LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Differential– und Integralrechnung 1
— Lösungsvorschlag —

1.1 Das Prinzip der vollständigen Induktion lautet:

„Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage. Dabei gelte:

- $A(1)$ ist richtig.
- Für jedes beliebige $n \in \mathbb{N}$ gilt: ist $A(n)$ richtig, so ist auch $A(n+1)$ richtig.

Damit ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig.“

Wir beweisen damit $A(n)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, k^2 = (-1)^{n+1}\, \frac{n\,(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

„$n = 1$“:

$$\sum_{k=1}^{1} (-1)^{k+1}\, k^2 = (-1)^{1+1}\, 1^2 = 1 = (-1)^{1+1} \cdot \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

„$n \to n+1$“:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1}\, k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, k^2\right) + (-1)^{n+2}\,(n+1)^2 =$$
$$= (-1)^{n+1}\, \frac{n\,(n+1)}{2} + (-1)^{n+2}\,(n+1)^2 = (-1)^{n+1}\, \frac{n+1}{2} \cdot (n - 2\,(n+1)) =$$
$$= (-1)^{n+1}\, \frac{n+1}{2} \cdot (-n-2) = (-1)^{n+2}\, \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}.$$

1.2 Wir beweisen die Gleichheit

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ mit Hilfe vollständiger Induktion:

„$n = 2$“:

$$\prod_{k=2}^{2} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = 1 - \frac{2}{2(2+1)} = \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{2}\right)$$

„$n \to n+1$“:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right) &= \left(\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n}-\frac{2}{(n+1)(n+2)}-\frac{4}{n(n+1)(n+2)}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2(n+1)(n+2)-2n-4}{n(n+1)(n+2)}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2n^2+6n+4-2n-4}{n(n+1)(n+2)}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2n^2+4n}{n(n+1)(n+2)}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2n(n+2)}{n(n+1)(n+2)}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

1.3 Wir weisen anhand der Definition nach, daß die gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{(\sin n)^3 - 3\,\cos n}{\sqrt{n}} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

den Grenzwert $a = 0$ besitzt; sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
|a_n - a| &= \left|\frac{(\sin n)^3 - 3\,\cos n}{\sqrt{n}} - 0\right| = \frac{|(\sin n)^3 - 3\,\cos n|}{\sqrt{n}} \leq \\
&\leq \frac{|(\sin n)^3| + |3\,\cos n|}{\sqrt{n}} = \frac{|\sin n|^3 + 3\cdot|\cos n|}{\sqrt{n}} \leq \frac{1^3+3\cdot 1}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

mit

$$\frac{4}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \frac{4}{\varepsilon} < \sqrt{n} \iff \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^2 < n.$$

Wir wählen eine natürliche Zahl $N = N(\varepsilon)$ mit $N > \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^2$, so daß wir für alle $n \geq N$ wegen $n > \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^2$ damit

$$|a_n - a| \leq \frac{4}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

erhalten.

1.4 Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ ergibt sich für ein fest gewähltes $r > 0$ zunächst

$$a_n = \frac{\sqrt{r\,n}}{1+r\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{r}\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+r\right)} = \frac{\sqrt{r}}{\frac{1}{\sqrt{n}}+r} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{r}}{0+r} = \frac{1}{\sqrt{r}};$$

damit besitzt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert $a = \dfrac{1}{\sqrt{r}} \in \mathbb{R}$. Dabei gilt

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= \left| \frac{\sqrt{r\,n}}{1+r\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{r}} \right| = \left| \frac{\sqrt{r\,n}\cdot\sqrt{r} - 1\cdot(1+r\sqrt{n})}{(1+r\sqrt{n})\cdot\sqrt{r}} \right| \\ &= \left| \frac{r\sqrt{n} - 1 - r\sqrt{n}}{(1+r\sqrt{n})\cdot\sqrt{r}} \right| = \left| \frac{-1}{(1+r\sqrt{n})\cdot\sqrt{r}} \right| \\ &= \frac{1}{(1+r\sqrt{n})\cdot\sqrt{r}} \le \frac{1}{r\sqrt{n}\cdot\sqrt{r}} = \frac{1}{r\sqrt{r}\sqrt{n}} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, und es ist

$$\frac{1}{r\sqrt{r}\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \frac{1}{r\sqrt{r}\,\varepsilon} < \sqrt{n} \iff \frac{1}{r^3\,\varepsilon^2} < n;$$

wir können also jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \dfrac{1}{r^3\,\varepsilon^2}$ wählen, und für alle $n \ge n_0$ gilt dann $n > \dfrac{1}{r^3\,\varepsilon^2}$ und damit

$$|a_n - a| \le \frac{1}{r\sqrt{r}\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

1.5 Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} a_n = \frac{(2n^2+1)(n+1)^n}{(3n+1)\,n^{n+1}} &= \frac{(2n^2+1)\cdot(n+1)^n}{(3n+1)\cdot(n\cdot n^n)} = \frac{2n^2+1}{(3n+1)\cdot n}\cdot\frac{(n+1)^n}{n^n} = \\ &= \frac{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(3+\frac{1}{n}\right)\cdot n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \end{aligned}$$

so daß der erste Faktor wegen

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

als Quotient konvergenter Folgen selbst konvergiert mit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3};$$

der zweite Faktor ist eine bekanntlich monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge mit dem Grenzwert e, so daß die gegebene Folge als Produkt konvergenter Folgen selbst konvergiert, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}}}_{\to\frac{2}{3}}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e}\right) = \frac{2}{3}\,e.$$

1.6 Mit der Gaußformel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ergibt sich

$$a_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2} = \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2\,n} = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2\,n}}_{\to 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2};$$

damit konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $a = \frac{1}{2}$.

Mit der Summenformel für eine geometrische Summe ergibt sich ferner

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{7^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{2}{7}\right)^k = \frac{1 - \overbrace{\left(-\frac{2}{7}\right)^{n+1}}^{\to 0,\text{ da } \left|-\frac{2}{7}\right|<1}}{1-\left(-\frac{2}{7}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{7}\right)} = \frac{1}{\frac{9}{7}} = \frac{7}{9};$$

damit konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $a = \frac{7}{9}$.

Mit der Regel von de l'Hospital erhält man schließlich den Funktionengrenzwert

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1-\cos x}{x} \underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{1} = \sin 0 = 0,$$

wobei über

$$\lim_{x\to 0+} \cos x = \cos 0 = 1 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0+} \sin x = \sin 0 = 0$$

die Stetigkeit von Cosinus und Sinus an der Stelle 0 eingeht; wegen $\frac{1}{n} \to 0+$ für $n \to \infty$ ergibt sich damit der Folgengrenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$$

1.7 Zu betrachten ist die durch $f_1 = f_2 = 1$ und

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \qquad \text{für alle} \quad n \geq 2$$

rekursiv definierte Fibonacci–Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Wir zeigen die Ungleichung

$$f_n \geq \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^n \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N}$$

mit vollständiger Induktion:

- Für „$n = 1$“ ist

$$f_1 = 1 \geq \frac{2}{3} = \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^1,$$

und für „$n = 2$“ ist sogar

$$f_2 = 1 = \frac{4}{9}\cdot\frac{9}{4} = \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^2, \quad \text{insbesondere also} \quad f_2 \geq \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

- Für „$n \to n+1$“ für $n \geq 2$ ergibt sich

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \geq \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} =$$
$$= \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \underbrace{\left(\frac{3}{2}+1\right)}_{=\frac{5}{2}=\frac{10}{4}\geq\frac{9}{4}} \geq \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \underbrace{\frac{9}{4}}_{=(\frac{3}{2})^2} = \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}.$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{f_k}{f_{k+1}} = \underbrace{\frac{f_1}{f_2}}_{\text{für } k=1} \cdot \underbrace{\frac{f_2}{f_3}}_{\text{für } k=2} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{f_{n-1}}{f_n}}_{\text{für } k=n-1} \cdot \underbrace{\frac{f_n}{f_{n+1}}}_{\text{für } k=n} =$$

$$= \frac{f_1 \cdot (f_2 \cdot \ldots \cdot f_{n-1} \cdot f_n)}{(f_2 \cdot \ldots \cdot f_{n-1} \cdot f_n) \cdot f_{n+1}} = \frac{f_1}{f_{n+1}} = \frac{1}{f_{n+1}},$$

und gemäß a) gilt

$$f_{n+1} \geq \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} > 0 \quad \text{und damit} \quad 0 < a_n = \frac{1}{f_{n+1}} \leq \frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1};$$

wegen $\left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1$ gilt

$$\frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

so daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach dem Schrankenlemma eine Nullfolge ist.

c) Gemäß a) gilt

$$f_n \geq \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^{n} > 0 \quad \text{und damit} \quad \left|\frac{1}{f_n}\right| = \frac{1}{f_n} \leq \frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n},$$

so daß die zu betrachtende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f_n}$ die Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ besitzt; diese ist eine geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c\,q^n$ mit $c = \frac{9}{4}$ und $q = \frac{2}{3}$, die wegen $|q| = \frac{2}{3} < 1$ konvergiert. Folglich ist nach dem Majorantenkriterium auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f_n}$ (absolut) konvergent.

1.8 Wir untersuchen das Konvergenzverhalten der gegebenen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \frac{1-x^n}{1+x^n} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

mit der folgenden Fallunterscheidung hinsichtlich des Parameters $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

- Für $|x| < 1$ ist

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \qquad \text{und damit} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1+x^n} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

- Für $|x| > 1$ können wir

$$a_n = \frac{1-x^n}{1+x^n} = \frac{\frac{1}{x^n} - 1}{\frac{1}{x^n} + 1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ schreiben; wegen

$$\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} < 1 \qquad \text{ist} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n = 0$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x^n}-1}{\frac{1}{x^n}+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1.$$

- Für $|x| = 1$ ist wegen $x \neq -1$ nur $x = 1$ zu betrachten; wegen

$$a_n = \frac{1-1^n}{1+1^n} = \frac{1-1}{1+1} = 0 \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann eine Nullfolge.

1.9 Wir weisen die Konvergenz der durch

$$x_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(x_n^3+1\right) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dadurch nach, indem wir jeweils mit vollständiger Induktion zeigen, daß $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und (etwa durch 0) nach unten beschränkt ist:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \geq x_{n+1}$:
  „$n = 1$“: Es ist $x_1 = 1$ und $x_2 = \frac{1}{3}\left(x_1^3+1\right) = \frac{2}{3}$, also $x_1 \geq x_2$.
  „$n \to n+1$“: Aus der Induktionsvoraussetzung $x_n \geq x_{n+1}$ folgt wegen der Monotonie der dritten Potenz $x_n^3 \geq x_{n+1}^3$, woraus sich mit dem Monotoniegesetz der Addition

$$x_n^3 + 1 \geq x_{n+1}^3 + 1$$

  sowie mit dem Monotoniegesetz der Multiplikation

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(x_n^3+1\right) \geq \frac{1}{3}\left(x_{n+1}^3+1\right) = x_{n+2},$$

  also die Induktionsbehauptung, ergibt.
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \geq 0$:
  „$n = 1$“: Es ist $x_1 = 1$, also $x_1 \geq 0$.
  „$n \to n+1$“: Aus der Induktionsvoraussetzung $x_n \geq 0$ folgt $x_n^3 \geq 0$ und damit in

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(x_n^3+1\right) \geq \frac{1}{3}\left(0^3+1\right) = \frac{1}{3} \geq 0$$

  die Induktionsbehauptung.

Die Bestimmung des in seiner Existenz nachgewiesenen Grenzwertes $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ist nicht verlangt.

1.10 Gegeben ist die durch den Startwert $a_0 = 1$ und die Rekursionsvorschrift

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1 \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$; wir zeigen jeweils mit vollständiger Induktion:

- Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $a_n \leq a_{n+1}$: für „$n = 0$" ist

  $$a_0 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_1 = \frac{a_0}{2} + 1 = \frac{3}{2}, \qquad \text{also} \qquad a_0 \leq a_1,$$

  und für „$n \to n+1$" folgt aus $a_n \leq a_{n+1}$ zunächst mit dem Monotoniegesetz der Multiplikation

  $$\frac{a_n}{2} = \frac{1}{2} \cdot a_n \underset{\text{wegen } \frac{1}{2}>0}{\leq} \frac{1}{2} \cdot a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{2}$$

  und dann mit dem Monotoniegesetz der Addition

  $$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1 \leq \frac{a_{n+1}}{2} + 1 = a_{n+2}.$$

  Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton wachsend.
- Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $a_n \leq 42$: für „$n = 0$" ist

  $$a_0 = 1, \qquad \text{also} \qquad a_0 \leq 42,$$

  und für „$n \to n+1$" folgt aus $a_n \leq 42$ zunächst mit dem Monotoniegesetz der Multiplikation

  $$\frac{a_n}{2} = \frac{1}{2} \cdot a_n \underset{\text{wegen } \frac{1}{2}>0}{\leq} \frac{1}{2} \cdot 42 = 21$$

  und dann mit dem Monotoniegesetz der Addition

  $$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1 \leq 21 + 1 = 22, \qquad \text{insbesondere also} \qquad a_{n+1} \leq 42.$$

  Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nach oben beschränkt.

Insgesamt ist also die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, nach dem Hauptsatz über monotone Folgen mithin konvergent.

1.11 a) Wir zeigen $a_n \leq a_{n+1} \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit vollständiger Induktion:
„$n = 0$": Es ist $a_0 = 1$ und $a_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ und damit $a_0 \leq a_1 \leq 2$.
„$n \to n+1$": Aus der Induktionsvoraussetzung

$$a_n \leq a_{n+1} \leq 2$$

folgt zunächst

$$1 + a_n \leq 1 + a_{n+1} \leq 3,$$

woraus sich wegen der Monotonie der Quadratwurzel

$$\sqrt{1+a_n} \leq \sqrt{1+a_{n+1}} \leq \sqrt{3} \leq 2,$$

also die Induktionsbehauptung

$$a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq 2$$

ergibt.

b) Gemäß a) ist die gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- wegen $a_n \le a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ monoton wachsend und
- wegen $a_n \le 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach oben beschränkt,

insgesamt also konvergent.

c) Für den gemäß b) existierenden Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+a_n} = \sqrt{1+\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{1+a}$$

und damit $a^2 = 1 + a$ bzw. $a^2 - a - 1 = 0$, also

$$a = \frac{1}{2}\left(-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot(-1)}\right) = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2};$$

da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, ergibt sich daraus $a \ge a_0 = 1$ und damit $a = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$.

1.12 a) Wir zeigen zunächst $a_n \le a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

„$n = 1$“:

$$a_1 = 1 \le \sqrt{13} = a_2.$$

„$n \to n+1$“:

$$a_n \le a_{n+1} \Longrightarrow 12 + a_n \le 12 + a_{n+1} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow a_{n+1} = \sqrt{12+a_n} \le \sqrt{12+a_{n+1}} = a_{n+2}.$$

Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, insbesondere also durch $a_1 = 1$ nach unten beschränkt.

Wir zeigen nun noch $a_n \le 13$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

„$n = 1$“:

$$a_1 = 1 \le 13.$$

„$n \to n+1$“:

$$a_n \le 13 \Longrightarrow 12 + a_n \le 25 \Longrightarrow a_{n+1} = \sqrt{12+a_n} \le \sqrt{25} = 5 \le 13.$$

Zum Nachweis, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist, ist ja lediglich *irgendeine* obere Schranke b, hier $b = 13$ zu finden; es muß sich dabei in keinster Weise um das Supremum der Folgenglieder handeln.

b) Nach a) ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt; damit ist die Folge auch konvergent. Für den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{12+a_n} = \sqrt{12+\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{12+a}$$

und damit $a^2 = 12 + a$ bzw. $a^2 - a - 12 = 0$, also

$$a = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1+48}\right) = \frac{1 \pm 7}{2}$$

und folglich $a = -3$ oder $a = 4$; da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, ergibt sich daraus $a \ge a_1 = 1$ und damit $a = 4$.

1.13 a) Wir zeigen die Behauptung mit vollständiger Induktion:

„$n = 1$“:

$$\text{Es ist } a_1 = 5 \text{ und damit } 3 \leq a_1 \leq 5.$$

„$n \to n+1$“:

$$3 \leq a_n \leq 5 \Longrightarrow 4 \geq 7 - a_n \geq 2 \Longrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2}{7-a_n} \leq 1 \Longrightarrow$$
$$\frac{7}{2} \leq 3 + \frac{2}{7-a_n} \leq 4 \Longrightarrow 3 \leq a_{n+1} \leq 5$$

b) Wir zeigen $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

„$n = 1$“:

$$a_1 = 5 \geq 4 = 3 + \frac{2}{7-5} = a_2.$$

„$n \to n+1$“:

$$a_n \geq a_{n+1} \Longrightarrow 7 - a_n \leq 7 - a_{n+1} \Longrightarrow \frac{2}{7-a_n} \geq \frac{2}{7-a_{n+1}} \Longrightarrow$$
$$a_{n+1} = 3 + \frac{2}{7-a_n} \geq 3 + \frac{2}{7-a_{n+1}} = a_{n+2}$$

Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und gemäß a) beschränkt, folglich ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

c) Für den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ gilt $3 \leq a \leq 5$ gemäß a), und damit erhält man

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{2}{7-a_n}\right) = 3 + \frac{2}{7 - \lim\limits_{n\to\infty} a_n} = 3 + \frac{2}{7-a}.$$

Damit folgt

$$(a-3)\,(7-a) = 2 \Longrightarrow -a^2 + 10\,a - 21 = 2 \Longrightarrow$$
$$a^2 - 10\,a + 23 = 0 \Longrightarrow a = \frac{10 \pm \sqrt{8}}{2} = 5 \pm \sqrt{2};$$

wegen $3 \leq a \leq 5$ folgt hieraus schon $a = 5 - \sqrt{2}$.

1.14 a) Wir zeigen $1 \leq a_n \leq 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

„$n = 1$“:

$$\text{Es ist } a_1 = \frac{7}{2} \quad \text{und damit} \quad 1 \leq a_1 \leq 5.$$

„$n \to n+1$“:

$$1 \leq a_n \leq 5 \Longrightarrow 9 \geq 11 - 2\,a_n \geq 1 \Longrightarrow 3 \geq \sqrt{11 - 2\,a_n} \geq 1 \Longrightarrow$$
$$2 \leq 5 - \sqrt{11 - 2\,a_n} \leq 4 \Longrightarrow 1 \leq a_{n+1} \leq 5$$

b) Wir zeigen $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

„$n = 1$“:

$$a_1 = \frac{7}{2} \geq 3 = 5 - \sqrt{11 - 2 \cdot \frac{7}{2}} = a_2.$$

„$n \to n+1$“:

$$a_n \geq a_{n+1} \Longrightarrow 11 - 2\,a_n \leq 11 - 2\,a_{n+1} \Longrightarrow \sqrt{11 - 2\,a_n} \leq \sqrt{11 - 2\,a_{n+1}} \Longrightarrow$$
$$a_{n+1} = 5 - \sqrt{11 - 2\,a_n} \geq 5 - \sqrt{11 - 2\,a_{n+1}} = a_{n+2}$$

Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und gemäß a) beschränkt, folglich ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

c) Für den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ gilt $1 \leq a \leq 5$ gemäß a), und wegen der Stetigkeit der Quadratwurzel erhält man

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(5 - \sqrt{11 - 2\,a_n}\right) =$$
$$= 5 - \sqrt{11 - 2 \lim_{n\to\infty} a_n} = 5 - \sqrt{11 - 2\,a}.$$

Damit folgt

$$a - 5 = -\sqrt{11 - 2\,a} \Longrightarrow (a-5)^2 = \left(-\sqrt{11 - 2\,a}\right)^2 \Longrightarrow$$
$$a^2 - 10\,a + 25 = 11 - 2\,a \Longrightarrow a^2 - 8\,a + 14 = 0 \Longrightarrow$$
$$a = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 14}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{8}}{2} = 4 \pm \sqrt{2};$$

wegen $1 \leq a \leq 5$ folgt hieraus schon

$$a = 4 - \sqrt{2}.$$

1.15 Wir zeigen zunächst $0 \leq x_{n+1} \leq x_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

„$n = 1$“: Es ist

$$x_1 = 1 \qquad \text{und damit} \qquad x_2 = 1 - \frac{1^3}{10} + \frac{1^5}{100} = \frac{91}{100},$$

insgesamt also $0 \leq x_2 \leq x_1 \leq 1$.

„$n \to n+1$“: Es ist $0 \leq x_{n+1} \leq x_n \leq 1$, insbesondere $x_{n+1} \leq 1$, und damit

$$1 - \frac{x_{n+1}^2}{10} = 1 - \underbrace{\frac{1}{10} \cdot \underbrace{x_{n+1}^2}_{\leq 1}}_{\leq \frac{1}{10}} \geq 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \geq 0,$$

woraus sich zum einen

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{x_{n+1}^3}{10} + \frac{x_{n+1}^5}{100} = \underbrace{x_{n+1}}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{x_{n+1}^2}{10}\right)}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{x_{n+1}^5}{100}}_{\geq 0} \geq 0$$

und zum anderen

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{x_{n+1}^3}{10} + \frac{x_{n+1}^5}{100} = \underbrace{x_{n+1}}_{\leq 1} - \underbrace{\frac{x_{n+1}^3}{10}}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{x_{n+1}^2}{10}\right)}_{\geq 0} \leq x_{n+1} \leq 1,$$

insgesamt also $0 \leq x_{n+2} \leq x_{n+1} \leq 1$ ergibt.

Damit ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wegen $x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ monoton fallend und wegen $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach unten beschränkt, insgesamt also konvergent. Für ihren Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ergibt sich

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(x_n - \frac{x_n^3}{10} + \frac{x_n^5}{100}\right) = a - \frac{a^3}{10} + \frac{a^5}{100}$$

und damit

$$0 = -\frac{a^3}{10} + \frac{a^5}{100} = -\frac{a^3}{100}\left(10 - a^2\right), \qquad \text{also} \qquad a \in \left\{-\sqrt{10}, 0, \sqrt{10}\right\},$$

woraus man wegen $0 \leq a \leq 1$ schon $a = 0$ erhält.

1.16 a) Wir zeigen $x_n \leq x_{n+1} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe vollständiger Induktion:

„$n = 0$“:

$$\text{Es ist } x_1 = 0, \text{ also } x_2 = e^{0-1} = \frac{1}{e} \text{ und damit } x_1 \leq x_2 \leq 1.$$

„$n \to n+1$“:

$$x_n \leq x_{n+1} \leq 1 \Longrightarrow x_n - 1 \leq x_{n+1} - 1 \leq 0 \Longrightarrow$$
$$\underset{\text{exp monoton steigend}}{\Longrightarrow} e^{x_n - 1} \leq e^{x_{n+1}-1} \leq e^0 \Longrightarrow x_{n+1} \leq x_{n+2} \leq 1$$

Damit ist die gegebene Folge monoton wachsend und durch 1 nach oben beschränkt.

b) Die gegebene Folge ist gemäß a) monoton wachsend und nach oben beschränkt, mithin konvergent. Für den Grenzwert

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n$$

ergibt sich aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{n\to\infty} e^{x_n - 1} = e^{a-1}$$

und folglich mit Hilfe der Rekursionsvorschrift

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} e^{x_n - 1} = e^{a-1},$$

weswegen der Grenzwert a eine Nullstelle der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{x-1} - x,$$

ist. Wegen

$$f(1) = e^{1-1} - 1 = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

ist 1 eine Nullstelle von f; wir weisen im folgenden nach, daß f keine weiteren Nullstellen besitzt, weswegen für den Grenzwert $a = 1$ gelten muß.

Die Funktion f ist (als Summe der Exponentialfunktion und einer linearen Funktion) stetig und differenzierbar mit

$$f'(x) = e^{x-1} - 1 \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}:$$

- für alle $x < 1$ ist $x - 1 < 0$ und damit

  $$f'(x) = \underbrace{e^{x-1}}_{<1} - 1 < 0;$$

  folglich ist f auf $]-\infty; 1]$ streng monoton fallend; insbesondere gilt $f(x) > f(1) = 0$ für alle $x < 1$.
- für alle $x > 1$ ist $x - 1 > 0$ und damit

  $$f'(x) = \underbrace{e^{x-1}}_{>1} - 1 > 0;$$

  folglich ist f auf $[1; +\infty[$ streng monoton steigend; insbesondere gilt $f(x) > f(1) = 0$ für alle $x > 1$.

1.17 a) Wir zeigen Sie $a_n \geq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe vollständiger Induktion:

„$n = 0$“: Es ist $a_0 = 3$ und damit $a_0 \geq 2$.

„$n \to n + 1$“: Es ist $a_n \geq 2$, insbesondere also $a_n > 0$, und es folgt

$$a_{n+1} - 2 = \frac{a_n^2 + 4}{2\,a_n} - 2 = \frac{(a_n^2 + 4) - 2 \cdot (2\,a_n)}{2\,a_n} =$$

$$= \frac{a_n^2 - 4\,a_n + 4}{2\,a_n} = \frac{(a_n - 2)^2}{2\,a_n} \geq 0, \qquad \text{also} \quad a_{n+1} \geq 2.$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt wegen $a_n \geq 2$ zum einen $a_n^2 \geq 4$, also $a_n^2 - 4 \geq 0$, und zum anderen $2\,a_n \geq 4 > 0$, woraus sich

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2 + 4}{2\,a_n} = \frac{a_n \cdot (2\,a_n) - (a_n^2 + 4)}{2\,a_n} = \frac{a_n^2 - 4}{2\,a_n} \geq 0$$

und damit $a_n \geq a_{n+1}$ ergibt; folglich ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton fallend.

c) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist gemäß a) etwa durch 2 nach unten beschränkt und gemäß b) monoton fallend, insgesamt also konvergent. Für ihren Grenzwert $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ gilt damit $a \geq 2$, und wir erhalten mit der Rekursionsvorschrift

$$a = \lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n^2 + 4}{2\,a_n} = \frac{a^2 + 4}{2\,a},$$

woraus sich

$$2\,a^2 = a^2 + 4, \qquad \text{also} \qquad a^2 = 4,$$

und damit wegen $a \geq 2$ schon $a = 2$ ergibt.

1.18 a) Wir zeigen $a_n > \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe vollständiger Induktion:

„$n = 1$“:

$$a_1 = 1 > \frac{1}{2}.$$

„$n \to n+1$“: Wegen $a_n > \frac{1}{2}$ ist $a_n - \frac{1}{2} > 0$ sowie $a_n > 0$ und $2 + a_n > 0$, woraus sich

$$a_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1 + a_n^2}{2 + a_n} - \frac{1}{2} = \frac{2\,(1 + a_n^2) - (2 + a_n)}{2\,(2 + a_n)} = \frac{2 + 2\,a_n^2 - 2 - a_n}{2\,(2 + a_n)} =$$

$$= \frac{2\,a_n^2 - a_n}{2\,(2 + a_n)} = \frac{2\,a_n(a_n - \frac{1}{2})}{2\,(2 + a_n)} = \frac{a_n(a_n - \frac{1}{2})}{2 + a_n} > 0$$

und damit $a_{n+1} > \frac{1}{2}$ ergibt.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n > \frac{1}{2}$ gemäß a) und damit $2\,a_n > 1$, also $1 - 2\,a_n < 0$, sowie $2 + a_n > 0$, woraus sich

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1 + a_n^2}{2 + a_n} - a_n = \frac{(1 + a_n^2) - a_n\,(2 + a_n)}{2 + a_n} =$$

$$= \frac{1 + a_n^2 - 2\,a_n - a_n^2}{2 + a_n} = \frac{1 - 2\,a_n}{2 + a_n} < 0$$

und damit $a_{n+1} < a_n$ ergibt; damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend. Da sie zudem gemäß a) nach unten (durch $\frac{1}{2}$) beschränkt ist, ergibt sich daraus schon ihre Konvergenz. Für ihren Grenzwert

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

gilt dann unter Verwendung der Rekursionsvorschrift

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + a_n^2}{2 + a_n} = \frac{1 + a^2}{2 + a},$$

woraus sich

$$a\,(2 + a) = 1 + a^2, \qquad \text{also} \qquad 2\,a + a^2 = 1 + a^2,$$

und damit

$$2\,a = 1, \qquad \text{also} \qquad a = \frac{1}{2}$$

ergibt.

1.19 a) Wir zeigen zunächst $1 \le a_n \le 3$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe vollständiger Induktion:

„$n = 0$“:

$$\text{Es ist } a_0 \in [1, 3] \text{ und damit } 1 \le a_0 \le 3.$$

„$n \to n+1$“:

$$1 \le a_n \le 3 \Longrightarrow 1^2 \le a_n^2 \le 3^2 \Longrightarrow \frac{1}{4} \le \frac{1}{4}\,a_n^2 \le \frac{9}{4} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \le \frac{1}{4}\,a_n^2 + \frac{3}{4} \le \frac{9}{4} + \frac{3}{4} \Longrightarrow 1 \le a_{n+1} \le 3$$

Damit ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{4}\,a_n^2 + \frac{3}{4}\right) - a_n = \frac{1}{4} \cdot \left(a_n^2 + 3 - 4a_n\right) =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \left(a_n^2 - 4a_n + 3\right) \underset{\text{Vieta}}{=} \frac{1}{4} \cdot \underbrace{(a_n - 1)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(a_n - 3)}_{\leq 0} \leq 0,$$

also $a_{n+1} \leq a_n$; damit ist die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ monoton fallend.

b) Gemäß a) ist die gegebene Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ für jeden Startwert $a_0 \in [1, 3]$ monoton fallend und (durch 1) nach unten beschränkt, mithin konvergent. Für ihren Grenzwert

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n$$

gilt dann unter Verwendung der Rekursionsvorschrift

$$a = \lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{4}\,a_n^2 + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\,a^2 + \frac{3}{4},$$

woraus sich

$$0 = a^2 - 4\,a + 3 \underset{\text{Vieta}}{=} (a - 1)\,(a - 3)$$

und damit $a = 1$ oder $a = 3$ ergibt; dies motiviert die folgende Fallunterscheidung hinsichtlich des Startwertes $a_0 \in [1, 3]$:

- Für $a_0 \in [1, 3[$ gilt im Hinblick auf das in a) ermittelte Monotonieverhalten der Folge $a \leq a_0 < 3$ und damit $a = 1$.
- Für $a_0 = 3$ ist $a_1 = \frac{1}{4} \cdot 3^2 + \frac{3}{4} = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3$ und analog $a_n = 3$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; damit ist $(a_n)_{n \geq 0}$ eine konstante Folge mit $a = 3$.

1.20 Im Falle der Konvergenz der durch die Rekursionsvorschrift

$$x_{n+1} = \frac{1}{5}\left(x_n^2 + 6\right) \qquad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

definierten Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ kommen für den Grenzwert $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ wegen

$$a = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{5}\left(x_n^2 + 6\right) = \frac{1}{5}\left(a^2 + 6\right)$$

und damit

$$0 = a^2 - 5\,a + 6 \underset{\text{Vieta}}{=} (a - 2)(a - 3)$$

nur die beiden Werte $a = 2$ und $a = 3$ in Frage. Dies motiviert die folgende Fallunterscheidung hinsichtlich des Startwertes $x_0 \in [0; 3]$:

- Für $x_0 = 2$ ist $x_1 = \frac{1}{5}\left(2^2 + 6\right) = \frac{1}{5} \cdot 10 = 2$ und analog $x_n = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; damit ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine konstante Folge mit Grenzwert $a = 2$.
- Für $x_0 = 3$ ist $x_1 = \frac{1}{5}\left(3^2 + 6\right) = \frac{1}{5} \cdot 15 = 3$ und analog $x_n = 3$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; damit ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine konstante Folge mit Grenzwert $a = 3$.

- Für $x_0 \in \,]2;3[$ zeigen wir zunächst $x_n \in \,]2;3[$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe vollständiger Induktion: für „$n = 0$" ist dies klar, und für „$n \to n+1$" gilt

$$x_n \in \,]2;3[\Longrightarrow 2 < x_n < 3 \Longrightarrow 4 < x_n^2 < 9 \Longrightarrow 10 < x_n^2 + 6 < 15 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 2 < \frac{1}{5}\left(x_n^2 + 6\right) < 3 \Longrightarrow 2 < x_{n+1} < 3 \Longrightarrow x_{n+1} \in \,]2;3[\,.$$

  Damit ergibt sich aber

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{5}\left(x_n^2 + 6\right) - x_n = \frac{1}{5}\left(x_n^2 - 5\,x_n + 6\right) = \frac{1}{5}\underbrace{(x_n - 3)}_{<0}\underbrace{(x_n - 2)}_{>0} < 0$$

  und somit $x_{n+1} < x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; folglich ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ streng monoton fallend und (etwa durch 2) nach unten beschränkt, also konvergent; als Grenzwert kommt nur $a = 2$ in Frage.

- Für $x_0 \in [0;2[$ zeigen wir zunächst $x_n \in [0;2[$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe vollständiger Induktion: für „$n = 0$" ist dies klar, und für „$n \to n+1$" gilt

$$x_n \in [0;2[\Longrightarrow 0 \le x_n < 2 \Longrightarrow 0 \le x_n^2 < 4 \Longrightarrow 6 \le x_n^2 + 6 < 10 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{6}{5} \le \frac{1}{5}\left(x_n^2 + 6\right) < 2 \Longrightarrow 0 \le x_{n+1} < 2 \Longrightarrow x_{n+1} \in [0;2[\,.$$

  Damit ergibt sich aber

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{5}\left(x_n^2 + 6\right) - x_n = \frac{1}{5}\left(x_n^2 - 5\,x_n + 6\right) = \frac{1}{5}\underbrace{(x_n - 3)}_{<0}\underbrace{(x_n - 2)}_{<0} > 0$$

  und somit $x_{n+1} > x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; folglich ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ streng monoton wachsend und (etwa durch 2) nach oben beschränkt, also konvergent; als Grenzwert kommt nur $a = 2$ in Frage.

1.21 Für einen beliebigen Startwert $a_0 \in \mathbb{R}$ ist die durch

$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zu betrachten.

a) Sei $a_0 \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Startwert. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$a_{n+1} - a_n = \left(a_n^2 - a_n + 1\right) - a_n = a_n^2 - 2\,a_n + 1 = (a_n - 1)^2 \ge 0,$$

also $a_{n+1} \ge a_n$; damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton wachsend. Gemäß dem Hauptsatz über monotone Folgen gibt es nun hinsichtlich des Konvergenzverhaltens der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nur die beiden Alternativen:

- Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nach oben beschränkt, so ist sie konvergent. Für ihren in diesem Fall existierenden Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ erhält man mit Hilfe der Rekursionsvorschrift

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(a_n^2 - a_n + 1\right) = a^2 - a + 1,$$

  folglich

$$0 = \left(a^2 - a + 1\right) - a = a^2 - 2\,a + 1 = (a-1)^2,$$

  also $a - 1 = 0$ und damit zwingend $a = 1$.

- Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nicht nach oben beschränkt, so ist sie bestimmt divergent gegen $+\infty$.

b) Für einen Startwert $a_0 \in [0,1]$ zeigen wir $a_n \in [0,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit vollständiger Induktion:

- Für „$n = 0$“ gilt $a_0 \in [0,1]$ gemäß der Wahl des Startwerts.
- Für „$n \to n+1$“ gilt gemäß der Induktionsvoraussetzung $a_n \in [0,1]$, also $0 \le a_n \le 1$, woraus $a_n^2 \le a_n$ und damit

$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \le a_n - a_n + 1 = 1$$

folgt; mit der in a) gezeigten Monotonie gilt ferner $a_{n+1} \ge a_n \ge 0$.

Damit ist die gemäß a) monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auch (nach oben) beschränkt, mithin konvergent, und gemäß a) besitzt sie den Grenzwert $a = 1$.

c) Für einen Startwert $a_0 \notin [0,1]$ gilt $a_0 < 0$ oder $a_0 > 1$, insbesondere also $a_0^2 > a_0$, woraus

$$a_1 = a_0^2 - a_0 + 1 > a_0 - a_0 + 1 = 1$$

folgt. Unter der Annahme, die gemäß a) monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist nach oben beschränkt, erhält man ihre Konvergenz, und für ihren Grenzwert a ergibt sich in

$$a \underset{\text{Monotonie}}{\ge} a_1 > 1 \underset{\text{gemäß a)}}{=} a$$

ein Widerspruch. Folglich ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nicht nach oben beschränkt, mithin bestimmt divergent gegen $+\infty$.

1.22 a) Die Funktion

$$f :]0;\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{5}\left(4\,x + \frac{1}{x^4}\right),$$

ist (als gebrochen-rationale Funktion) differenzierbar, und für alle $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{5}\left(4 - \frac{4}{x^5}\right) = \frac{4}{5\,x^5}\left(x^5 - 1\right).$$

Für alle $0 < x \le 1$ ist $x^5 \le 1$ und damit

$$f'(x) = \underbrace{\frac{4}{5\,x^5}}_{>0} \cdot \underbrace{(x^5 - 1)}_{\le 0} \le 0,$$

so daß f auf $]0;1]$ monoton fällt, und für alle $x \ge 1$ ist $x^5 \ge 1$ und damit

$$f'(x) = \underbrace{\frac{4}{5\,x^5}}_{>0} \cdot \underbrace{(x^5 - 1)}_{\ge 0} \ge 0,$$

so daß f auf $[1;\infty[$ monoton steigt; insbesondere besitzt f in $x = 1$ ein globales Minimum, und für alle $x > 0$ gilt

$$f(x) \ge f(1) = \frac{1}{5}\left(4 \cdot 1 + \frac{1}{1^4}\right) = 1.$$

b) Für die durch einen Startwert $x_1 \geq 1$ und die Rekursionsvorschrift

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}$$

definierte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt gemäß a)

$$x_{k+1} = f(x_k) \geq 1 \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N};$$

damit ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch 1 nach unten beschränkt, und für alle $k \in \mathbb{N}$ erhält man infolgedessen

$$x_{k+1} - x_k = f(x_k) - x_k = \frac{1}{5}\left(4\,x_k + \frac{1}{x_k^4}\right) - x_k = \frac{1}{5}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{x_k^4}}_{\leq 1} - \underbrace{x_k}_{\geq 1}\Bigg) \leq 0.$$

c) Gemäß b) ist die gegebene Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wegen

$$x_{k+1} - x_k \leq 0, \qquad \text{also} \qquad x_{k+1} \leq x_k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ monoton fallend und zudem durch 1 nach unten beschränkt, mithin konvergent. Für den Grenzwert

$$x = \lim_{k\to\infty} x_k$$

gilt dann wegen $x \geq 1$ unter Verwendung der Rekursionsvorschrift

$$x = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{5}\left(4\,x_k + \frac{1}{x_k^4}\right) = \frac{1}{5}\left(4\,x + \frac{1}{x^4}\right),$$

woraus sich

$$5\,x = 4\,x + \frac{1}{x^4}, \qquad \text{also} \qquad x = \frac{1}{x^4},$$

und damit

$$x^5 = 1, \qquad \text{also} \qquad x = 1,$$

ergibt.

1.23 Zu betrachten ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^x;$$

gemäß der Definition der allgemeinen Potenz

$$a^b = \exp(b \cdot \ln a) \qquad \text{für alle} \quad a \in \mathbb{R}^+ \quad \text{und} \quad b \in \mathbb{R}$$

ergibt sich damit

$$f(x) = \exp(x \cdot \ln x) \qquad \text{für alle} \qquad x \in \mathbb{R}^+.$$

Als Komposition der Exponentialfunktion mit dem Produkt einer linearen Funktion und des Logarithmus ist f stetig und (beliebig oft) differenzierbar mit

$$f'(x) = \exp(x \cdot \ln x) \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) \cdot (\ln x + 1)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$.

a) Für alle $x \in \left]\frac{1}{e}, 1\right[$ gilt $\frac{1}{e} < x < 1$, mit der Monotonie des Logarithmus

$$-1 = \ln \tfrac{1}{e} < \ln x < \ln 1 = 0,$$

und wegen $x > 0$ folgt mit dem Monotoniegesetz der Multiplikation

$$-1 < -x = x \cdot (-1) < x \cdot \ln x < x \cdot 0 = 0,$$

mit der Monotonie der Exponentialfunktion

$$\tfrac{1}{e} = \exp(-1) < \exp(x \cdot \ln x) < \exp(0) = 1,$$

also $\frac{1}{e} < f(x) < 1$, und insbesondere damit $0 < f(x) < 1$; des weiteren gilt wegen $-1 < \ln x < 0$ schon $0 < \ln x + 1 < 1$, zusammen mit $0 < f(x) < 1$ demnach

$$0 < f(x) \cdot (\ln x + 1) < 1, \qquad \text{also} \qquad 0 < f'(x) < 1.$$

b) Für die durch

$$x_0 \in \left]\tfrac{1}{e}, 1\right[\qquad \text{sowie} \qquad x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ zeigen wir die Beziehung

$$\tfrac{1}{e} < x_n < x_{n+1} < 1 \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

mit Hilfe vollständiger Induktion:

- Für „$n = 0$" gilt zunächst für den Startwert $\frac{1}{e} < x_0 < 1$. Die auf $\mathbb{R}^+$ differenzierbare Funktion f genügt insbesondere den Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung auf dem Intervall $[x_0; 1]$; es gibt also ein $\xi \in \left]x_0; 1\right[$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0} = \frac{1 - x_1}{1 - x_0},$$

  wobei wegen $\xi \in \left]\frac{1}{e}; 1\right[$ gemäß a) schon $0 < f'(\xi) < 1$ und damit

$$0 < \frac{1 - x_1}{1 - x_0} < 1,$$

  wegen $1 - x_0 > 0$ dann

$$0 < 1 - x_1 < 1 - x_0 \qquad \text{bzw.} \qquad 1 > x_1 > x_0,$$

  folgt, so daß insgesamt also $\frac{1}{e} < x_0 < x_1 < 1$ gilt.
- Für „$n \to n+1$" gilt nach Induktionsvoraussetzung $\frac{1}{e} < x_n < x_{n+1} < 1$; gemäß a) gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in \left]\frac{1}{e}; 1\right[$, so daß die stetige Funktion f auf $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$ streng monoton wächst, aus $x_n < x_{n+1} < 1$ folgt also

$$f(x_n) < f(x_{n+1}) < f(1), \qquad \text{also} \qquad x_{n+1} < x_{n+2} < 1,$$

  mit $\frac{1}{e} < x_{n+1}$ damit die Induktionsbehauptung $\frac{1}{e} < x_{n+1} < x_{n+2} < 1$.

c) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist gemäß b) zum einen wegen $x_n < x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (streng) monoton wachsend und zum anderen wegen $x_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ nach oben beschränkt, mithin konvergent. Für den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ gilt $\frac{1}{e} \le a \le 1$, und mit Hilfe der Rekursionsvorschrift erhält man

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \underset{f \text{ stetig}}{=} f\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big) = f(a) = a^a,$$

woraus

$$\ln a = \ln(a^a) = a \cdot \ln a, \qquad \text{also} \qquad 0 = a \cdot \ln a - \ln a = (a-1) \cdot \ln a,$$

und damit $a - 1 = 0$ oder $\ln a = 0$, also auf jeden Fall $a = 1$ folgt.

1.24 Für eine monoton wachsende Funktion $f : [a,b] \to [a,b]$ ist die durch einen fest gewählten Startwert $x_1 \in [a,b]$ und die Rekursionsvorschrift

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu betrachten.

a) Der Nachweis der Monotonie der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfolgt über vollständige Induktion; wir treffen dabei die folgende Fallunterscheidung:

- Im Falle $x_1 \ge x_2$ gilt $x_n \ge x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$:
  - für „$n = 1$“ gilt $x_1 \ge x_2$ gemäß der Fallunterscheidung.
  - für „$n \to n+1$“ gilt $x_n \ge x_{n+1}$ gemäß der Induktionsvoraussetzung; da f monoton wachsend ist, folgt daraus $f(x_n) \ge f(x_{n+1})$, also in $x_{n+1} \ge x_{n+2}$ die Induktionsbehauptung.

  Damit ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.
- Im Falle $x_1 < x_2$ gilt $x_n \le x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$:
  - für „$n = 1$“ gilt $x_1 \le x_2$ gemäß der Fallunterscheidung.
  - für „$n \to n+1$“ gilt $x_n \le x_{n+1}$ gemäß der Induktionsvoraussetzung; da f monoton wachsend ist, folgt daraus $f(x_n) \le f(x_{n+1})$, also in $x_{n+1} \le x_{n+2}$ die Induktionsbehauptung.

  Damit ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \in [a,b]$:

- für „$n = 1$“ gilt $x_1 \in [a,b]$ gemäß der Wahl der Startwerts.
- für „$n \to n+1$“ gilt $x_n \in [a,b]$ gemäß der Induktionsvoraussetzung; wegen $D_f = [a,b]$ und $W_f \subseteq [a,b]$ folgt daraus $x_{n+1} = f(x_n) \in [a,b]$, also die Induktionsbehauptung.

Damit ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (nach unten durch a und nach oben durch b) beschränkt sowie gemäß a) monoton, so daß sie nach dem Hauptsatz über monotone Folgen konvergiert.

c) Wegen $x_n \in [a,b]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt für den Grenzwert $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ der gemäß b) konvergenten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls $x \in [a,b]$, und wir erhalten

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \underset{(*)}{=} f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x);$$

bei $(*)$ geht die vorausgesetzte Stetigkeit von f (im Punkte $x \in D_f$) ein.

1.25 a) Zum Nachweis der Ungleichung

$$\sin x < x \qquad \text{für alle} \quad x > 0$$

treffen wir die folgende Fallunterscheidung:

- Für ein $x \in \left]0, 2\pi\right]$ betrachten wir die Einschränkung $f = \sin|_{[0,x]}$ der Sinusfunktion auf das abgeschlossene Intervall $[0, x] \subseteq \mathbb{R}$; diese ist differenzierbar und erfüllt damit insbesondere die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, nämlich Stetigkeit auf $[0, x]$ und Differenzierbarkeit auf $\left]0, x\right[$. Damit existiert ein $\xi \in \left]0, x\right[$ mit

$$\sin x - \sin 0 = \sin' \xi \cdot (x - 0), \qquad \text{also} \qquad \sin x = \cos \xi \cdot x;$$

wegen $\xi \in \left]0, 2\pi\right[$ ist $\cos \xi < 1$, woraus wegen $x > 0$ dann

$$\sin x = \cos \xi \cdot x < 1 \cdot x = x$$

folgt.

- Für ein $x \in \left]2\pi, \infty\right[$ ergibt sich direkt

$$\sin x \leq 1 < 2\pi < x.$$

Damit gilt wegen $\sin 0 = 0$ insbesondere $\sin x \leq x$ für alle $x \geq 0$.

b) Für die zu einem beliebigen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ durch

$$x_{n+1} = \sin x_n \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gilt

$$x_1 = \sin x_0 \in [-1, 1],$$

und wir treffen im Hinblick auf a) die folgende Fallunterscheidung:

- Sei zunächst $x_1 \in [0, 1]$; wir zeigen hierfür $0 \leq x_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:
  - für „$n = 1$“ gilt $x_1 \in [0, 1]$, also $0 \leq x_1 \leq 1$.
  - für „$n \to n + 1$“ gilt $0 \leq x_n \leq 1$, insbesondere also $0 \leq x_n \leq \frac{\pi}{2}$; da der Sinus auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ monoton wächst, folgt

$$\sin 0 \leq \sin x_n \leq \sin \tfrac{\pi}{2}, \qquad \text{also} \qquad 0 \leq x_{n+1} \leq 1.$$

  Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt damit $0 \leq x_n$, woraus gemäß a) dann

$$x_{n+1} = \sin x_n \leq x_n$$

  folgt; damit ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und (etwa durch 0) nach unten beschränkt, mithin konvergent. Für den Grenzwert $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ergibt sich damit zum einen $x \geq 0$ und zum anderen

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \big(\sin x_n\big) \underset{\text{sin stetig}}{=} \sin\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) = \sin x;$$

  gemäß a) gilt $\sin x > x$ für alle $x > 0$, so daß man $x = 0$ erhält.

- Sei nun $x_1 \in [-1,0]$; für die zum Startwert $x_0' = -x_0 \in \mathbb{R}$ rekursiv definierte Folge $(x_n')_{n\in\mathbb{N}_0}$ gilt dann $x_n' = -x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$:
  - für „$n = 0$" gilt $x_0' = -x_0$ nach Wahl von x_0'.
  - für „$n \to n+1$" gilt $x_n' = -x_n$; da der Sinus ungerade ist, folgt

$$x_{n+1}' = \sin x_n' = \sin(-x_n) = -\sin x_n = -x_{n+1}.$$

  Wegen $x_1' = -x_1 \in [0,1]$ ergibt sich gemäß obigem Fall

$$\lim_{n\to\infty} x_n' = 0 \qquad \text{und damit} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(-x_n'\right) = 0.$$

1.26 a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist das Folgenglied

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

die Summe der $n+1$ aufeinanderfolgenden Stammbrüche $\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{2n}$; damit ergibt sich zum einen

$$a_n = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\le \frac{1}{n}} + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\le \frac{1}{n}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\le \frac{1}{n}} \le (n+1)\cdot\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \le 2$$

und zum anderen

$$a_n = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\ge \frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\ge \frac{1}{2n}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\ge \frac{1}{2n}} \ge (n+1)\cdot\frac{1}{2n} \ge n\cdot\frac{1}{2n} \ge \frac{1}{2}.$$

Damit ist die Folge $(a_n)_{n\ge1}$ beschränkt.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} &a_{n+1} - a_n = \\ &\left(\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \\ &\qquad \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{\le \frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{\le \frac{1}{2n}} - \frac{1}{n} \le \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0; \end{aligned}$$

damit ist die Folge $(a_n)_{n\ge1}$ monoton fallend. Zusammen mit der in a) gezeigten Beschränktheit ist die Folge $(a_n)_{n\ge1}$ insbesondere also konvergent.

1.27 Für die gegebene durch

$$x_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = \tfrac{3}{2}, \quad x_4 = \tfrac{5}{3}, \quad x_5 = \tfrac{8}{5}, \quad x_6 = \tfrac{13}{8}, \ldots$$

Sie besitzt daher die Teilfolgen

$$(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_3, x_5, \ldots) = \big(1,\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{8}{5},\ \ldots\big)$$

und

$$(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (x_2, x_4, x_6, \ldots) = \big(2,\ \tfrac{5}{3},\ \tfrac{13}{8},\ \ldots\big)$$

Wir zeigen zunächst $1 \le x_n \le 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

„$n = 1$“: Es ist $x_1 = 1$ und damit $1 \le x_1 \le 2$.

„$n \to n+1$“: Es ist $1 \le x_n \le 2$ und damit

$$1 \ge \frac{1}{x_n} \ge \frac{1}{2} \Longrightarrow 2 \ge 1 + \frac{1}{x_n} \ge \frac{3}{2} \Longrightarrow 2 \ge x_{n+1} \ge 1.$$

a) Wir zeigen $x_{2n-1} \le x_{2n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

„$n = 1$“: Es ist

$$x_1 = 1 \le \frac{3}{2} = x_3.$$

„$n \to n+1$“: Es ist

$$x_{2n-1} \le x_{2n+1} \underset{x_{2n-1}>0}{\Longrightarrow} \frac{1}{x_{2n-1}} \ge \frac{1}{x_{2n+1}} \Longrightarrow$$

$$\underbrace{1 + \frac{1}{x_{2n-1}}}_{=x_{2n}} \ge \underbrace{1 + \frac{1}{x_{2n+1}}}_{=x_{2n+2}} \Longrightarrow x_{2n} \ge x_{2n+2} \underset{x_{2n+2}>0}{\Longrightarrow} \frac{1}{x_{2n}} \le \frac{1}{x_{2n+2}}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{1 + \frac{1}{x_{2n}}}_{=x_{2n+1}} \le \underbrace{1 + \frac{1}{x_{2n+2}}}_{=x_{2n+3}} \Longrightarrow x_{2n+1} \le x_{2n+3}$$

Damit ist die zunächst Teilfolge $(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt also $x_{2n-1} \le x_{2n+1}$, woraus sich

$$\frac{1}{x_{2n-1}} \ge \frac{1}{x_{2n+1}} \quad \text{und damit} \quad x_{2n} = 1 + \frac{1}{x_{2n-1}} \ge 1 + \frac{1}{x_{2n+1}} = x_{2n+2}$$

ergibt; folglich ist dann die Teilfolge $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.

b) Die Teilfolge $(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist gemäß a) monoton wachsend und gemäß den einleitenden Bemerkungen (durch 1 nach unten und 2 nach oben) beschränkt, also konvergent, und besitzt daher einen Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}$, für den ebenfalls $1 \le a \le 2$ gilt. Wegen

$$x_{2n+1} = 1 + \frac{1}{x_{2n}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{2n-1}}} = 1 + \frac{x_{2n-1}}{x_{2n-1}+1} = \frac{2\,x_{2n-1}+1}{x_{2n-1}+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\,x_{2n-1}+1}{x_{2n-1}+1} = \frac{2\,a+1}{a+1}$$

und damit

$$a\,(a+1) = 2\,a+1, \qquad \text{also} \quad a^2 - a - 1 = 0,$$

woraus sich

$$a = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

wegen $1 \leq a \leq 2$ also

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ergibt. Des weiteren ist die Teilfolge gemäß a) $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt, also konvergent, und mit denselben Überlegungen wie eben ergibt sich für den Grenzwert $b = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$ dann

$$b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Damit konvergiert auch die gesamte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $a = b$.

1.28 a) Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, ist die Folge $(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und damit insbesondere beschränkt; es gibt also ein $M > 0$ mit $|a_n - a| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir weisen nun anhand der Definition nach, daß auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der arithmetischen Mittelwerte

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert; sei dazu $\varepsilon > 0$.

- Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gibt es zu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle} \quad n \geq n_1;$$

- dann gibt es wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{Mn_1}{n} = 0$ ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{Mn_1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle} \quad n \geq n_2.$$

Sei nun $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$; für alle $n \geq n_0$ gilt dann

$$\begin{aligned}
|b_n - a| &= \left|\frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n) - a\right| = \frac{1}{n} \cdot \big|(a_1 + \ldots + a_n) - n \cdot a\big| \\
&= \frac{1}{n} \cdot \big|(a_1 - a) + \ldots (a_n - a)\big| \leq \frac{1}{n} \cdot \big(|a_1 - a| + \ldots + |a_n - a|\big) \\
&= \frac{1}{n} \cdot \Big(\underbrace{|a_1 - a|}_{\leq M} + \ldots + \underbrace{|a_{n_1} - a|}_{\leq M}\Big) + \\
&\qquad + \frac{1}{n}\Big(\underbrace{|a_{n_1+1} - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \ldots + \underbrace{|a_n - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2}}\Big) \\
&\leq \frac{1}{n} \cdot n_1 \cdot M + \frac{1}{n} \cdot \underbrace{(n - n_1)}_{\leq n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{Mn_1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

b) Die alternierende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ besitzt die beiden Häufungspunkte -1 und 1, ist also insbesondere nicht konvergent. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt aber

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{=0} + \underbrace{(a_3 + a_4)}_{=0} + \ldots + a_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ -1, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

und damit

$$|b_n| = \left| \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k \right| = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right|}_{\leq 1} \leq \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

woraus sich mit dem Schrankenlemma $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ergibt.

1.29 a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach Voraussetzung konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$; damit konvergiert auch die (lediglich um einen Index verschobene) Folge $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. Folglich ist zunächst $(a_n + a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ als Summe konvergenter Folgen konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a + a = 2\,a$$

und schließlich $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ als Vielfaches einer konvergenten Folge konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}) = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} (a_n + a_{n+1}) = \frac{1}{2} \cdot (2\,a) = a.$$

Alternativ läßt sich auch direkt mit Hilfe der Definition argumentieren: da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$; damit folgt

$$\begin{aligned} |b_n - a| &= \left| \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}) - a \right| = \frac{1}{2} \cdot |(a_n + a_{n+1}) - 2\,a| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot |(a_n - a) + (a_{n+1} - a)| \leq \frac{1}{2} \cdot \big(\underbrace{|a_n - a|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|a_{n+1} - a|}_{<\varepsilon} \big) < \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $n \geq n_0$, und damit konvergiert die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$.

b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ besitzt wegen

$$a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

und

$$a_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} -1$$

die beiden Häufungspunkte 1 und -1, ist also insbesondere nicht konvergent. Die zugehörigen Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist jedoch wegen

$$b_n = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}) = \frac{1}{2}\left((-1)^n + (-1)^{n+1}\right) = \frac{(-1)^n}{2}(1 + (-1)) = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ die konstante Nullfolge und damit insbesondere konvergent.

c) Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach Voraussetzung konvergent, insbesondere (nach oben) beschränkt, es gibt also ein $M \in \mathbb{R}$ mit $b_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung monoton wachsend ist, gilt $a_n \leq a_{n+1}$ und folglich

$$M \geq b_n = \frac{1}{2}\,(a_n + a_{n+1}) \geq \frac{1}{2}\,(a_n + a_n) = a_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; damit ist auch die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, demnach als monoton wachsende Folge bereits konvergent.