Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Differential– und Integralrechnung 2 — Lösungsvorschlag —

2.1 Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3x}{x^2+2} \right)^k,$$

zu betrachten. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist damit $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Partialsummen

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3x}{x^2+2} \right)^k = \sum_{k=0}^{n} q^k \qquad \text{für} \qquad q = \frac{3x}{x^2+2},$$

also die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \qquad \text{für} \qquad q = \frac{3x}{x^2+2};$$

diese konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ ist, wegen

$$\begin{aligned} |q| < 1 \iff \left| \frac{3x}{x^2+2} \right| < 1 \iff \frac{3|x|}{x^2+2} < 1 \underset{x^2+2>0}{\iff} \\ \iff 3|x| < x^2 + 2 \iff 0 < |x|^2 - 3|x| + 2 \iff \\ \iff 0 < (|x|-1)(|x|-2) \iff \big(|x| < 1 \text{ oder } |x| > 2 \big) \end{aligned}$$

also genau für

$$x \in D = \,]-\infty, -2[\, \cup \,]-1, 1[\, \cup \,]2, \infty[\,,$$

und in diesem Fall gilt gemäß der Summenformel für geometrische Reihen

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1 - \frac{3x}{x^2+2}} = \frac{x^2+2}{x^2-3x+2}.$$

2.2 a) Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ handelt es sich bei der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x+3}{(x-3)^k}$ um eine geometrische Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} c\, q^k \qquad \text{mit} \quad c = x+3 \quad \text{und} \quad q = \frac{1}{x-3};$$

diese konvergiert aber genau für $c = 0$ oder $|q| < 1$ und besitzt dann die Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c\, q^k = \frac{c}{1-q}.$$

Wegen

$$|q| < 1 \iff \frac{1}{|x-3|} < 1 \iff 1 < |x-3| \iff x < 2 \text{ oder } x > 4$$

konvergiert also die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x+3}{(x-3)^k}$ genau für alle

$$x \in \left]-\infty; 2\right[\cup \left]4; \infty\right[= \mathbb{R} \setminus [2;4]\,,$$

und für die Summe der Reihe gilt dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x+3}{(x-3)^k} = \frac{x+3}{1-\frac{1}{x-3}} = \frac{(x+3)\,(x-3)}{(x-3)-1} = \frac{x^2-9}{x-4}.$$

b) Wir nehmen zum Widerspruch an, die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k}\right)$$

sei konvergent; da die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ bekanntlich konvergiert, müßte dann auch die Differenz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

konvergieren; diese ist allerdings als harmonische Reihe divergent.

2.3 a) Es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{-n}}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{1-(n+1)}}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 3^{-(n+1)}}{(n+1)!} =$$

$$= 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{-(n+1)}}{(n+1)!} = 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)!} = 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}{n!} =$$

$$= 3 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}{n!} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{0}}{0!}\right) = 3 \left(\exp(\tfrac{1}{3}) - 1\right) = 3 \left(\sqrt[3]{e} - 1\right);$$

dabei geht die Konvergenz der Exponentialreihe an der Stelle $x = \frac{1}{3}$ ein.

b) Zu betrachten ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \dfrac{(x-1)^n}{n \cdot 2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{(x-1)^n}{n \cdot 2^n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{|x-1|^n}{n \cdot 2^n}} = \frac{|x-1|}{\sqrt[n]{n} \cdot 2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{|x-1|}{2}$$

ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Wurzelkriterium

- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{|x-1|}{2} < 1$ (absolut) konvergent, wegen

$$\frac{|x-1|}{2} < 1 \iff |x-1| < 2 \iff$$
$$\iff -2 < x-1 < 2 \iff -1 < x < 3$$

  also für $x \in]-1,3[$, sowie
- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{|x-1|}{2} > 1$ divergent, wegen

$$\frac{|x-1|}{2} > 1 \iff |x-1| > 2 \iff$$
$$\iff \big(x-1 < -2 \text{ oder } 2 < x-1\big) \iff \big(x < -1 \text{ oder } 3 < x\big)$$

  also für $x \in]-\infty,-1[\cup]3,\infty[$.

Es sind noch die Fälle $x = -1$ und $x = 3$ zu untersuchen:

- Für $x = -1$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

  als alternierende harmonische Reihe (nach dem Leibnizschen Kriterium) konvergent, und
- für $x = 3$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

  als harmonische Reihe divergent.

Insgesamt konvergiert also die gegebene Reihe genau für alle $x \in [-1,3[$.

2.4 a) Zu betrachten ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \dfrac{3^{n^2}}{2^{n^3}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; wegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{3^{n^2}}{2^{n^3}}} = \frac{\sqrt[n]{3^{n^2}}}{\sqrt[n]{2^{n^3}}} = \frac{3^n}{2^{n^2}} = \Bigg(\underbrace{\frac{3}{2^n}}_{\to 0}\Bigg)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Wurzelkriterium (absolut) konvergent.

b) Zu betrachten ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \dfrac{(-2)^n}{\sqrt{n^2+n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; wegen

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-2)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^2+(n+1)}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}}{(-2)^n}\right| =$$
$$= \left|(-2) \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2+3n+2}}\right| = 2 \cdot \sqrt{\frac{n^2+n}{n^2+3n+2}} =$$
$$= 2 \cdot \sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2 \cdot \sqrt{\frac{1+0}{1+0+0}} = 2 > 1$$

ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium divergent.

2.5 a) Wir verwenden, daß die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c\, q^n$ genau dann konvergiert, wenn $c = 0$ oder $|q| < 1$ ist. Zunächst gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{2^n}{3^n + 4^n} \right| = \frac{2^n}{3^n + 4^n} \leq \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3} \right)^n ;$$

damit besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + 4^n}$ die konvergente Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n$ und ist folglich nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent. Ferner gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{4^n}{2^n + 3^n} \geq \frac{4^n}{3^n + 3^n} = \frac{4^n}{2 \cdot 3^n} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \right)^n ;$$

damit besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2^n + 3^n}$ die divergente Minorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \right)^n$ und ist folglich nach dem Minorantenkriterium selbst divergent.

b) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{k\,(k+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{k\,(k+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(k+2) - k}{k\,(k+2)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right),$$

weswegen sich für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ für die n–te Partialsumme s_n der gegebenen Reihe

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+2)} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

ergibt; wegen

$$s_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\to 0} \right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

konvergiert die gegebene Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+2)}$ mit dem Grenzwert $\frac{3}{4}$.

2.6 a) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \quad \text{also} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{n^2}{2^n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N},$$

läßt sich wahlweise mit den Quotientenkriterium oder dem Wurzelkriterium auf Konvergenz untersuchen; sie ist nämlich zum einen wegen

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2}\right| = \frac{(n+1)^2}{2 \cdot n^2} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

nach dem Quotientenkriterium sowie wegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{n^2}{2^n}\right|} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

nach dem Wurzelkriterium absolut konvergent.

b) Für die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n, \quad \text{also} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \;\; \text{mit} \;\; a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \;\; \text{für alle} \;\; n \in \mathbb{N},$$

gilt

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e};$$

damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Reihenglieder keine Nullfolge, insbesondere also die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht konvergent.

c) Für die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^4}\right), \quad \text{also} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \;\; \text{mit} \;\; a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^4} \;\; \text{für alle} \;\; n \in \mathbb{N},$$

gilt unter Verwendung der Gaußschen Summenformel

$$|a_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^4}\right| = \frac{1}{n^4} \cdot \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^4} \cdot \frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{1}{n^3} \cdot \underbrace{\frac{n+1}{2}}_{\le \frac{n+n}{2} = n} \le \frac{1}{n^2};$$

damit besitzt die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ die (bekanntlich konvergente) Majorante $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und ist folglich nach dem Majorantenkriterium absolut konvergent.

2.7 Bei der gegebenen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$$

handelt es sich wegen

$$\frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n} = \frac{(n+1)^{n-1}}{((-1)\cdot n)^n} = (-1)^n \cdot \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

um die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wir greifen im folgenden auf die wohlbekannte Tatsache zurück, daß die Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist und gegen die eulersche Zahl e konvergiert.

a) Wegen

$$\begin{aligned} a_n = \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} &= \frac{n+1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n} = \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \cdot e = 0 \end{aligned}$$

ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge; wegen

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+2)^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n-1}} = \frac{((n+2)\cdot n)^n}{(n+1)^{2n}} = \\ &= \frac{((n+2)\cdot n)^n}{((n+1)^2)^n} = \left(\frac{(n+2)\cdot n}{(n+1)^2}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{n^2+2\,n}{n^2+2\,n+1}\right)}_{\le 1}^n \le 1^n = 1, \end{aligned}$$

mit $a_n > 0$ also $a_{n+1} \le a_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend. Damit konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, a_n$ nach dem Leibnizkriterium.

b) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\underbrace{|(-1)^n|}_{=1} \cdot \underbrace{|a_n|}_{=a_n>0} \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

besitzt wegen

$$a_n \underset{\text{a)}}{=} \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\ge \frac{1}{n+n}=\frac{1}{2n}} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\ge\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=2} \ge \frac{1}{2n} \cdot 2 = \frac{1}{n} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

die (bekanntlich divergente) harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ als Minorante und ist folglich nach dem Minorantenkriterium selbst divergent. Damit ist die gegebene Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, a_n$ nicht absolut konvergent.

2.8 Wir betrachten neben der gegebenen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{\ln n}{n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

die sie interpolierende Funktion

$$f : [1; \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\ln x}{x};$$

es ist also $a_n = f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Die Funktion f ist (als Quotient des natürlichen Logarithmus und einer linearen Funktion) differenzierbar, und für alle $x \geq 1$ gilt

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Für alle $x > e$ ist $\ln x > \ln e = 1$ und damit $f'(x) < 0$, so daß f auf dem Intervall $]e; \infty[$ streng monoton fällt; damit folgt insbesondere

$$a_n = f(n) > f(n+1) = a_{n+1} \qquad \text{für alle } \; n \in \mathbb{N} \; \text{ mit } \; n \geq 3.$$

b) Mit Hilfe der Regel von de l'Hospital erhält man den Funktionengrenzwert

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

insbesondere ergibt sich der Folgengrenzwert

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} f(n) = 0;$$

mit der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist auch jede ihrer Teilfolgen $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

c) Die Folge $(a_n)_{n \geq 3}$ ist gemäß a) (streng) monoton fallend und gemäß b) eine Nullfolge, so daß die alternierende Reihe $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n a_n$ nach dem Leibnizkriterium konvergiert; damit ist aber auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent.

d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ gilt $\ln n \geq \ln 3 > 1$ und damit

$$\left| (-1)^n \cdot \frac{\ln n}{n} \right| = \left| \frac{\ln n}{n} \right| = \frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n};$$

folglich besitzt die Reihe $\sum_{n=3}^{\infty} \left| (-1)^n \cdot \frac{\ln n}{n} \right|$ die (bekanntlich divergente) Minorante $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ und ist damit nach dem Minorantenkriterium selbst divergent. Da demnach auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \cdot \frac{\ln n}{n} \right|$ divergiert, ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\ln n}{n}$ nicht absolut konvergent.

2.9 Zu betrachten ist die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$ und den Koeffizienten

$$c_n = \frac{\cos\frac{1}{n}}{n} \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N};$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $0 < \frac{1}{n} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$, also $\cos\frac{1}{n} > 0$ und damit $c_n > 0$. Mit der Stetigkeit des Cosinus an der Stelle 0 ergibt sich

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{\cos\frac{1}{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{\cos\frac{1}{n}} = \frac{\cos\frac{1}{n+1}}{\cos\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\cos 0}{\cos 0} \cdot \frac{1}{1+0} = 1 = c;$$

damit besitzt die gegebene Potenzreihe den Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{c} = 1$ und ist folglich

- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ absolut konvergent,
- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergent.

Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = 1$ sind gesonderte Überlegungen erforderlich:

- Für $x = 1$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ zu betrachten; für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $0 < \frac{1}{n} \leq 1 \leq \frac{\pi}{3}$, woraus sich mit dem Monotonieverhalten des Cosinus

  $$\cos\frac{1}{n} \geq \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \text{und damit} \qquad \frac{\cos\frac{1}{n}}{n} \geq \frac{1}{2n}$$

  ergibt. Damit besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ die (als harmonische Reihe divergente) Minorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ und ist nach dem Minorantenkriterium selbst divergent.

- Für $x = -1$ ist die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot (-1)^n$ zu betrachten; die Hilfsfunktion

  $$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x \cdot \cos x,$$

  ist differenzierbar mit

  $$h'(x) = 1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x) = \cos x - x \cdot \sin x$$

  für alle $x \in \mathbb{R}$. Für alle $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ ergibt sich mit dem Monotonieverhalten von Cosinus und Sinus

  $$\cos x \geq \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \text{und} \quad 0 = \sin 0 \leq \sin x \leq \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

  und damit

  $$h'(x) = \underbrace{\cos x}_{\geq \frac{1}{2}\sqrt{3}} - \underbrace{x \cdot \sin x}_{\leq \frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2}} \geq \underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{3}}_{\geq\frac{1}{2}} - \underbrace{\frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{2}}_{\leq\frac{1}{2}} \geq 0,$$

so daß h auf $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ monoton wachsend ist; für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt $0 \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{\pi}{6}$ und damit

$$c_{n+1} = \frac{\cos \frac{1}{n+1}}{n+1} = h(\tfrac{1}{n+1}) \leq h(\tfrac{1}{n}) = \frac{\cos \frac{1}{n}}{n} = c_n,$$

so daß die Folge $(c_n)_{n \geq 2}$ monoton fallend ist. Wegen

$$|c_n| = \left| \frac{\cos \frac{1}{n}}{n} \right| = \frac{1}{n} \cdot \left|\cos \tfrac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

ist $(c_n)_{n \geq 2}$ ferner eine Nullfolge, so daß die alternierende Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n c_n$ nach dem Leibnizkriterium konvergiert; damit ist auch $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot (-1)^n$ konvergent. Da

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n \cdot (-1)^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

divergiert, ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot (-1)^n$ nicht absolut konvergent.

Zusammenfassend gilt: die gegebene Potenzreihe ist genau dann konvergent, wenn $x \in [-1, 1[$ gilt, und genau dann absolut konvergent, wenn $x \in]-1, 1[$ gilt.

2.10 Zu betrachten ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \dfrac{(\ln x)^n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left| \frac{(\ln x)^n}{n} \right|} = \sqrt[n]{\frac{|\ln x|^n}{n}} = \frac{|\ln x|}{\sqrt[n]{n}} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} |\ln x|$$

ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Wurzelkriterium

- für alle $x \in \mathbb{R}^+$ mit $|\ln x| < 1$ (absolut) konvergent, wegen

  $$|\ln x| < 1 \iff -1 < \ln x < 1 \iff e^{-1} < x < e^1$$

  also für $x \in \left]\frac{1}{e}; e\right[$, sowie
- für alle $x \in \mathbb{R}^+$ mit $|\ln x| > 1$ divergent, wegen

  $$|\ln x| > 1 \iff \ln x < -1 \text{ oder } 1 < \ln x \iff x < e^{-1} \text{ oder } e^1 < x$$

  also für $x \in \left]0; \frac{1}{e}\right[\cup]e; \infty[$.

Es sind noch die Fälle $x = \frac{1}{e}$ und $x = e$ zu untersuchen:

- Für $x = \frac{1}{e}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\ln \frac{1}{e}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

  als alternierende harmonische Reihe konvergent, und
- für $x = e$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln e)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

  als harmonische Reihe divergent.

Insgesamt konvergiert also die gegebene Reihe genau für alle $x \in \left[\frac{1}{e}; e\right[$.

2.11 Zu betrachten ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\, x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x = 0$ gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$; damit ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Für $x \neq 0$ ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, und es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\ln(n+1) \cdot x^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\ln(n) \cdot x^n}\right| = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \cdot |x|$$

mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln(t+1)}{\ln(t)} \underset{„\frac{\infty}{\infty}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{t+1}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{t+1} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{t}} = 1$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} \underset{\sqrt{\cdot}\ \text{stetig}}{=} \sqrt{\frac{1}{1+0}} = 1,$$

insgesamt also

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}}_{\to 1} \cdot |x| \right) = |x|.$$

Damit ist nach dem Quotientenkriterium die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\, x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ absolut konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergent, weswegen noch der Fall $|x| = 1$ gesondert zu behandeln ist.

- Im Falle $x = 1$ ist

$$a_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \underset{\ln(n)\geq 1}{\geq} \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \text{für alle} \quad n \geq 3;$$

damit besitzt die Reihe $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ die Reihe $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ als divergente Minorante und ist damit nach dem Minorantenkriterium selbst divergent, weswegen auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ divergiert.

- Im Falle $x = -1$ ist

$$a_n = (-1)^n \, b_n \qquad \text{mit} \qquad b_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N};$$

wir betrachten daher die Hilfsfunktion

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}.$$

Wegen

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \underset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“}}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{\sqrt{t}} = 0$$

ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, und wegen

$$f'(t) = \frac{\sqrt{t} \cdot \frac{1}{t} - \ln(t) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}}{(\sqrt{t})^2} = \frac{2 - \ln(t)}{2\,(\sqrt{t})^3} < 0 \qquad \text{für alle} \quad t > e^2$$

ist $(b_n)_{n\geq 8}$ monoton fallend; damit ist nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium die alternierende Reihe $\sum_{n=8}^{\infty} (-1)^n \, b_n = \sum_{n=8}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \, (-1)^n$ konvergent, weswegen auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \, (-1)^n$ konvergiert.

Damit konvergiert die gegebene Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \, x^n$ genau für $x \in [-1; 1[$.

2.12
- Für jedes $x \in \mathbb{R}$ handelt es sich bei der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \qquad \text{mit} \qquad a_k = e^{xk} = (e^x)^k \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}_0$$

um die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ mit $q = e^x$; diese konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ ist, wegen

$$|e^x| < 1 \iff e^x < 1 \iff x < \ln 1 = 0$$

also genau für alle $x \in \,]-\infty, 0[$.

- Für jedes $x \in \mathbb{R}$ handelt es sich bei der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \qquad \text{mit} \qquad b_k = e^k x^k = (e\,x)^k \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}_0$$

um die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ mit $q = e\,x$; diese konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ ist, wegen

$$|e\,x| < 1 \iff e \cdot |x| < 1 \iff |x| < \tfrac{1}{e} \iff -\tfrac{1}{e} < x < \tfrac{1}{e}$$

also genau für alle $x \in \left]-\tfrac{1}{e}, \tfrac{1}{e}\right[$.

- Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es nach dem Archimedischen Axiom ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $e^x \leq k_0$; für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$ gilt demnach

$$e^x + k \leq k_0 + k \leq 2\,k, \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{e^x + k} \geq \frac{1}{2\,k}.$$

Damit besitzt die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{e^x + k}$ die (als harmonische Reihe) divergente Minorante $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{2\,k}$ und ist folglich nach dem Minorantenkriterium selbst divergent; somit divergiert aber auch die gegebene Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e^x + k}$.

2.13 In Abhängigkeit vom Parameter $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{(2x)^n}{1 + x^{2n}} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

zu betrachten. Für $x = 0$ ist $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Für $x \neq 0$ ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(2x)^{n+1}}{1 + x^{2(n+1)}} \cdot \frac{1 + x^{2n}}{(2x)^n}\right| = \left|\frac{(2x)^{n+1}}{(2x)^n} \cdot \frac{1 + x^{2n}}{1 + x^{2n+2}}\right| = 2\,|x| \cdot \frac{1 + x^{2n}}{1 + x^{2n+2}},$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Fall 1: $0 < |x| < 1$. Damit ist $\lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0$ sowie $\lim_{n\to\infty} x^{2n+2} = 0$, woraus sich

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2\,|x| \cdot \frac{1 + x^{2n}}{1 + x^{2n+2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\,|x| \cdot \frac{1+0}{1+0} = 2\,|x|$$

ergibt; nach dem Quotientenkriterium ist also in diesem Fall die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

  - für $2\,|x| < 1$, also für $0 < |x| < \frac{1}{2}$, konvergent sowie
  - für $2\,|x| > 1$, also für $\frac{1}{2} < |x| < 1$, divergent.

Für $2\,|x| = 1$, also für $|x| = \frac{1}{2}$, ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gemäß

$$|a_n| = \left|\frac{(2\,x)^n}{1 + x^{2n}}\right| = \frac{|2\,x|^n}{1 + x^{2n}} = \frac{(2\,|x|)^n}{1 + (x^2)^n} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+0} = 1$$

keine Nullfolge und damit insbesondere die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

- Fall 2: $|x| = 1$. Damit ist $x^{2n} = 1$ sowie $x^{2n+2} = 1$ und folglich

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2\,|x| \cdot \frac{1 + x^{2n}}{1 + x^{2n+2}} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1+1}{1+1} = 2$$

  für alle $n \in \mathbb{N}$, weswegen die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium divergiert.

- Fall 3: $|x| > 1$. Damit ist $0 < \frac{1}{|x|} < 1$ mit $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^{2n}} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{|x|}\right)^{2n} = 0$, woraus sich

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2\,|x| \cdot \frac{1 + x^{2n}}{1 + x^{2n+2}} = 2\,|x| \cdot \frac{x^{2n}\left(\frac{1}{x^{2n}} + 1\right)}{x^{2n}\left(\frac{1}{x^{2n}} + x^2\right)} =$$

$$= 2\,|x| \cdot \frac{\frac{1}{x^{2n}} + 1}{\frac{1}{x^{2n}} + x^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\,|x| \cdot \frac{0+1}{0+x^2} = 2\,|x| \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{2\,|x|}{|x|^2} = \frac{2}{|x|}$$

  ergibt; nach dem Quotientenkriterium ist also in diesem Fall die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

  - für $\frac{2}{|x|} < 1$, also für $2 < |x|$, konvergent sowie
  - für $\frac{2}{|x|} > 1$, also für $1 < |x| < 2$, divergent.

  Für $\frac{2}{|x|} = 1$, also für $|x| = 2$, ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gemäß

$$|a_n| = \left|\frac{(2\,x)^n}{1 + x^{2n}}\right| = \frac{|2\,x|^n}{1 + x^{2n}} = \frac{(2\,|x|)^n}{1 + (x^2)^n} = \frac{4^n}{1 + 4^n} =$$

$$= \frac{4^n}{4^n\left(\frac{1}{4^n} + 1\right)} = \frac{1}{\frac{1}{4^n} + 1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{0+1} = 1$$

  keine Nullfolge und damit insbesondere die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Insgesamt konvergiert die gegebene Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn

$$|x| < \tfrac{1}{2} \qquad \text{oder} \qquad |x| > 2$$

ist, also genau für alle

$$x \in \left]-\infty; -2\right[\cup \left]-\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}\right[\cup \left]2; +\infty\right[.$$

2.14 a) Zu betrachten ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{1}{n}\left(x^2 - 1\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dabei gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\,(x^2-1)^n\right|} = \sqrt[n]{\frac{|x^2-1|^n}{n}} = \frac{\sqrt[n]{|x^2-1|^n}}{\sqrt[n]{n}} =$$

$$= \frac{|x^2-1|}{\sqrt[n]{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{|x^2-1|}{1} = \left|x^2 - 1\right|.$$

Damit ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Wurzelkriterium

- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x^2 - 1| < 1$ absolut konvergent; wegen

$$\left|x^2 - 1\right| < 1 \iff -1 < x^2 - 1 < 1 \iff$$
$$\iff 0 < x^2 < 2 \iff 0 < |x| < \sqrt{2}$$

  ist dies genau für alle $x \in \left]-\sqrt{2}; 0\right[\cup \left]0; \sqrt{2}\right[$ der Fall.
- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x^2 - 1| > 1$ divergent; wegen

$$\left|x^2 - 1\right| > 1 \iff x^2 - 1 < -1 \ \text{ oder } \ x^2 - 1 > 1 \iff$$
$$\iff x^2 < 0 \ \text{ oder } \ x^2 > 2 \iff x^2 > 2 \iff |x| > \sqrt{2}$$

  ist dies genau für alle $x \in \left]-\infty; -\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}; \infty\right[$ der Fall.

Es sind noch die Fälle $x = 0$ und $x = \pm\sqrt{2}$ zu untersuchen:

- Für $x = 0$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(x^2 - 1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

  als alternierende harmonische Reihe konvergent, und
- für $x = \pm\sqrt{2}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(x^2 - 1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

  als harmonische Reihe divergent.

Insgesamt konvergiert also die gegebene Reihe genau für alle $x \in \left]-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right[$.

b) Zu betrachten ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = n x^{(n^2)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dabei gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|n \cdot x^{(n^2)}\right|} = \sqrt[n]{n \cdot |x|^{(n^2)}} = \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|x|^{(n^2)}} = \sqrt[n]{n} \cdot |x|^n,$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung nahegelegt wird:

- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} \cdot \underbrace{|x|^n}_{\to 0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

  weswegen die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Wurzelkriterium absolut konvergiert.

- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = 1$ gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} \cdot \underbrace{|x|^n}_{\to 1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

womit über das Wurzelkriterium keine Konvergenzaussage möglich ist; da aber die Folge der Reihenglieder wegen

$$|a_n| = \left| n \cdot x^{(n^2)} \right| = n \cdot |x|^{(n^2)} = n \cdot 1^{(n^2)} = n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

insbesondere keine Nullfolge ist, ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sicher divergent.

- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} \cdot \underbrace{|x|^n}_{\to \infty} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty;$$

weswegen die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Wurzelkriterium divergiert.

Insgesamt konvergiert also die gegebene Reihe genau für alle $x \in \left]-1; 1\right[$.

2.15 a) Zu betrachten ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \dfrac{x^n}{n \cdot \sqrt{n - \frac{1}{2}}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für $x = 0$ gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$; damit ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Für $x \neq 0$ ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und es gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot \sqrt{n + \frac{1}{2}}} \cdot \frac{n \cdot \sqrt{n - \frac{1}{2}}}{x^n} \right| = \frac{n}{n+1} \cdot \sqrt{\frac{n - \frac{1}{2}}{n + \frac{1}{2}}} \cdot |x| =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2n}}{1 + \frac{1}{2n}}} \cdot |x| = \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+0} \cdot \sqrt{\frac{1-0}{1+0}} \cdot |x| = |x|,$$

wobei hier die Stetigkeit der Quadratwurzel an der Stelle $a = 1$ eingeht; damit ist nach dem Quotientenkriterium die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ absolut konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergent. Für den noch zu untersuchenden Fall $|x| = 1$ gilt

$$|a_n| = \left| \frac{x^n}{n \cdot \sqrt{n - \frac{1}{2}}} \right| = \frac{1}{n \cdot \sqrt{n - \frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{n \cdot \sqrt{n - \frac{n}{2}}} = \frac{1}{n \cdot \sqrt{\frac{n}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; da mit der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}$ konvergiert, besitzt damit die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ die konvergente Majorante $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}$ und ist damit nach dem Majorantenkriterium selbst absolut konvergent.

b) Zu betrachten ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{n^{(n^2)}}{(n+1)^{(n^2)}}\, x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$; wir verwenden im folgenden, daß die Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst und den Grenzwert e besitzt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt damit

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{n^{(n^2)}}{(n+1)^{(n^2)}}\, x^n\right|} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n^2)} \cdot |x|^n} =$$

$$= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n^2}{n}} \cdot \sqrt[n]{|x|^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot |x| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} \cdot |x| = \frac{|x|}{e};$$

damit ist nach dem Wurzelkriterium die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{|x|}{e} < 1$, also $|x| < e$, absolut konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{|x|}{e} > 1$, also $|x| > e$, divergent. Für den noch zu untersuchenden Fall $|x| = e$ gilt gemäß obiger Rechnung

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \geq \frac{e}{e} = 1, \qquad \text{also} \qquad |a_n| \geq 1;$$

damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Reihenglieder keine Nullfolge, weswegen die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

2.16 a) Bekanntlich konvergiert die Exponentialreihe auf ganz $\mathbb{R}$; damit konvergiert aber für alle $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\exp(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}\, x^n.$$

Zum selben Ergebnis kommt man auch mit Hilfe des Quotientenkriteriums.

b) Zu betrachten ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{3^n}{n!}\, x^{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Für $x = 0$ gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$; damit ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Für $x \neq 0$ ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{3^{n+1} \cdot x^{(n+1)^2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n \cdot x^{n^2}}\right| = \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{|x|^{n^2+2n+1}}{|x|^{n^2}} =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{n+1} \cdot |x|^{2n+1} = 3 \cdot \frac{|x|^{2n+1}}{n+1};$$

dies legt die folgende Fallunterscheidung nahe:

- Im Falle $|x| \leq 1$ ist

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 3 \cdot \frac{|x|^{2n+1}}{n+1} \leq \frac{3}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \text{also} \qquad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0;$$

  damit ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium konvergent.

- Im Falle $|x| > 1$ ist $|x| = 1 + x_0$ für ein $x_0 > 0$, und nach der Bernoullischen Ungleichung gilt $|x|^n = (1 + x_0)^n \geq 1 + n\, x_0$, woraus sich

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 3 \cdot \frac{|x|^{2n+1}}{n+1} = 3 \cdot \frac{|x|^n}{n+1} \cdot |x|^{n+1} \geq 3 \cdot \frac{1 + n\, x_0}{n+1} \cdot |x|^{n+1} =$$

$$= 3 \cdot \underbrace{\frac{\frac{1}{n} + x_0}{1 + \frac{1}{n}}}_{\to x_0 > 0} \cdot \underbrace{|x|^{n+1}}_{\to\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty, \qquad \text{also} \qquad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty;$$

damit ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium divergent.

2.17 a) Zu betrachten ist die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n\, a_n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{1}{\ln\,(n^2 - n)} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ist

$$\ln\left(n^2 - n\right) = \ln\,(n \cdot (n-1)) = \ln n + \underbrace{\ln(n-1)}_{\geq \ln 1 = 0} \geq \ln n \geq \ln 2 > 0$$

mit

$$\underbrace{\ln n}_{\leq \ln(n+1)} + \underbrace{\ln(n-1)}_{\leq \ln n} \leq \ln(n+1) + \ln n$$

und damit

$$a_n = \frac{1}{\ln n + \ln(n-1)} \geq \frac{1}{\ln(n+1) + \ln n} = a_{n+1}$$

sowie

$$\underbrace{\ln n}_{\to\infty} + \underbrace{\ln(n-1)}_{\to\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

und damit

$$a_n = \frac{1}{\ln n + \ln(n-1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

folglich ist $(a_n)_{n\geq 2}$ eine monoton fallende Nullfolge, so daß die alternierende Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n\, a_n$ nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium konvergiert. Das Leibnizkriterium trifft allerdings keine Aussage über die absolute Konvergenz von $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n\, a_n$, also die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} |(-1)^n\, a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \underset{a_n > 0}{=} \sum_{n=2}^{\infty} a_n.$$

Wegen

$$\frac{1}{a_n} = \ln n + \underbrace{\ln(n-1)}_{\leq \ln n} \leq \ln n + \ln n \leq 2 \cdot \ln n \underset{(*)}{\leq} n$$

und damit $a_n \geq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ besitzt die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ die (bekanntlich divergente) harmonische Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ als Minorante und ist damit nach dem Minorantenkriterium selbst divergent; folglich ist die gegebene alternierende Reihe nicht absolut konvergent. Zum Nachweis von $(*)$ betrachten wir etwa die differenzierbare Funktion

$$f : [2; \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = x - 2 \ln x;$$

wegen

$$f'(x) = 1 - 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\leq \frac{1}{2}} \geq 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 - 1 = 0$$

für alle $x \geq 2$ ist f auf $[2; \infty[$ monoton wachsend, und es gilt damit

$$f(x) \geq f(2) = 2 - 2 \ln 2 = 2\,(1 - \ln 2) \geq 0,$$

also

$$0 \leq x - 2\,\ln x \qquad \text{und folglich} \qquad 2 \cdot \ln x \leq x,$$

für alle $x \geq 2$.

b) Zu betrachten ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ mit

$$b_n = \frac{1 - n + n^2 - n^3 + n^4 - n^5}{n^7} = \frac{1}{n^7} - \frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^5} - \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Reihe $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ für alle $s > 1$ konvergiert, konvergieren die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

und damit auch ihre Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^7} + \frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2} \right);$$

folglich stellt diese wegen

$$|b_n| = \left| \frac{1}{n^7} - \frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^5} - \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^7} + \frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ eine konvergente Majorante für die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ dar, so daß nach dem Majorantenkriterium $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergiert, insbesondere also konvergiert.

c) Für alle $|x| < \frac{1}{e}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \qquad \text{mit} \qquad c_n = \frac{(n\,x)^n}{n!} = \frac{n^n \cdot x^n}{n!}$$

zu betrachten. Für $x = 0$ ist $c_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit insbesondere die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut konvergent; für $x \neq 0$ ist $c_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n \cdot x^n}\right| = \left|\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n}\right| =$$
$$= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot |x| = \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot |x| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot |x| =$$
$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot |x| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} e \cdot |x| < e \cdot \frac{1}{e} = 1,$$

so daß die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ nach dem Quotientenkriterium absolut konvergiert.

Insbesondere ist damit die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ für alle $|x| < \frac{1}{e}$ auch konvergent.

2.18 a) Die zu untersuchende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{mit} \qquad a_n = n^3 \left(\frac{\left(\frac{1+n}{n}\right)^n}{3}\right)^n \quad \text{für alle } \; n \in \mathbb{N}$$

ist wegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|n^3 \left(\frac{\left(\frac{1+n}{n}\right)^n}{3}\right)^n\right|} = \sqrt[n]{n^3} \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{\left(\frac{1+n}{n}\right)^n}{3}\right)^n} =$$
$$= \sqrt[n]{n^3} \cdot \frac{\left(\frac{1+n}{n}\right)^n}{3} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^3 \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{3} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1^3 \cdot \frac{e}{3} = \frac{e}{3} < 1$$

nach dem Wurzelkriterium absolut konvergent.

b) In Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \text{mit} \qquad b_n = \frac{n^n}{n!} x^n \quad \text{für alle } \; n \in \mathbb{N}$$

zu betrachten. Für $x = 0$ ist $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit insbesondere die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent; für $x \neq 0$ ist $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| &= \left|\frac{(n+1)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n \cdot x^n}\right| \\ &= \left|\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot |x| \\ &= \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot |x| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot |x| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot |x| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} e \cdot |x|, \end{aligned}$$

so daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nach dem Quotientenkriterium

- im Falle $e \cdot |x| < 1$, also für alle $|x| < \frac{1}{e}$, absolut konvergiert und
- im Falle $e \cdot |x| > 1$, also für alle $|x| > \frac{1}{e}$, divergiert.

Folglich besitzt die gegebene Potenzreihe den Konvergenzradius $\frac{1}{e}$.

2.19 In Abhängigkeit von den reellen Parametern a, $b > 0$ mit $b \neq 1$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \qquad \text{mit} \qquad c_n = \frac{a^n}{1-b^n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

zu betrachten; dabei ist

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{a^{n+1}}{1-b^{n+1}} \cdot \frac{1-b^n}{a^n}\right| = \left|\frac{a^{n+1}}{a^n} \cdot \frac{1-b^n}{1-b^{n+1}}\right| \underset{a>0}{=} a \cdot \left|\frac{1-b^n}{1-b^{n+1}}\right|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies motiviert die folgende Fallunterscheidung:

- Fall 1: $0 < b < 1$. Damit ist $\lim_{n\to\infty} b^n = 0$ sowie $\lim_{n\to\infty} b^{n+1} = 0$, woraus sich

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = a \cdot \left|\frac{1-b^n}{1-b^{n+1}}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \cdot \left|\frac{1-0}{1-0}\right| = a$$

  ergibt; nach dem Quotientenkriterium ist also die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ für $0 < a < 1$ konvergent sowie für $a > 1$ divergent. Für $a = 1$ ist die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gemäß

$$c_n = \frac{a^n}{1-b^n} = \frac{1^n}{1-b^n} = \frac{1}{1-b^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-0} = 1$$

  keine Nullfolge und damit insbesondere die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergent.

- Fall 2: $b > 1$. Damit ist $0 < \frac{1}{b} < 1$ mit $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^n = 0$, woraus sich

$$\begin{aligned}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = a \cdot \left|\frac{1-b^n}{1-b^{n+1}}\right| = a \cdot \left|\frac{b^n \cdot \left(\frac{1}{b^n} - 1\right)}{b^n \cdot \left(\frac{1}{b^n} - b\right)}\right| = \\ = a \cdot \left|\frac{\left(\frac{1}{b}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{b}\right)^n - b}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \cdot \left|\frac{0-1}{0-b}\right| = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}\end{aligned}$$

  ergibt; nach dem Quotientenkriterium ist also die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ für $\frac{a}{b} < 1$, also für $a < b$, konvergent sowie für $\frac{a}{b} > 1$, also für $a > b$, divergent. Für $\frac{a}{b} = 1$, also für $a = b$ ist die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gemäß

$$c_n = \frac{a^n}{1-b^n} = \frac{b^n}{1-b^n} = \frac{b^n}{b^n \cdot \left(\frac{1}{b^n} - 1\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^n - 1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{0-1} = -1$$

  keine Nullfolge und damit insbesondere die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergent.

2.20 a) Zu betrachten ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{(-1)^n}{n}\left(2+\frac{1}{n}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$; wegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n}\left(2+\frac{1}{n}\right)^n\right|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)^n} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\cdot\sqrt[n]{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1}\cdot 2 = 2.$$

ist die Reihe nach dem Wurzelkriterium divergent.

b) Für die zu betrachtende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gilt

$$a_n = \frac{1+2^n x^{2n}}{1+n^2} = \frac{1}{1+n^2} + \frac{2^n x^{2n}}{1+n^2},$$

also

$$a_n = b_n + c_n \qquad \text{mit} \qquad b_n = \frac{1}{1+n^2} \quad \text{und} \quad c_n = \frac{2^n x^{2n}}{1+n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$|b_n| = \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ die konvergente Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und ist daher nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent; folglich konvergiert nun die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert.

Für $x = 0$ ist $c_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent, und für $x \neq 0$ ergibt sich

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{2^{n+1}x^{2(n+1)}}{1+(n+1)^2}\cdot\frac{1+n^2}{2^n x^{2n}}\right| = \left|\frac{2^{n+1}}{2^n}\cdot\frac{x^{2n+2}}{x^{2n}}\cdot\frac{1+n^2}{1+(n+1)^2}\right| =$$

$$= \left|2\cdot x^2\cdot\frac{\frac{1}{n^2}+1}{\frac{1}{n^2}+(1+\frac{1}{n})^2}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\cdot x^2\cdot\frac{0+1}{0+(1+0)^2} = 2x^2;$$

damit ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ nach dem Quotientenkriterium

- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $2x^2 < 1$ (absolut) konvergent, wegen

$$2x^2 < 1 \iff x^2 < \frac{1}{2} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{2}} \iff -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

  also für alle $x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$, sowie

- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $2x^2 > 1$ divergent, wegen

  $$2x^2 > 1 \iff x^2 > \frac{1}{2} \iff |x| > \frac{1}{\sqrt{2}} \iff x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ oder } \frac{1}{\sqrt{2}} < x$$

  also für alle $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{2}}; \infty\right[$.

Für die verbleibenden Fälle $2x^2 = 1$, also $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, ergibt sich

$$c_n = \frac{2^n x^{2n}}{1+n^2} = \frac{(2x^2)^n}{1+n^2} = \frac{1^n}{1+n^2} = \frac{1}{1+n^2} = b_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; damit ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent.

Zusammenfassend ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ und damit die gegebene Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergent, wenn $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ gilt.

2.21 a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ergibt sich mit Hilfe der 3. binomischen Formel

$$1 - \sqrt{1-\frac{1}{n}} = \frac{\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)\cdot\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} =$$

$$= \frac{1^2 - \sqrt{1-\frac{1}{n}}^{\,2}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$

sowie wegen der Monotonie der Quadratwurzel

$$1+\sqrt{1-\frac{1}{n}} \leq 1+\sqrt{1-0} = 1+\sqrt{1} = 2,$$

insgesamt also

$$1-\sqrt{1-\frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \geq \frac{\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2n}.$$

Damit besitzt die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$ die (wie harmonische Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$) divergente Minorante $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n}$ und ist damit nach dem Minorantenkriterium selbst divergent.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ergibt sich mit Hilfe der 3. binomischen Formel

$$0 \leq 1-\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)\cdot\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} =$$

$$= \frac{1^2-\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}^{\,2}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} = \frac{1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} \leq \frac{\frac{1}{n^2}}{1+0} = \frac{1}{n^2}.$$

Damit besitzt die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)$ die konvergente Majorante $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ und ist damit nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent.

2.22 a) Eine zweimalige Anwendung der Regel von de l'Hospital liefert

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos x}{x^2} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{2\,x} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0+}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2};$$

wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ ergibt sich damit insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

b) Gemäß a) gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ mit $a=\frac{1}{2}$; damit gibt es zu $\varepsilon=\frac{1}{2}$ ein $n_0\in\mathbb{N}$, so daß für alle $n\in\mathbb{N}$ mit $n\ge n_0$ dann $|a_n-a|<\varepsilon$, also

$$a_n - a \le |a_n-a| < \varepsilon \quad \text{und damit} \quad a_n < 1 \quad \text{bzw.} \quad 1-\cos\frac{1}{n} < \frac{1}{n^2}$$

gilt. Damit besitzt die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ die (bekanntlich konvergente) Majorante $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ und ist damit nach dem Majorantenkriterium selbst (absolut) konvergent; folglich konvergiert aber auch die gegebene Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$.

2.23 a) Der zu untersuchende Grenzwert

$$n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) = \frac{e^{\frac{1}{n}\ln a}-1}{\frac{1}{n}} \qquad \text{für} \qquad n\to\infty$$

ist vom Typ „$\frac{0}{0}$“ und läßt sich damit mit Hilfe der Regel von de l'Hospital behandeln. Dazu betrachten wir die beiden differenzierbaren Funktionen

$$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\quad f(x)=e^{x\ln a}-1, \qquad \text{und} \qquad g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\quad g(x)=x,$$

mit

$$f'(x)=e^{x\ln a}\cdot\ln a \qquad \text{und} \qquad g'(x)=1$$

für alle $x\in\mathbb{R}^+$; dabei ist $g'(x)\neq 0$ für alle $x\in\mathbb{R}^+$ sowie

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\left(e^{x\ln a}-1\right) = e^0-1=0$$

und

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} x = 0,$$

wobei beim ersten Grenzwert die Stetigkeit der Exponentialfunktion an der Stelle 0 eingeht. Wegen

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^{x \ln a} \cdot \ln a}{1} = e^{x \ln a} \cdot \ln a \underset{x \to 0+}{\longrightarrow} e^0 \cdot \ln a = \ln a$$

existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, und nach der Regel von de l'Hospital existiert damit auch der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{f(x)}{g(x)}$ mit

$$\lim_{x \to 0+} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ln a.$$

Schließlich erhalten wir

$$\lim_{n \to \infty} n \left(\sqrt[n]{a} - 1 \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{n} \ln a} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \to 0+} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} = \ln a.$$

b) Für $a = 1$ gilt $\sqrt[n]{a} - 1 = \sqrt[n]{1} - 1 = 1 - 1 = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$; insbesondere ist damit die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{a} - 1 \right)$ konvergent. Für $a > 1$ ist gemäß a)

$$\lim_{n \to \infty} n \left(\sqrt[n]{a} - 1 \right) = \ln a > 0,$$

so daß es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$n \left(\sqrt[n]{a} - 1 \right) > \frac{\ln a}{2}, \qquad \text{also} \qquad \sqrt[n]{a} - 1 > \frac{\ln a}{2n}$$

für alle $n \geq n_0$. Damit besitzt die Reihe $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \left(\sqrt[n]{a} - 1 \right)$ die (wegen $\ln a > 0$ wie harmonische Reihe $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n}$) divergente Minorante $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{\ln a}{2n}$ und ist damit nach dem Minorantenkriterium selbst divergent; folglich divergiert auch die zu untersuchende Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{a} - 1 \right)$.

2.24 a) Die gegebene Funktion

$$f : [2; \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\ln x}{x^2} = x^{-2} \cdot \ln x,$$

ist (als Produkt einer Potenzfunktion und des natürlichen Logarithmus) stetig und (beliebig oft) differenzierbar, und für alle $x \in [2; \infty[$ gilt

$$f'(x) = (-2)\, x^{-3} \cdot \ln x + x^{-2} \cdot \frac{1}{x} = -\underbrace{x^{-3}}_{>0} \underbrace{\Bigg(\underbrace{2 \ln x}_{\geq 2 \ln 2 > 1} - 1 \Bigg)}_{>0} < 0;$$

damit ist die auf dem Intervall $[2;\infty[$ definierte Funktion f (sogar streng) monoton fallend. Darüber hinaus nimmt f wegen

$$f(x) = \underbrace{x^{-2}}_{>0} \cdot \underbrace{\ln x}_{\geq \ln 2 > 0} > 0$$

für alle $x \in [2;\infty[$ nur positive Funktionswerte an.

b) Es ist

$$\int f(x)\,dx = \int \underbrace{x^{-2}}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{v(x)}\,dx = \underbrace{\frac{x^{-1}}{-1}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{v(x)} - \int \underbrace{\frac{x^{-1}}{-1}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)}\,dx =$$

$$= -x^{-1}\ln x + \int x^{-2}\,dx = -x^{-1}\ln x + \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{\ln x + 1}{x} + C;$$

damit ist etwa

$$F : [2;\infty[\to \mathbb{R}, \quad F(x) = -\frac{\ln x + 1}{x},$$

eine Stammfunktion von f.

c) Gemäß a) ist die gegebene Funktion $f : [2,\infty[\to \mathbb{R}$ stetig und monoton fallend mit nur positiven Funktionswerten; nach dem Integralvergleichskriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_2^{\infty} f(x)\,dx$ konvergiert. Wegen

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = -\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x + 1}{x} \underset{„\frac{\infty}{\infty}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} -\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ergibt sich

$$\int_2^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_2^b = F(b) - F(2) \underset{b\to\infty}{\longrightarrow} -F(2) = \frac{\ln 2 + 1}{2};$$

damit konvergiert das uneigentliche Integral $\int_2^{\infty} f(x)\,dx$ und folglich auch die zu betrachtende Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

2.25 a) Wir betrachten die Funktion

$$f : [2,\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}.$$

Für alle $x_1,\ x_2 \in [2,\infty[$ mit $x_1 \leq x_2$ ergibt sich, da der natürliche Logarithmus ln streng monoton wächst, zunächst $0 < \ln 2 \leq \ln x_1 \leq \ln x_2$, also $0 < (\ln x_1)^2 \leq (\ln x_2)^2$, und damit

$$0 < x_1 (\ln x_1)^2 \leq x_2 (\ln x_2)^2,$$

woraus dann wegen

$$f(x_1) = \frac{1}{x_1\,(\ln x_1)^2} \geq \frac{1}{x_2\,(\ln x_2)^2} = f(x_2)$$

folgt, daß f eine monoton fallende Funktion ist.
Sei nun $n \in \{2, \ldots, k-1\}$. Für alle $x \in [n, n+1]$ gilt $n \leq x \leq n+1$ und wegen der Monotonie von f damit

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1),$$

woraus aufgrund der Monotonie des Integrals

$$\int_n^{n+1} f(n)\,dx \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq \int_n^{n+1} f(n+1)\,dx,$$

also

$$f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq f(n+1)$$

folgt. Damit ergibt sich in

$$\sum_{n=2}^{k-1} f(n) \geq \sum_{n=2}^{k-1} \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq \sum_{n=2}^{k-1} f(n+1),$$

also

$$\sum_{n=2}^{k-1} f(n) \geq \int_2^k f(x)\,dx \geq \sum_{n=3}^{k} f(n),$$

und damit

$$\sum_{n=3}^{k} \frac{1}{n(\ln n)^2} \leq \int_2^k \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx \leq \sum_{n=2}^{k-1} \frac{1}{n(\ln n)^2},$$

die Behauptung.

b) Zur Ermittlung einer Stammfunktion von f betrachten wir die Substitution

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad g(t) = \ln t, \qquad \text{mit} \qquad g'(t) = \frac{1}{t}$$

und erhalten

$$\int \frac{1}{t(\ln t)^2} = \int (g(t))^{-2} \cdot g'(t)\,dt =$$

$$= \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C = -\frac{1}{\ln t} + C.$$

Damit ist

$$\int_2^k \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^k = \underbrace{\left(-\frac{1}{\ln k}\right)}_{\to 0} - \left(-\frac{1}{\ln 2}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{\ln 2},$$

woraus sich mit der ersten in a) gezeigten Ungleichung

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=3}^{k} \frac{1}{n(\ln n)^2} \leq \lim_{k\to\infty} \int_2^k \frac{1}{n(\ln n)^2}\,dx = \frac{1}{\ln 2}$$

ergibt.

2.26 Zu betrachten ist die Reihe $\sum_{k\geq 1}(-1)^k a_k$ mit $a_k = f\left(\frac{1}{k}\right)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

- Die als differenzierbar vorausgesetzte Funktion f ist damit insbesondere (an der Stelle $a = 0$) stetig; damit folgt aus

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0 \qquad \text{schon} \qquad \lim_{k\to\infty} f\left(\frac{1}{k}\right) = f(0) = 0,$$

  weswegen $(a_k)_{k\geq 1}$ eine Nullfolge ist.

- Wegen $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f zudem monoton wachsend; für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k}$ und damit

$$a_{k+1} = f\left(\frac{1}{k+1}\right) \leq f\left(\frac{1}{k}\right) = a_k,$$

  weswegen die Folge $(a_k)_{k\geq 1}$ monoton fallend ist.

Folglich ist nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium die alternierende Reihe

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^k a_k = \sum_{k\geq 1}(-1)^k f\left(\frac{1}{k}\right)$$

konvergent.

2.27 Für die gegebene durch

$$a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad \text{sowie} \quad a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1} \quad \text{für alle} \quad n \geq 1$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zeigen wir zunächst

$$0 < a_n \leq \frac{1}{2} \quad \text{für alle} \quad n \geq 2$$

mit Hilfe vollständiger Induktion:

- Für „$n = 2$“ und „$n = 3$“ ist

$$a_2 = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad a_3 = a_1 \cdot a_2 = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

  insbesondere also

$$0 < a_2 \leq \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad 0 < a_3 \leq \frac{1}{2}.$$

- Für „$n \to n+1$“ mit $n \geq 3$ ist

$$0 < a_{n-1} \leq \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad 0 < a_n \leq \frac{1}{2},$$

  woraus sich

$$0 < a_{n-1} \cdot a_n \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \qquad \text{mithin} \qquad 0 < a_{n+1} \leq \frac{1}{2},$$

  ergibt.

Für alle $n \geq 3$ ergibt sich damit

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n-1} \cdot a_n}{a_n} = a_{n-1} \leq \frac{1}{2};$$

folglich ist nach dem Quotientenkriterium die Reihe $\sum\limits_{n=3}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so daß auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

2.28 Bei der zu betrachtenden Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{1}{2n-1} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

handelt es sich um eine alternierende Reihe; da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die Reihe nach dem Konvergenzkriterium von Leibniz. Für die Summe

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

dieser klassischen Reihe ist zwar $s = \frac{\pi}{4}$ angegeben, der konkrete Wert von s ist allerdings für die folgende Überlegung unerheblich.

Man erhält für die Partialsummen von ungeradem Index

$$s_{2j+1} - s_{2j-1} = (-1)^{2j+1} a_{2j} + (-1)^{2j+2} a_{2j+1} = -a_{2j} + a_{2j+1} \leq 0$$

und damit $s_{2j+1} \leq s_{2j-1}$ sowie für die Partialsummen von geradem Index

$$s_{2j+2} - s_{2j} = (-1)^{2j+2} a_{2j+1} + (-1)^{2j+3} a_{2j+2} = a_{2j+1} - a_{2j+2} \geq 0$$

und damit $s_{2j+2} \geq s_{2j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$; damit sind die beiden Teilfolgen $(s_{2j-1})_{j\in\mathbb{N}}$ bzw. $(s_{2j})_{j\in\mathbb{N}}$ monoton fallend bzw. monoton steigend, so daß sich

$$s_{2j} \leq s \leq s_{2j+1} \qquad \text{und} \qquad s_{2j-1} \geq s \geq s_{2j}$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ ergibt. Folglich liegt s stets zwischen zwei aufeinanderfolgenden Partialsummen s_n und s_{n+1}, so daß sich

$$|s - s_n| \leq |s_{n+1} - s_n| = \left|(-1)^{n+2} a_{n+1}\right| = a_{n+1}$$

mit

$$a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)-1} = \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{2n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt; wegen

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} \iff \frac{1}{n} \leq 10^{-4} \iff n \geq 10^4$$

können wir $N = 10^4 \in \mathbb{N}$ wählen und erhalten insgesamt

$$\left|\frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\right| = |s - s_N| \leq a_{N+1} \leq \frac{1}{2N} \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}.$$

2.29 a) Wir konstruieren für jede Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen über vollständige Induktion eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$|a_{n_k}| \leq \frac{1}{k^2} \qquad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N};$$

die damit gebildete Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ besitzt dann die konvergente Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ als Majorante und ist damit nach dem Majorantenkriterium selbst absolut konvergent.

- Für „$k = 1$" gibt es wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ zu $\varepsilon = 1$ ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_1$; für $n_1 = N_1$ gilt damit insbesondere $|a_{n_1}| \leq 1$.
- Für „$k \to k+1$" gibt es wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ zu $\varepsilon = \frac{1}{(k+1)^2}$ ein $N_{k+1} \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_{k+1}$; für $n_{k+1} = \max\{n_k, N_{k+1}\} + 1$ gilt damit $n_{k+1} > n_k$ mit $|a_{n_{k+1}}| \leq \frac{1}{(k+1)^2}$.

b) Für die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen gibt es ein $d > 0$ mit $b_{n+1} < b_n - d$ für alle $n \in \mathbb{N}$; wir zeigen

$$b_n \leq b_1 - (n-1) \cdot d \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

mit Hilfe vollständiger Induktion:

- Für „$n = 1$" gilt sogar $b_1 = b_1 - 0 = b_1 - (1-1) \cdot d$.
- Für „$n \to n+1$" ergibt sich

$$b_{n+1} < b_n - d \leq (b_1 - (n-1) \cdot d) - d = b_1 - n \cdot d.$$

Damit erhält man wegen der Monotonie der Exponentialfunktion

$$0 \leq e^{b_n} \leq e^{b_1 - (n-1)\cdot d} = e^{(b_1+d) - n\cdot d} = e^{b_1+d} \cdot e^{-n\cdot d} = e^{b_1+d} \cdot \left(e^{-d}\right)^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; damit ist die geometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot q^n \qquad \text{mit} \qquad c = e^{b_1+d} \quad \text{und} \quad q = e^{-d}$$

eine Majorante der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{b_n}$. Wegen

$$d > 0 \qquad \text{ist} \qquad |q| = e^{-d} < e^0 = 1$$

und damit die Majorante konvergent, so daß die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{b_n}$ nach dem Majorantenkriterium selbst konvergiert.

2.30 a) Wegen der Beschränktheit der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert eine reelle Konstante $M > 0$ mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$; ferner bedeutet die absolute Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ gerade die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$. Wegen

$$|a_n b_n| = \underbrace{|a_n|}_{\leq M} \cdot |b_n| \leq M\,|b_n| \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ die (wie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ ebenfalls) konvergente Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} M\,|b_n|$ und ist folglich nach dem Majorantenkriterium selbst absolut konvergent.

b) Die absolut konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist insbesondere konvergent, so daß die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ihrer Glieder notwendigerweise eine Nullfolge, insbesondere also beschränkt ist. Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und erhalten mit a), daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

absolut konvergiert.

c) Die Aussage ist falsch: als Gegenbeispiel betrachte man etwa die Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{mit} \qquad a_n = (-1)^n \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

sowie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \text{mit} \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n};$$

die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist offensichtlich beschränkt und die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (nach dem Leibnizschen Kriterium) konvergent, die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ aber divergent.

2.31 Für eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen $a_k > 0$ bilden die Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N}$$

eine streng monoton wachsende Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen $s_n > 0$; als Konsequenz aus dem Hauptsatz über monotone Folgen gilt damit:

- Ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so gilt für den Grenzwert $s = \sup\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\} > 0$.
- Ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$.

a) Die Aussage ist wahr: Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so konvergiert gemäß Definition die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und für ihren Grenzwert $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ gilt $s > 0$. Da die Glieder der zu untersuchenden Reihe gemäß

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} a_k}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{s_n}\right| = \frac{1}{s_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{s} > 0$$

keine Nullfolge bilden, ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} a_k}$ divergent.

b) Die Aussage ist wahr: Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent, so divergiert gemäß Definition die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und es gilt $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$. Bei der zu untersuchenden Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} a_k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s_n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \underbrace{\frac{1}{s_n}}_{>0}$$

handelt es sich um eine alternierende Reihe:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 < s_n \leq s_{n+1}$ und damit $0 < \frac{1}{s_{n+1}} \leq \frac{1}{s_n}$; damit ist die Folge $\left(\frac{1}{s_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.
- Wegen $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} = 0$; damit ist $\left(\frac{1}{s_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Folglich ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} a_k}$ nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium für alternierende Reihen konvergent.

c) Die Aussage ist falsch: Als Gegenbeispiel betrachten wir etwa die konstante Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$; da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist, ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sicher divergent. Da aber die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} a_k}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} 1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

als harmonische Reihe divergiert, ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} a_k}$ nicht absolut konvergent.

2.32 a) In Abhängigkeit von $k \in \mathbb{N}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

zu betrachten. Für die n–te Partialsumme mit $n > k$ gilt

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+k} \right) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \right) - \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+k} \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{n} \right) - \\ &\qquad - \left(\frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+k} \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k} \right) - \left(\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+k} \right), \end{aligned}$$

und wegen

$$\underbrace{\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{n+k}}_{\to 0}}_{k \text{ Summanden}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} k \cdot 0 = 0$$

wir erhalten den Grenzwert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}.$$

b) Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen $a_n > 0$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ als konvergent vorausgesetzt. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt nun

- im Falle $a_n \leq a_{n+1}$ wegen $a_{n+1} > 0$ nach dem Monotoniegesetz der Multiplikation $a_n \cdot a_{n+1} \leq a_{n+1} \cdot a_{n+1} = a_{n+1}^2$, woraus wegen der Monotonie der Quadratwurzel $\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq a_{n+1}$ und wegen $a_n \geq 0$ dann $\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq a_n + a_{n+1}$ folgt;
- im Falle $a_{n+1} \leq a_n$ wegen $a_n > 0$ nach dem Monotoniegesetz der Multiplikation $a_n \cdot a_{n+1} \leq a_n \cdot a_n = a_n^2$, woraus wegen der Monotonie der Quadratwurzel $\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq a_n$ und wegen $a_{n+1} \geq 0$ dann $\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq a_n + a_{n+1}$ folgt;

damit gilt stets $\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq a_n + a_{n+1}$. Zu dieser Abschätzung gelangt man alternativ ohne Fallunterscheidung über

$$0 \leq \left(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}}\right)^2 = \sqrt{a_n}^2 - 2\sqrt{a_n}\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_{n+1}}^2$$

und damit

$$\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq 2\sqrt{a_n}\sqrt{a_{n+1}} \leq \sqrt{a_n}^2 + \sqrt{a_{n+1}}^2 = a_n + a_{n+1}.$$

Folglich besitzt die zu untersuchende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ die Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$; mit der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ und somit deren Summe $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + a_{n+1})$ konvergent, so daß nach dem Majorantenkriterium die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n a_{n+1}}$ konvergiert.

2.33 Für die gegebene Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen werden die beiden Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad \text{mit} \quad b_k = \frac{a_k}{1+a_k} \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}$$

betrachtet; für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt dabei wegen

$$0 < a_k < 1 + a_k \qquad \text{dann} \qquad 0 < b_k = \frac{a_k}{1+a_k} < 1$$

mit

$$b_k = \frac{a_k}{1+a_k} \iff (1+a_k)\, b_k = a_k \iff b_k + a_k b_k = a_k \iff$$

$$\iff b_k = a_k - a_k b_k \iff b_k = a_k\,(1-b_k) \iff a_k = \frac{b_k}{1-b_k}.$$

Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ nach Voraussetzung konvergiert, ist die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ihrer Glieder eine Nullfolge; damit ergibt sich aber auch

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{b_k}{1-b_k} = \frac{\lim_{k\to\infty} b_k}{1-\lim_{k\to\infty} b_k} = \frac{0}{1-0} = 0.$$

Folglich gibt es insbesondere zu $\varepsilon = 1$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \geq k_0$

$$|a_k - 0| < \varepsilon, \qquad \text{also} \qquad -1 < a_k < 1 \quad \text{und damit} \quad 0 < 1 + a_k < 2,$$

und damit

$$|a_k| \underset{a_k>0}{=} a_k = \underbrace{(1+a_k)}_{<2} \cdot \underbrace{\frac{a_k}{1+a_k}}_{>0} < 2 \cdot \frac{a_k}{1+a_k} = 2b_k$$

gilt. Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ nach Voraussetzung konvergiert, konvergieren auch die Reihen $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ sowie $\sum_{k=k_0}^{\infty} 2b_k$, so daß die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ die konvergente Majorante $\sum_{k=k_0}^{\infty} 2b_k$ besitzt; damit ist nach dem Majorantenkriterium die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$, also auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, (absolut) konvergent.

2.34 a) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent, insbesondere also konvergent, und damit ist die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ihrer Glieder eine Nullfolge, insbesondere also beschränkt; es gibt also eine Schranke $M \in \mathbb{R}^+$ mit

$$|a_k| \leq M \qquad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar, also differenzierbar mit einer stetigen Ableitung $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; die stetige Funktion $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist damit auf dem abgeschlossenen Intervall $[-M, M] \subseteq \mathbb{R}$ nach dem Satz von Weierstraß beschränkt, es gibt also eine Schranke $C \in \mathbb{R}^+$ mit

$$|f'(x)| \leq C \qquad \text{für alle} \quad x \in [-M, M]\,.$$

Wir zeigen nun

$$(*) \qquad |f(a_k)| \leq C \cdot |a_k| \qquad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}_0;$$

für $a_k = 0$ ist $f(a_k) = 0$ und damit $(*)$ trivialerweise erfüllt. Für $a_k \neq 0$ existiert nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein ξ_k zwischen 0 und a_k mit

$$f(a_k) - f(0) = f'(\xi_k) \cdot (a_k - 0), \qquad \text{also} \qquad f(a_k) = f'(\xi_k) \cdot a_k;$$

wegen $|a_k| \leq M$ gilt auch $|\xi_k| \leq M$, und wir erhalten

$$|f(a_k)| = |f'(\xi_k) \cdot a_k| = |f'(\xi_k)| \cdot |a_k| \leq C \cdot |a_k|\,, \quad \text{also} \quad (*).$$

Da die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent ist, konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ und damit auch die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (C \cdot |a_k|)$; diese ist gemäß $(*)$ eine Majorante der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f(a_k)$, die folglich nach dem Majorantenkriterium absolut konvergiert.

b) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{|x|},$$

ist (als Komposition der Quadratwurzel und des Absolutbetrags) stetig, und es gilt $f(0) = \sqrt{|0|} = 0$; für

$$a_0 = 0 \qquad \text{und} \qquad a_k = \frac{1}{k^2} \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}$$

ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ bekanntlich (absolut) konvergent, während die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f(a_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{\left|\frac{1}{k^2}\right|} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ bekanntlich divergiert.

2.35 a) Für die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nichtnegativer reeller Zahlen $a_n \geq 0$ bzw. positiver reeller Zahlen $b_n > 0$ wird

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

vorausgesetzt; speziell zu $\varepsilon = 1 > 0$ existiert damit ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ dann

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \left|\frac{a_n}{b_n} - 0\right| < 1 \qquad \text{und damit} \qquad |a_n| \leq |b_n| \underset{b_n>0}{=} b_n$$

gilt. Wenn nun die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert, konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n$ und stellt somit eine konvergente Majorante für die Reihe $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ dar; nach dem Majorantenkriterium ist damit die Reihe $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ (sogar absolut) konvergent, und folglich konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Wir betrachten die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{1}{n} \geq 0 \qquad \text{und} \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \neq 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; wegen

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \left|\frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n}\right| = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Da nun $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

nach dem Leibnizkriterium, während die harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

bekanntlich divergiert. Damit gilt die Aussage von a) nicht mehr, wenn man von der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lediglich $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ fordert; es sei allerdings bemerkt, daß man bei der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf die Eigenschaft $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ verzichten kann.