{x^2}_{\to +\infty} - 2 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

gibt es ein $a < 0$ mit $f(a) > 0$, und die stetige Funktion f besitzt nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle $\xi_1 \in \,]a; 0[$; wegen

$$f(x) = \underbrace{\exp(x^3)}_{\to +\infty} + \underbrace{\arctan(x)}_{\to \frac{\pi}{2}} + \underbrace{x^2}_{\to +\infty} - 2 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

gibt es ein $b > 0$ mit $f(b) > 0$, und die stetige Funktion f besitzt nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle $\xi_2 \in \,]0; b[$. Insgesamt besitzt also f mindestens zwei Nullstellen, nämlich $\xi_1 < 0$ und $\xi_2 > 0$, und folglich nach dem Satz von Rolle eine Nullstelle $\xi \in \,]\xi_1; \xi_2[$ der Ableitung.

3.42 a) Die gegebene Funktion

$$f :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x} + \ln x,$$

ist als Summe einer gebrochen–rationalen Funktion und des Logarithmus stetig und differenzierbar, und für alle $x > 0$ gilt

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2};$$

damit ergibt sich:

- für alle $x \in]0, 1[$ ist $x - 1 < 0$ und damit $f'(x) < 0$, so daß die stetige Funktion f auf dem Intervall $]0, 1]$ streng monoton fällt;
- für alle $x \in]1, \infty[$ ist $x - 1 > 0$ und damit $f'(x) > 0$, so daß die stetige Funktion f auf dem Intervall $[1, \infty[$ streng monoton wächst.

Damit besitzt f genau ein Extremum, nämlich ein globales Minimum bei $x = 1$; wegen $f(1) = \frac{1}{1} + \ln 1 = 1 + 0 = 1$ ist $W_f \subseteq [1, \infty[$, insbesondere also $W_f \neq \mathbb{R}$, so daß f nicht surjektiv ist.
Wir zeigen im folgenden, daß $y = 2$ zwei verschiedene Urbilder besitzt:

- für $a = e^{-2} < 1$ gilt

$$f(a) = \frac{1}{e^{-2}} + \ln e^{-2} = e^2 - 2 > 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2 > 1 = f(1),$$

also $f(a) > 2 > f(1)$, so daß es für die stetige Funktion f nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi_1 \in]a, 1[$ mit $f(\xi_1) = 2$ gibt;
- für $b = e^2 > 1$ gilt

$$f(b) = \frac{1}{e^2} + \ln e^2 = e^{-2} + 2 > 0 + 2 = 2 > 1 = f(1),$$

also $f(1) < 2 < f(b)$, so daß es für die stetige Funktion f nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi_2 \in]1, b[$ mit $f(\xi_2) = 2$ gibt.

Damit ist $\xi_1, \xi_2 \in]0, \infty[$ mit $\xi_1 < 1 < \xi_2$, also $\xi_1 \neq \xi_2$, und $f(\xi_1) = 2 = f(\xi_2)$, so daß f nicht injektiv ist.

b) Die gegebene Funktion

$$g :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad g(x) = e^x \cdot \ln x,$$

ist als Produkt der Exponentialfunktion und des Logarithmus stetig und differenzierbar, und für alle $x > 0$ gilt

$$g'(x) = e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} = e^x \cdot \left(\ln x + \frac{1}{x}\right) = \underbrace{e^x}_{>0} \cdot \underbrace{f(x)}_{\geq 1 > 0} > 0;$$

damit ist g auf dem Intervall $]0, \infty[$ streng monoton wachsend, insbesondere also injektiv. Zum Nachweis der Surjektivität von g sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig: wegen

$$\lim_{x \to 0+} g(x) = \lim_{x \to 0+} \Big(\underbrace{e^x}_{\to e^0 = 1} \cdot \underbrace{\ln x}_{\to -\infty} \Big) = -\infty$$

existiert ein $c \in]0,1[$ mit $g(c) < y$, und wegen

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \big(\underbrace{e^x}_{\to\infty} \cdot \underbrace{\ln x}_{\to\infty}\big) = \infty$$

existiert ein $d \in]1,\infty[$ mit $g(d) > y$; damit gibt es für die stetige Funktion g nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in]c,d[$ mit $g(\xi) = y$. Folglich ist g auch surjektiv, insgesamt also bijektiv.

3.43 Die gegebene Funktion

$$f :]0,\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = x \cdot (2x - 1 + \ln x),$$

ist als Summe und Produkt linearer Funktionen und des Logarithmus beliebig oft stetig differenzierbar, und für alle $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot (2x - 1 + \ln x) + x \cdot \left(2 + \frac{1}{x}\right) \\ &= (2x - 1 + \ln x) + (2x + 1) = 4x + \ln x \end{aligned}$$

und

$$f''(x) = 4 + \frac{1}{x}.$$

a) Gemäß obiger Überlegung ist f insbesondere zweimal differenzierbar; damit ist ihre Ableitung $g = f' :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ differenzierbar, und wegen

$$g'(x) = f''(x) = 4 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{>0} > 4 > 0$$

für alle $x > 0$ ist g auf dem Intervall $]0,\infty[$ streng monoton wachsend.

b) Gemäß a) ist die Funktion $g = f' :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, so daß sie auf $]0,\infty[$ höchstens eine Nullstelle besitzt. Zum Nachweis ihrer Existenz betrachten wir den Funktionswert

$$g(1) = f'(1) = 4 \cdot 1 + \ln 1 = 4 + 0 = 4 > 0,$$

und wegen

$$g(x) = f'(x) = \underbrace{4x}_{\to 0+} + \underbrace{\ln x}_{\to -\infty} \underset{x\to 0+}{\longrightarrow} -\infty$$

gibt es eine Stelle $a \in]0,1[$ mit $g(a) < 0$, so daß die stetige Funktion g auf dem Intervall $]a,1[\subseteq]0,\infty[$ nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle ξ besitzt. Damit hat g mit ξ genau eine Nullstelle in $]0,\infty[$.

c) Die Funktion $g = f' :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ ist gemäß a) streng monoton wachsend und besitzt gemäß b) genau eine Nullstelle ξ. Damit gilt:

- Für alle $x \in]0,\xi[$ gilt $f'(x) < f'(\xi) = 0$, so daß die stetige Funktion f auf dem Intervall $]0,\xi]$ streng monoton fallend ist.
- Für alle $x \in]\xi,\infty[$ ist $f'(x) > f'(\xi) = 0$, so daß die stetige Funktion f auf dem Intervall $[\xi,\infty[$ streng monoton wachsend ist.

Damit besitzt f auf $]0, \infty[$ genau ein lokales Extremum, nämlich in ξ ein (isoliertes) lokales Minimum.

3.44 a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (1 - x) \cdot e^x,$$

ist (als Produkt einer linearen Funktion und der Exponentialfunktion) differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = (-1) \cdot e^x + (1 - x) \cdot e^x = -x \cdot e^x.$$

Wegen

$$f'(x) = \underbrace{-x}_{>0} \cdot \underbrace{e^x}_{>0} > 0$$

für alle $x < 0$ ist f auf $\mathbb{R}_0^-$ streng monoton steigend, und wegen

$$f'(x) = \underbrace{-x}_{<0} \cdot \underbrace{e^x}_{>0} > 0$$

für alle $x > 0$ ist f auf $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton fallend; damit besitzt f genau ein Extremum, nämlich ein globales Maximum bei

$$x = 0 \quad \text{mit} \quad f(0) = (1 - 0) \cdot e^0 = 1, \qquad \text{also} \qquad H(0; 1).$$

Des weiteren gilt

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \big(\underbrace{(1 - x)}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty} \big) = -\infty$$

sowie unter Verwendung der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \big((1 - x) \cdot e^x \big) =$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - x}{e^{-x}} \overset{\text{L'H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{-e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$

b) Gemäß a) besitzt f im Punkte 0 das globale Maximum, es gilt also

$$f(x) \leq f(0) \qquad \text{bzw.} \qquad (1 - x) \cdot e^x \leq 1 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Für alle $x < 1$ ist $1 - x > 0$, so daß sich nach dem Monotoniegesetz der Multiplikation

$$e^x \leq \frac{1}{1 - x}$$

ergibt, und für alle $x > 1$ ist $1 - x < 0$, so daß sich nach dem Inversionsgesetz

$$e^x \geq \frac{1}{1 - x}$$

ergibt; für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 1$ gilt folglich

$$e^x \leq \frac{1}{1 - x} \iff x < 1.$$

3.45 a) Zum Nachweis der Ungleichung

$$\ln(x) < x - 1 \qquad \text{für alle} \qquad x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

bieten sich verschiedene Möglichkeiten an:

- Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln x - (x-1)\,,$$

ist (als Differenz des Logarithmus und einer linearen Funktion) stetig und differenzierbar mit $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$; damit gilt:
  - für alle $x \in \,]0,1[$ ist $\frac{1}{x} > 1$, also $f'(x) > 0$, so daß die stetige Funktion f auf $]0,1]$ streng monoton wächst, es ist also $f(x) < f(1)$ für alle $x \in \,]0,1[$;
  - für alle $x \in \,]1,+\infty[$ ist $\frac{1}{x} < 1$, also $f'(x) < 0$, so daß die stetige Funktion f auf $[1,+\infty[$ streng monoton fällt, es ist also $f(x) < f(1)$ für alle $x \in \,]1,+\infty[$.

  Für alle $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ gilt demnach

$$\ln x - (x-1) = f(x) < f(1) = \ln 1 - (1-1) = 0$$

  und folglich $\ln x < x - 1$.

- Die Logarithmusfunktion $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar, genügt also insbesondere auf jedem abgeschlossenen Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}^+$ den Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung:
  - für $x \in \,]1,+\infty[$ gibt es also ein $\xi \in \,]1,x[$ mit

$$\ln x - \ln 1 = \ln'(\xi) \cdot (x-1)\,, \quad \text{also} \quad \ln x = \frac{1}{\xi} \cdot (x-1)\,,$$

    und wegen $\xi > 1$ ist $\frac{1}{\xi} < 1$, woraus wegen $x - 1 > 0$ nach dem Monotoniegesetz der Multiplikation $\frac{1}{\xi} \cdot (x-1) < x - 1$ folgt;
  - für $x \in \,]0,1[$ gibt es also ein $\xi \in \,]0,1[$ mit

$$\ln x - \ln 1 = \ln'(\xi) \cdot (x-1)\,, \quad \text{also} \quad \ln x = \frac{1}{\xi} \cdot (x-1)\,,$$

    und wegen $0 < \xi < 1$ ist $\frac{1}{\xi} > 1$, woraus wegen $x - 1 < 0$ nach dem Inversionsgesetz $\frac{1}{\xi} \cdot (x-1) < x - 1$ folgt.

  Für alle $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ gilt demnach

$$\ln x = \frac{1}{\xi} \cdot (x-1) < x - 1.$$

- Die Logarithmusfunktion $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist beliebig oft differenzierbar mit $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ und $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$ für alle $x > 0$, also $\ln'(1) = 1$; für das erste Taylorpolynom T_1 von ln mit dem Entwicklungspunkt $a = 1$ ergibt sich damit

$$T_1(x) = \ln 1 + \ln'(1) \cdot (x-1) = x - 1 \qquad \text{für alle} \qquad x \in \mathbb{R}^+.$$

Nach der Taylorformel gilt $\ln(x) = T_1(x) + R_2(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$, wobei es zu jedem $x \in \mathbb{R}^+$ gemäß der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes ein ξ zwischen dem Entwicklungspunkt $a = 1$ und x mit

$$R_2(x) = \frac{\ln''(\xi)}{2!} \cdot (x-1)^2 = -\frac{1}{2\xi^2} \cdot (x-1)^2$$

gibt; für $x \neq 1$ ist $(x-1)^2 > 0$, und wir erhalten

$$\ln x = T_1(x) + R_2(x) = (x-1) + \underbrace{\left(-\frac{1}{2\xi^2}\right)}_{<0} \cdot \underbrace{(x-1)^2}_{>0} < x - 1.$$

b) Auch für den Nachweis der Ungleichung

$$x^e < e^x \qquad \text{für alle} \qquad x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$$

bieten sich verschiedene Möglichkeiten an:

- Für alle

  $$x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{e\} \qquad \text{ist} \qquad \frac{x}{e} \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},$$

  und gemäß a) gilt

  $$\ln\frac{x}{e} < \frac{x}{e} - 1, \qquad \text{also} \qquad \ln x - \ln e < \frac{x}{e} - 1;$$

  es folgt zunächst wegen $\ln e = 1$ mit dem Monotoniegesetz der Addition $\ln x < \frac{x}{e}$ und dann wegen $e > 0$ mit dem Monotoniegesetz der Multiplikation $e \cdot \ln x < x$, woraus sich im Hinblick auf das Monotonieverhalten der Exponentialfunktion

  $$x^e = \exp(e \cdot \ln x) < \exp(x) = e^x$$

  ergibt.

- Die Funktion

  $$h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x^e \cdot e^{-x},$$

  ist (als Produkt einer Potenz– und einer Exponentialfunktion) stetig und differenzierbar mit

  $$h'(x) = e\,x^{e-1} \cdot e^{-x} + x^e \cdot (-e^{-x}) = x^{e-1}\,e^{-x}\,(e-x)$$

  für alle $x \in \mathbb{R}^+$; damit gilt:

  – für alle $x \in \,]0, e[$ ist $e - x > 0$, also $h'(x) > 0$, so daß die stetige Funktion h auf $]0, e]$ streng monoton wächst, es ist also $h(x) < h(e)$ für alle $x \in \,]0, e[$;

  – für alle $x \in \,]e, +\infty[$ ist $e - x < 0$, also $h'(x) < 0$, so daß die stetige Funktion h auf $[e, +\infty[$ streng monoton fällt, es ist also $h(x) < h(e)$ für alle $x \in \,]e, +\infty[$.

  Für alle $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$ gilt demnach

  $$x^e \cdot e^{-x} = h(x) < h(e) = e^e \cdot e^{-e} = 1,$$

  wegen $e^x > 0$ folglich $x^e < e^x$.

3.46 a) Die in Abhängigkeit von $c > 0$ gegebene Funktion

$$f_c :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f_c(x) = c\,x - \ln x,$$

ist (als Differenz einer linearen Funktion und des Logarithmus) stetig und differenzierbar mit

$$f_c'(x) = c - \frac{1}{x} \qquad \text{für alle} \qquad x > 0.$$

Als Extremstellen der auf der offenen Menge $]0, \infty[$ definierten und differenzierbaren Funktion f_c kommen nur die Nullstellen ihrer Ableitung f_c' in Frage, wegen

$$f_c'(x) = 0 \iff \frac{1}{x} = c \iff x = \frac{1}{c} \qquad \text{für alle} \quad x > 0$$

also lediglich der Punkt $\frac{1}{c}$; dabei gilt:

- für alle $x \in \left]0, \frac{1}{c}\right[$ gilt $0 < x < \frac{1}{c}$, also

  $$\frac{1}{x} > c \qquad \text{und damit} \qquad f_c'(x) = c - \frac{1}{x} < 0,$$

  so daß die stetige Funktion f_c auf $\left]0, \frac{1}{c}\right]$ streng monoton fällt: es ist also

  $$f_c(x) > f_c\left(\tfrac{1}{c}\right) \qquad \text{für alle} \quad x \in \left]0, \tfrac{1}{c}\right[.$$

- für alle $x \in \left]\frac{1}{c}, \infty\right[$ gilt $0 < \frac{1}{c} < x$, also

  $$\frac{1}{x} < c \qquad \text{und damit} \qquad f_c'(x) = c - \frac{1}{x} > 0,$$

  so daß die stetige Funktion f_c auf $\left[\frac{1}{c}, \infty\right[$ streng monoton steigt: es ist also

  $$f_c(x) > f_c\left(\tfrac{1}{c}\right) \qquad \text{für alle} \quad x \in \left]\tfrac{1}{c}, \infty\right[.$$

Zusammenfassend erhält man

$$f_c(x) > f_c\left(\tfrac{1}{c}\right) = c \cdot \tfrac{1}{c} - \ln \tfrac{1}{c} = 1 + \ln c \qquad \text{für alle} \quad x \in]0, \infty[\setminus \left\{\tfrac{1}{c}\right\};$$

damit besitzt f_c genau eine absolute Extremstelle, nämlich ein absolutes Minimum im Punkt $\frac{1}{c}$.

b) Die Lösungen $x > 0$ der in Abhängigkeit von $c > 0$ gegebenen Gleichung

$$c\,x = \ln x \iff c\,x - \ln x = 0 \iff f_c(x) = 0$$

stimmen genau mit den Nullstellen der Funktion f_c überein; dadurch wird gemäß a) die folgende Fallunterscheidung motiviert:

- Im Falle $c > \frac{1}{e}$ gilt $\ln c > \ln \frac{1}{e} = -1$ und damit

  $$f_c(x) \geq f_c\left(\tfrac{1}{c}\right) = 1 + \ln c > 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in]0, \infty[;$$

  folglich ist f_c ohne Nullstelle.

- Im Falle $c = \frac{1}{e}$ gilt $\ln c = \ln \frac{1}{e} = -1$ und damit
$$f_c(x) > f_c\left(\tfrac{1}{c}\right) = 1 + \ln c = 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in \left]0, \infty\right[\setminus \left\{\tfrac{1}{c}\right\};$$
folglich besitzt f_c genau eine Nullstelle, nämlich $\frac{1}{c}$.
- Im Falle $c < \frac{1}{e}$ gilt $\ln c < \ln \frac{1}{e} = -1$ und damit
$$f_c(\tfrac{1}{c}) = 1 + \ln c < 0;$$
es ergibt sich:
  - wegen
$$\lim_{x\to 0+} f_c(x) = \lim_{x\to 0+} \Big(\underbrace{c\,x}_{\to 0} - \underbrace{\ln x}_{\to -\infty}\Big) = +\infty$$
gibt es zum einen ein $a \in \left]0, \frac{1}{c}\right[$ mit $f_c(a) > 0$, und nach dem Nullstellensatz existiert für die stetige Einschränkung $f_c|_{[a,\frac{1}{c}]}$ ein $\xi_1 \in \left]a, \frac{1}{c}\right[$ mit $f_c(\xi_1) = 0$;
  - wegen
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{„\frac{\infty}{\infty}“}{\overset{\text{L'H}}{=\!=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$
mit
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f_c(x) = \lim_{x\to\infty} \Big(\underbrace{c\,x}_{\underset{c>0}{\to}+\infty} - \underbrace{\ln x}_{\to+\infty}\Big) &= \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(\underbrace{x}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{\left(c - \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}\right)}_{\to c>0}\right) = +\infty\end{aligned}$$
gibt es zum anderen ein $b \in \left]\frac{1}{c}, \infty\right[$ mit $f_c(b) > 0$, und nach dem Nullstellensatz existiert für die stetige Einschränkung $f_c|_{[\frac{1}{c},b]}$ ein $\xi_2 \in \left]\frac{1}{c}, b\right[$ mit $f_c(\xi_2) = 0$.

  Folglich besitzt f_c die beiden Nullstellen ξ_1 und ξ_2 mit $\xi_1 < \frac{1}{c} < \xi_2$.

Zusammenfassend erhält man, daß die gegebene Gleichung $c\,x = \ln x$ genau dann eine eindeutige Lösung $x > 0$ besitzt, wenn $c = \frac{1}{e}$ gilt.

3.47 Die Lösungen der zu betrachtenden Gleichung
$$\frac{1}{x-a} + \frac{2}{x-b} + \frac{3}{x-c} = 0$$
entsprechen genau den Nullstellen der Funktion
$$f : \mathbb{R} \setminus \{a,\, b,\, c\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{2}{x-b} + \frac{3}{x-c};$$
diese ist zunächst als gebrochenrationale Funktion stetig. Wegen
$$f(x) = \frac{1}{\underbrace{x-a}_{\to+\infty}} + \frac{2}{\underbrace{x-b}_{\to\frac{2}{a-b}}} + \frac{3}{\underbrace{x-c}_{\to\frac{3}{a-c}}} \quad \underset{x\to a+}{\longrightarrow} \quad +\infty$$

gibt es ein $\alpha \in \,]a;b[$ mit $f(\alpha) > 0$, und wegen

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{x-a}}_{\to \frac{1}{b-a}} + \underbrace{\frac{2}{x-b}}_{\to -\infty} + \underbrace{\frac{3}{x-c}}_{\to \frac{3}{b-c}} \quad \underset{x \to b-}{\longrightarrow} \quad -\infty$$

gibt es ein $\beta \in \,]\alpha;b[$ mit $f(\beta) < 0$; damit existiert aber nach dem Nullstellensatz ein $\xi \in \,]\alpha;\beta[\, \subseteq \,]a;b[$ mit $f(\xi) = 0$. Die entsprechende Argumentation liefert dann auch ein $\zeta \in \,]b;c[$ mit $f(\zeta) = 0$.

3.48 Für a, $b \in \,]0,1[$ ist die Gleichung

$$(*) \qquad a^x + b^x = 1$$

zu betrachten; für alle $x \in \,]0,\infty[$ gilt

$$a^x + b^x = 1 \iff a^x + b^x - 1 = 0,$$

so daß die Lösungen der Gleichung $(*)$ mit den Nullstellen der Funktion

$$f : \,]0,\infty[\, \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a^x + b^x - 1,$$

übereinstimmen.

Wegen a, $b \in \,]0,1[$ fallen die Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$ und $x \mapsto b^x$ streng monoton; damit ist auch f streng monoton fallend, besitzt also insbesondere höchstens eine Nullstelle.

Ferner ist f als Summe zweier Exponentialfunktionen und einer konstanten Funktion stetig, und wegen $0 < a < 1$ und $0 < b < 1$ gilt

$$f(x) = \underbrace{a^x}_{\to a^0 = 1} + \underbrace{b^x}_{\to b^0 = 1} -1 \underset{x \to 0+}{\longrightarrow} 1$$

und

$$f(x) = \underbrace{a^x}_{\to 0} + \underbrace{b^x}_{\to 0} -1 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -1;$$

damit gibt es ein $\alpha < 1$ mit $f(\alpha) > 0$ und ein $\beta > 1$ mit $f(\beta) < 0$, so daß f nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle in $]\alpha,\beta[\, \subseteq \,]0,\infty[$ besitzt.

Damit hat f genau eine Nullstelle, so daß die Gleichung $(*)$ eine eindeutig bestimmte Lösung in $]0,\infty[$ besitzt.

3.49 a) Die gegebene Funktion

$$h : \,]0;\infty[\, \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1},$$

ist (als Summe und Komposition des natürlichen Logarithmus und gebrochenrationaler Funktionen) stetig und (beliebig oft) differenzierbar, und für alle $x \in \,]0;\infty[$ gilt

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} - \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) = \frac{-1}{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-(x+1) + x}{x(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)^2} < 0; \end{aligned}$$

damit ist h streng monoton fallend. Ferner gilt (wegen der Stetigkeit der Logarithmusfunktion an der Stelle 1)

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\ln\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\to 1+0=1}}_{\to \ln 1=0} - \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\to 0}\right) = 0,$$

so daß sich insgesamt $h(x) > 0$ für alle $]0;\infty[$ ergibt.

b) Für die gegebene Funktion

$$f :]0;\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x,$$

ergibt sich gemäß der Definition der allgemeinen Potenz $a^b = e^{b\ln a}$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}$ dann

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

und folglich unter Verwendung von Ketten– und Produktregel

$$f'(x) = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \cdot \left(1\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\cdot\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right) =$$

$$= e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \cdot \underbrace{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)}_{=h(x)} = \underbrace{e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}_{>0} \cdot \underbrace{h(x)}_{\substack{>0\\ \text{a)}}} > 0$$

für alle $x \in]0;\infty[$; folglich ist die Funktion f streng monoton steigend. Unter Verwendung der Regel von de l'Hospital ergibt sich ferner

$$\lim_{x\to 0+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{„\frac{\infty}{\infty}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 0$$

sowie

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1,$$

woraus mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^0 = 1$$

sowie

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^1 = e$$

folgt; damit erhält man (unter Verwendung der strengen Monotonie von f) zunächst $W_f \subseteq]1;e[$. Zum Nachweis von „$\supseteq$“ sei $y \in]1;e[$;

- wegen $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$ gibt es ein $0 < a < 1$ mit $f(a) < y$, und
- wegen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = e$ gibt es ein $b > 1$ mit $y < f(b)$,

so daß für die (als Verknüpfung stetiger Funktionen selbst) stetige Funktion f nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in \left]a; b\right[$ mit $f(\xi) = y$ existiert. Damit ist $y = f(\xi) \in W_f$ und $W_f = \left]1; e\right[$.

3.50 a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \arctan x + \frac{1}{1+x^2}.$$

ist (als Summe des Arcus tangens und einer gebrochenrationalen Funktion) stetig und (beliebig oft) differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1+x^2}{\left(1+x^2\right)^2} - \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{(1-x)^2}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Wegen $f'(x) > 0$ für alle $x \neq 1$ ist die stetige Funktion f damit auf $\left]-\infty; 1\right]$ und $\left[1; \infty\right[$ jeweils streng monoton wachsend; folglich ist f auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und damit insbesondere umkehrbar. Folglich gilt

$$f(x_0) < \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \Bigg(\underbrace{\arctan x}_{\to\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\underbrace{1+x^2}_{\to 0}} \Bigg) = \frac{\pi}{2}$$

und

$$f(x_0) > \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \Bigg(\underbrace{\arctan x}_{\to-\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\underbrace{1+x^2}_{\to 0}} \Bigg) = -\frac{\pi}{2}$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ und damit zunächst $W_f \subseteq \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Zum Nachweis von „$\supseteq$“ sei $y \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$;

- wegen $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$ gibt es ein $a < 0$ mit $f(a) < y$, und
- wegen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ gibt es ein $b > 0$ mit $y < f(b)$, und

so daß es nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = y$ gibt, woraus $y \in W_f$ folgt. Insgesamt ergibt sich also $W_f = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Da f eine streng monoton wachsende und auf einem Intervall, nämlich $\mathbb{R}$, definierte Funktion ist, ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ auf jeden Fall stetig. Da f differenzierbar ist mit $f'(b) \neq 0$ für alle $b \neq 1$, ist f^{-1} in allen Punkten $a = f(b) \neq f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ differenzierbar; die Annahme, f^{-1} sei auch in $a = f(1)$ differenzierbar, führt in

$$1 = (\mathrm{id}_{\mathbb{R}})'(1) = \left(f^{-1} \circ f\right)'(1) = \left(f^{-1}\right)'(f(1)) \cdot f'(1) = 0$$

zum Widerspruch.

3.51 a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2+1},$$

ist als gebrochenrationale Funktion beliebig oft differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt nach der Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{3\,x^2 \cdot (x^2+1) - x^3 \cdot 2\,x}{(x^2+1)^2} = \frac{(3\,x^4 + 3\,x^2) - 2\,x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3\,x^2}{(x^2+1)^2};$$

wegen

$$f'(x) = \frac{\overbrace{x^2}^{>0} \cdot \overbrace{(x^2+3)}^{>0}}{\underbrace{(x^2+1)^2}_{>0}} > 0 \qquad \text{für alle} \quad x \neq 0$$

ist f als stetige Funktion zum einen auf $]-\infty, 0]$ und zum anderen auf $[0, \infty[$ streng monoton wachsend, ingesamt also eine auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsende Funktion.

b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gemäß a) streng monoton wachsend und besitzt daher insbesondere eine Umkehrfunktion $g = f^{-1} : W_f \to \mathbb{R}$, wobei W_f den Wertebereich von f bezeichne; da f zudem auf einem Intervall definiert ist, ist die Umkehrfunktion g auf jeden Fall stetig.

Darüber hinaus ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und die Umkehrfunktion $g : W_f \to \mathbb{R}$ ist damit an genau denjenigen Stellen $b = f(a) \in W_f$ mit $f'(a) \neq 0$ differenzierbar, wegen

$$f'(a) = 0 \iff \frac{a^2 \cdot (a^2+3)}{(a^2+1)^2} = 0 \underset{a^2+3>0}{\iff} a^2 = 0 \iff a = 0$$

genau im Falle $a \neq 0$. Folglich besitzt f genau für $a \neq 0$ lokal eine differenzierbare Umkehrfunktion.

c) Für $a = 1$ gilt

$$f(a) = f(1) = \frac{1^3}{1^2+1} = \frac{1}{2} \quad \text{mit} \quad f'(a) = f'(1) = \frac{1^4 + 3 \cdot 1^2}{(1^2+1)^2} = \frac{4}{2^2} = 1,$$

so daß sich für $b = f(a) = \frac{1}{2}$ gemäß der Ableitungsregel für die Umkehrfunktion

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1} = 1,$$

ergibt.

3.52 Die zu betrachtende Funktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = |x| \cdot g(x) = \begin{cases} x \cdot g(x), & \text{für } x > 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \\ -x \cdot g(x), & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

ist (wegen der vorausgesetzten Differenzierbarkeit von g) nach der Produktregel zunächst in allen Punkten $a \neq 0$ differenzierbar mit

$$h'(a) = \begin{cases} g(a) + a \cdot g'(a), & \text{für } a > 0, \\ -g(a) - a \cdot g'(a), & \text{für } a < 0; \end{cases}$$

mit der Stetigkeit von g (im Punkte $a = 0$) ergibt sich

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{|x| \cdot g(x) - 0}{x - 0} = \underbrace{\frac{|x|}{x}}_{=\pm 1} \cdot \underbrace{g(x)}_{\to g(0)=0} \xrightarrow[x \to 0]{} 0,$$

so daß h auch im Punkt $a = 0$ differenzierbar ist mit $h'(0) = 0$. Die Ableitungsfunktion $h' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist zunächst aufgrund der Stetigkeit von g und g' in allen Punkten $a \neq 0$ stetig; ferner gilt mit der Stetigkeit von g und g' im Punkte $a = 0$ auch

$$h'(x) = \underbrace{g(x)}_{\to g(0)=0} + \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\to g'(0)} \xrightarrow[x \to 0+]{} 0 = h'(0)$$

sowie entsprechend

$$h'(x) = -\underbrace{g(x)}_{\to g(0)=0} - \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\to g'(0)} \xrightarrow[x \to 0-]{} 0 = h'(0),$$

weswegen h' auch im Punkte $a = 0$ stetig ist. Insgesamt ist also h eine stetig differenzierbare Funktion.

3.53 a) Wir weisen nach, daß die gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ an jeder Stelle $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist und die Ableitung $f'(a) = 0$ besitzt. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq a$ gilt nach Voraussetzung

$$|f(x) - f(a)| \leq |x - a|^2$$

und damit für den Differenzenquotienten

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| = \frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} \leq \frac{|x - a|^2}{|x - a|} = |x - a| \xrightarrow[x \to a]{} 0,$$

so daß sich für den Differentialquotienten

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$$

ergibt.

b) Wir weisen nach, daß für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ stets $f(a) = f(b)$ gilt; damit ist f eine konstante Funktion. Die Einschränkung $f|_{[a,b]} : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar und erfüllt damit insbesondere die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung; damit gibt es ein $\xi \in \,]a, b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \underset{\text{gemäß a)}}{=} 0, \qquad \text{also} \qquad f(a) = f(b).$$

3.54 a) Die Aussage ist wahr: seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei monoton fallende Funktionen; für alle $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 \leq x_2$ gilt also $f(x_1) \geq f(x_2)$ und $g(x_1) \geq g(x_2)$, nach dem Monotoniegesetz der Addition damit

$$f(x_1) + g(x_1) \geq f(x_2) + g(x_1) \quad \text{und} \quad f(x_2) + g(x_1) \geq f(x_2) + g(x_2),$$

zusammen also

$$(f + g)(x_1) = f(x_1) + g(x_1) \geq f(x_2) + g(x_2) = (f + g)(x_2),$$

und damit ist auch die Funktion $f + g$ monoton fallend.

b) Die Aussage ist falsch: die beiden Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -x, \qquad \text{und} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = -2x,$$

sind monoton fallend, für alle $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 \leq x_2$ gilt nämlich

$$f(x_1) = -x_1 \geq -x_2 = f(x_2) \qquad \text{und} \qquad g(x_1) = -2x_1 \geq -2x_2 = g(x_2).$$

Die Differenzfunktion

$$f - g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x) = (-x) - (-2x) = x,$$

ist jedoch streng monoton wachsend, insbesondere nicht monoton fallend.

c) Die Aussage ist wahr: seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei monoton fallende Funktionen; für alle $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 \leq x_2$ gilt damit wegen des Monotonieverhaltens von g zum einen

$$y_1 = g(x_1) \geq g(x_2) = y_2$$

und wegen des Monotonieverhaltens von f zum anderen

$$(f \circ g)(x_1) = f(g(x_1)) = f(y_1) \leq f(y_2) = f(g(x_2)) = (f \circ g)(x_2);$$

folglich ist die Funktion $f \circ g$ monoton wachsend.

3.55 Wir betrachten die (als Differenz der beiden als stetig vorausgesetzten Funktionen f und g selbst) stetige Hilfsfunktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) - g(x).$$

- Für alle $x < 0$ gilt, da f monoton wächst, schon $f(x) \leq f(0)$, und damit

$$h(x) = f(x) - g(x) \leq f(0) - \underbrace{g(x)}_{\to +\infty} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty;$$

  insbesondere gilt $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$, und es gibt ein $a < 0$ mit $h(a) < 0$.

- Für alle $x > 0$ gilt, da g monoton fällt, schon $g(x) \leq g(0)$, und damit

$$h(x) = f(x) - g(x) \geq \underbrace{f(x)}_{\to +\infty} - g(0) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty;$$

  insbesondere gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$, und es gibt ein $b > 0$ mit $h(b) > 0$.

Damit ist die Einschränkung von h auf das abgeschlossene Intervall $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $h(a) \cdot h(b) < 0$; folglich gibt es nach dem Nullstellensatz ein $\xi \in [a;b]$ mit

$$h(\xi) = 0, \quad \text{also} \quad f(\xi) - g(\xi) = 0 \quad \text{bzw.} \quad f(\xi) = g(\xi).$$

Folglich ist $(\xi; f(\xi)) = (\xi; g(\xi))$ ein gemeinsamer Punkt auf den Graphen G_f und G_g.

3.56 Die beiden auf dem abgeschlossenen Intervall $[-1,1]$ definierten und als stetig vorausgesetzten Funktionen $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ und $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ besitzen nach dem Satz von Weierstraß jeweils ein globales Maximum, es gibt also $p, q \in [-1,1]$ mit $f(x) \leq f(p)$ und $g(x) \leq g(q)$ für alle $x \in [-1,1]$; damit gilt

$$f(p) = \sup\{f(x) \mid -1 \leq x \leq 1\} = \sup\{g(x) \mid -1 \leq x \leq 1\} = g(q).$$

Für $p = q$ wählen wir $x_0 = p \in [-1,1]$, und es gilt $f(x_0) = f(p) = g(q) = g(x_0)$. Für $p \neq q$ können wir (aufgrund der bezüglich f und g symmetrischen Problemstellung) schon $p < q$ annehmen und betrachten die Hilfsfunktion

$$h : [p,q] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) - g(x).$$

Damit ist h als Differenz der stetigen Funktionen f und g selbst stetig mit

$$\begin{aligned} h(p) = f(p) - g(p) &\underset{g(p) \leq g(q)}{\geq} f(p) - g(q) = 0, \\ h(q) = f(q) - g(q) &\underset{f(q) \leq f(p)}{\leq} f(p) - g(q) = 0, \end{aligned}$$

und nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $x_0 \in [p,q] \subseteq [-1,1]$ mit $h(x_0) = 0$, also $f(x_0) = g(x_0)$.

3.57 a) Es ist eine nach oben wie nach unten beschränkte und stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu betrachten, so daß für ihre Ableitung $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Grenzwert

$$(*) \qquad c = \lim_{x \to \infty} f'(x)$$

existiert; zum Nachweis von $c = 0$ nehmen wir zum Widerspruch $c \neq 0$ an:

- Im Falle $c > 0$ gibt es wegen $(*)$ ein $a \in \mathbb{R}$ mit $f'(\xi) > \frac{c}{2}$ für alle $\xi > a$; für alle $x > a$ existiert nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\xi \in \,]a, x[$ mit

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi) \underset{\text{wegen } \xi > a}{>} \frac{c}{2},$$

woraus wegen $x - a > 0$ dann

$$f(x) - f(a) > \frac{c}{2} \cdot (x - a)$$

folgt. Wir erhalten

$$f(x) > f(a) + \underbrace{\frac{c}{2}}_{>0} \cdot \underbrace{(x-a)}_{\to +\infty} \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

so daß f nicht nach oben beschränkt sein kann, im Widerspruch zur Voraussetzung.

- Im Falle $c < 0$ gibt es wegen $(*)$ ein $a \in \mathbb{R}$ mit $f'(\xi) < \frac{c}{2}$ für alle $\xi > a$; für alle $x > a$ existiert nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\xi \in]a, x[$ mit

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi) \underset{\text{wegen } \xi > a}{<} \frac{c}{2},$$

woraus wegen $x - a > 0$ dann

$$f(x) - f(a) < \frac{c}{2} \cdot (x - a)$$

folgt. Wir erhalten

$$f(x) < f(a) + \underbrace{\frac{c}{2}}_{<0} \cdot \underbrace{(x - a)}_{\to +\infty} \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} -\infty,$$

so daß f nicht nach unten beschränkt sein kann, im Widerspruch zur Voraussetzung.

b) Die Aussage ist falsch: als Gegenbeispiel betrachte man für $a = 1$ die Einschränkung des natürlichen Logarithmus

$$f : [1, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln x;$$

damit ist f stetig differenzierbar mit

$$\lim_{x \to \infty} f'(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

aber f ist wegen

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \ln x = +\infty$$

nicht (nach oben) beschränkt.

3.58 Wir betrachten die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) > c > 0 \qquad \text{für alle} \qquad x \in \mathbb{R}$$

existiert. Zum Nachweis, daß jede Stammfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von f bijektiv ist, zeigen wir zum einen die Injektivität und zum anderen die Surjektivität von F:

- Als Stammfunktion von f ist F differenzierbar mit

$$F'(x) = f(x) > c > 0 \qquad \text{für alle} \qquad x \in \mathbb{R};$$

damit ist F streng monoton wachsend, insbesondere also injektiv.

- Sei $y \in \mathbb{R}$; als differenzierbare Funktion genügt F auf jedem abgeschlossenen Intervall von $\mathbb{R}$ den Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, und damit gilt:

- für jedes $x > 0$ gibt es ein $\xi_1 \in \,]0, x[$ mit

$$F(x) - F(0) = F'(\xi_1) \cdot (x - 0) = \underbrace{f(\xi_1)}_{>c} \cdot x \underset{\text{da } x>0}{>} c \cdot x,$$

  und wegen $c > 0$ gilt damit

$$F(x) > F(0) + c \cdot x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty;$$

  damit gibt es aber ein $b > 0$ mit $F(b) \geq y$.

- für jedes $x < 0$ gibt es ein $\xi_2 \in \,]x, 0[$ mit

$$F(x) - F(0) = F'(\xi_2) \cdot (x - 0) = \underbrace{f(\xi_2)}_{>c} \cdot x \underset{\text{da } x<0}{<} c \cdot x,$$

  und wegen $c > 0$ gilt damit

$$F(x) < F(0) + c \cdot x \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty;$$

  damit gibt es aber ein $a < 0$ mit $F(a) \leq y$.

Als differenzierbare Funktion ist F insbesondere stetig, so daß es wegen $F(a) \leq y \leq F(b)$ nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a, b]$ mit $F(\xi) = y$ gibt; folglich ist F surjektiv.