Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Lineare Algebra und analytische Geometrie 8

8.1 *(Herbst 2012, Thema 3, Aufgabe 4)*

Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik Q, gegeben durch

$$13\,x^2 - 32\,x\,y + 37\,y^2 = 45,$$

und geben Sie den Typ der Kurve Q an!

8.2 *(Herbst 2011, Thema 2, Aufgabe 1)*

Gegeben ist der Kegelschnitt mit der Gleichung

$$x_1^2 - 4\,x_1\,x_2 + 4\,x_2^2 - 6\,x_1 + 12\,x_2 + 8 = 0.$$

Transformieren Sie diesen Kegelschnitt in metrische Normalform und geben Sie den Typ der geometrischen Figur an.

8.3 *(Frühjahr 2011, Thema 3, Aufgabe 4)*

Transformieren Sie den Kegelschnitt mit der Gleichung

$$x_1^2 + 4\,x_1\,x_2 - 2\,x_2^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}\,x_1 - \frac{4}{\sqrt{5}}\,x_2 - 4 = 0$$

in metrische Normalform und geben Sie seinen Typ an.

8.4 *(Herbst 2010, Thema 2, Aufgabe 2)*

Im $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten x und y ist durch die Gleichung

$$7\,y^2 + 24\,x\,y - 2\,y + 24 = 0$$

ein Kegelschnitt gegeben. Bestimmen Sie seinen Typ und seine euklidische Normalform.

8.5 *(Frühjahr 2010, Thema 1, Aufgabe 4)*

Bestimmen Sie die euklidische Normalform des Kegelschnitts mit der Gleichung

$$7\,x^2 + 48\,x\,y - 7\,y^2 - 6\,x + 8\,y = 0.$$

8.6 *(Frühjahr 2010, Thema 2, Aufgabe 5)*

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten x und y ist die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 - 2\,x\,y + y^2 + x - 3\,y - 4 = 0 \right\}$$

gegeben. Bestimmen Sie die euklidische Normalform und den Typ von Q.

8.7 *(Herbst 2008, Thema 3, Aufgabe 2)*

Transformieren Sie die Quadrik $Q \subset \mathbb{R}^2$ mit der Gleichung

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 4x_1 - 2x_2 + 1 = 0$$

auf euklidische Normalform und geben Sie ihren Typ an.

8.8 *(Frühjahr 2008, Thema 2, Aufgabe 5)*

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ sei die Quadrik

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 17\,x^2 - 32\,x\,y - 7\,y^2 - 66\,x + 18\,y - 33 = 0 \right\}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass H eine Hyperbel mit der euklidischen Normalform

$$\left(\frac{w}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{z}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$$

ist.

8.9 *(Frühjahr 2007, Thema 2, Aufgabe 5)*

Zeigen Sie, dass

$$Q = \left\{ (x_1, x_2) \mid 3\,x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 + 3\,x_2^2 - 2\,x_1 + 10\,x_2 - 5 = 0 \right\}$$

im euklidischen $\mathbb{R}^2$ eine Ellipse ist. Bestimmen Sie ihren Mittelpunkt, ihre Hauptachsen, sowie die Länge ihrer Hauptachsenabschnitte.

8.10 *(Herbst 2006, Thema 3, Aufgabe 5)*

Berechnen Sie die euklidische Normalform der ebenen Quadrik mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 + 14\,x\,y + 44\,x + 20\,y + 76 = 0$$

und ermitteln Sie den Typ dieser Quadrik.

8.11 *(Herbst 2004, Thema 2, Aufgabe 5)*

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten x und y sei eine Quadrik Q durch ihre Gleichung

$$9\,y^2 - 40\,x\,y + 64\,y + 80\,x = 64$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt von Q und berechnen Sie die Gleichung von Q nach Verschiebung des Mittelpunkts in den Ursprung.

b) Bestimmen Sie die euklidische Normalform und den Typ von Q durch Hauptachsentransformation.

c) Skizzieren Sie Q in ursprünglichen Koordinatensystem.

8.12 *(Herbst 2015, Thema 2, Aufgabe 5)*

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten x und y ist durch die Gleichung

$$8\,x^2 - 12\,x\,y + 17\,y^2 + 44\,x - 58\,y + 48 = 0$$

eine Quadrik Q gegeben.

a) Man zeige, dass Q eine Ellipse ist, und bestimme die euklidische Normalform von Q.

b) Man berechne den Mittelpunkt sowie die Scheitelpunkte von Q und skizziere Q im x–y–Koordinatensystem.

8.13 *(Herbst 2011, Thema 1, Aufgabe 5)*

Für welche Wahl des Parameters $s \in \mathbb{R}$ ist der Kegelschnitt

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 + 2\,s\,x\,y + y^2 + 2\,x + 2\,y + 1 = 0 \right\}$$

eine Parabel? Man bestimme für diesen Parameterwert die euklidische Normalform, den Scheitel und die Symmetrieachse der Parabel P und skizziere sie im x–y–Koordinatensystem.

8.14 *(Herbst 2014, Thema 2, Aufgabe 5)*

Man betrachte die Quadrik

$$Q_s = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid s\,x^2 + 2\,x\,y + s\,y^2 + 2\,x + 2\,y - 1 = 0 \right\}$$

und bestimme in Abhängigkeit vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ ihre euklidische Normalform sowie ihren Typ.

8.15 *(Frühjahr 2015, Thema 1, Aufgabe 4)*

Für vorgegebene Parameter $a,\, b \in \mathbb{R}$ betrachten wir die durch die Gleichung

$$(a+b)x^2 + (a+b)y^2 + 2(b-a)xy + 2(2b-a)x + 2(2b+a)y + a + 4b = 2$$

mit Variablen $x,\, y \in \mathbb{R}$ definierte Quadrik $Q_{a,b}$ im $\mathbb{R}^2$.

a) Bestimmen Sie die Euklidische Normalform von $Q_{a,b}$.

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a,\, b \in \mathbb{R}$ den Typ von $Q_{a,b}$.

8.16 *(Herbst 2015, Thema 3, Aufgabe 5)*

Es sei $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die euklidische Normalform und den Typ des durch die Gleichung

$$(a+1)x^2 + (a+1)y^2 + 2(a-1)xy + 2\sqrt{2}ax + 2\sqrt{2}ay + 2a - 2 = 0$$

gegebenen Kegelschnitts im $\mathbb{R}^2$ in Abhängigkeit von dem Parameter a.

8.17 *(Frühjahr 2015, Thema 2, Aufgabe 5)*

Für einen reellen Parameter t ist durch

$$x^2 + y^2 + 2t\,xy = 1$$

ein Kegelschnitt K_t gegeben.

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t, um welchen euklidischen Typ von Kegelschnitt es sich dabei handelt. Für welche(s) t ist K_t ein Kreis?

b) Bestimmen Sie für diejenigen $t \in \mathbb{R}$, für die K_t eine Ellipse, aber kein Kreis ist, die Längen a und b der beiden Halbachsen sowie den Winkel $\alpha \in [0, \pi[$, um den man die x–Achse in mathematisch positiver Richtung („gegen den Uhrzeigersinn") um den Ursprung drehen muss, damit sie die größere der beiden Halbachsen überdeckt.

8.18 *(Herbst 2010, Thema 1, Aufgabe 5)*

Bestimmen Sie die affine Normalform, sowie den Typ des Kegelschnitts, der in der affinen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten x, y durch die Gleichung

$$x^2 + xy + 3x + y = 1$$

gegeben wird.

8.19 *(Frühjahr 2006, Thema 3, Aufgabe 4)*

Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x^2 + 2\,x\,y + 2\,x + 2\,y = 0$$

eine Hyperbel im $\mathbb{R}^2$ definiert und bestimmen Sie deren Asymptoten.

8.20 *(Frühjahr 2004, Thema 3, Aufgabe 4)*

Bestimmen Sie alle Parameter $s \in \mathbb{R}$, für welche die Gleichung

$$(s\,x_1)^2 + 2\,x_1\,x_2 + x_2^2 - 2\,x_1 - 2\,x_2 + s + 1 = 0$$

eine Hyperbel beschreibt.

8.21 *(Frühjahr 2014, Thema 1, Aufgabe 2)*

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei Q_λ der Kegelschnitt

$$Q_\lambda := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda\,x^2 + 2\,x\,y + 2\,y^2 + \lambda^2 - 4 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass Q_λ eine Ellipse ist.

8.22 *(Herbst 2012, Thema 2, Aufgabe 5)*

Bestimmen Sie in Abhängigkeit des reellen Parameters t den Typ des Kegelschnitts (in $\mathbb{R}^2$)

$$(1 + 4t)y^2 + x^2 + 2xy + 2tx - (8t^2 - 2t)y = -4t^3 + 1 - t^2.$$

8.23 *(Frühjahr 2013, Thema 3, Aufgabe 5)*

Man bestimme in Abhängigkeit vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ für den Kegelschnitt

$$K_s = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2\,s\,x\,y + s\,(s+1)\,y^2 + 2\,x = 0 \right\}$$

die affine Normalform sowie den affinen Typ.

8.24 *(Frühjahr 2015, Thema 3, Aufgabe 5)*

Bestimmen Sie in Abhängigkeit des reellen Parameters r die affine Normalform des durch

$$(1+r)x^2 + ry^2 - 2rxy + y - x = 0$$

gegebenen Kegelschnitts.

8.25 *(Frühjahr 2014, Thema 2, Aufgabe 1)*

Sei $s \in \mathbb{R}$ ein Parameter und sei $Q_s \subset \mathbb{R}^2$ die von s abhängige Quadrik

$$Q_s \quad : \quad s\,x^2 + 2(s+1)\,x\,y + y = 0.$$

a) Bestimmen Sie den affinen Typ der Quadrik Q_s in Abhängigkeit von s.

b) Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Drehung um den Winkel π und mit dem Drehzentrum $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$. Zeigen Sie, dass $\varphi(Q_1) = Q_1$.

8.26 *(Herbst 2014, Thema 1, Aufgabe 2)*

Sei

$$Q_{s,t} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid s\,x^2 + 2\,t\,x\,y + y^2 - y = 0 \right\}$$

eine von den Parametern s, $t \in \mathbb{R}$ abhängige Quadrik im $\mathbb{R}^2$.

a) Bestimmen Sie den Typ von $Q_{s,t}$ in Abhängigkeit von s, $t \in \mathbb{R}$.

b) Die Menge

$$M := \left\{ (s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid Q_{s,t} \text{ hat keinen eindeutigen Mittelpunkt} \right\}$$

ist eine Quadrik im $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie diese Quadrik.

c) Bestimmen Sie den Mittelpunkt $m_{s,t}$ von $Q_{s,t}$ für alle $(s,t) \in \mathbb{R}^2 \setminus M$.

8.27 *(Frühjahr 2004, Thema 2, Aufgabe 4)*

Man untersuche die ebenen Quadriken

$$\begin{aligned} Q_1 &: \ x^2 + 2\,x\,y + 3\,y^2 = 1, \\ Q_2 &: \ x^2 + 4\,x\,y + 6\,y^2 = 1 \end{aligned}$$

auf metrische und affine Äquivalenz.

8.28 *(Herbst 2007, Thema 3, Aufgabe 4)*

a) Beweisen Sie, dass die Quadriken im $\mathbb{R}^2$ mit den Gleichungen

$$Q_1 : \quad x^2 + 4\,x\,y + 6\,y^2 = 1, \qquad Q_2 : \quad x^2 + 6\,x\,y + 12\,y^2 = 1$$

nicht metrisch, wohl aber affin zueinander äquivalent sind.

b) Geben Sie eine affine Transformation im $\mathbb{R}^2$ an, die Q_1 auf Q_2 abbildet.

8.29 *(Frühjahr 2009, Thema 1, Aufgabe 4)*

Beweisen Sie, dass die Quadriken

$$Q_1 : 5x^2 + 4xy + 2y^2 - 1 = 0, \qquad Q_2 : 3x^2 + 6xy + 11y^2 - 2 = 0$$

in $\mathbb{R}^2$ metrisch äquivalent sind und geben Sie eine Kongruenzabbildung von Q_1 auf Q_2 an.

8.30 *(Herbst 2011, Thema 3, Aufgabe 3)*

a) Man bestimme, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die beiden Kegelschnitte

$$\begin{aligned} Q_1 &: \; 2\,x^2 + 4\,x\,y + 3\,y^2 + 2\,y = 1 \\ Q_2 &: \; 3\,x^2 - 2\,\alpha\,x\,y + \alpha\,y^2 = 1 \end{aligned}$$

affin äquivalent sind.

b) Sei nun $\alpha = 1$. Bestimmen Sie eine affine Transformation, die Q_1 auf Q_2 abbildet.

8.31 *(Herbst 2013, Thema 2, Aufgabe 5)*

a) Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ die durch die Gleichung

$$5\,x^2 + 2\,x\,y + 5\,y^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot x + 14 \cdot \sqrt{2} \cdot y + 10 = 0$$

gegebene Quadrik. Bestimmen Sie die euklidische Normalform von Q als Teilmenge $Q' \subseteq \mathbb{R}^2$.

b) Geben Sie eine Bewegung (d.h. eine abstandserhaltende Selbstabbildung) f von $\mathbb{R}^2$ an, welche Q' in Q überführt, im Sinne $f(Q') = Q$.

8.32 *(Herbst 2014, Thema 3, Aufgabe 5)*

Gegeben seien die Kegelschnitte

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 3\,x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 + 3\,x_2^2 + 6\,x_1 - 2\,x_2 + 1 = 0 \right\}$$

und

$$Q_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + t\,x_2^2 - 2\,t\,x_2 + t - 1 = 0 \right\},$$

wobei t ein reeller Parameter ist. Für welche Werte von t sind Q und Q_t kongruent (d.h. metrisch äquivalent)?

8.33 *(Herbst 2005, Thema 2, Aufgabe 4)*

Es seien a und b reelle Zahlen mit $0 < b < 1 < a$. In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ seien zwei Quadriken Q_1 und Q_2 gegeben durch ihre Gleichungen

$$Q_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 1} = 1, \qquad Q_2 : \frac{x^2}{1 - b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

a) Berechnen Sie die Schnittpunkte von Q_1 und Q_2.

b) Bestimmen Sie für $i = 1, 2$ die Tangente $T_S Q_i$ in

$$S = \left(a\sqrt{1 - b^2},\; b\sqrt{a^2 - 1} \right) \in Q_1 \cap Q_2.$$

Zeigen Sie, dass sich die Tangenten $T_S Q_1$ und $T_S Q_2$ unter einem rechten Winkel schneiden.

8.34 *(Frühjahr 2008, Thema 1, Aufgabe 2)*

Es seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $b \neq 0$. Die Hyperbel im $\mathbb{R}^2$ mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

hat bekanntlich die Asymptoten mit den Gleichungen

$$g_1 \;:\; y = \frac{b}{a} \cdot x \qquad \text{und} \qquad g_2 \;:\; y = -\frac{b}{a} \cdot x.$$

a) Berechnen Sie die Abstände des Punktes $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ zu den beiden Asymptoten.

b) Zeigen Sie, dass für alle Punkte P auf der Hyperbel das Produkt dieser beiden Abstände gleich ist.

8.35 *(Frühjahr 2011, Thema 2, Aufgabe 5)*

Es sei $H \subset \mathbb{R}^2$ die Menge aller Punkte, welche vom Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ doppelt so weit entfernt sind wie von der Geraden $\ell : x + y = 0$. Geben Sie für die Menge H eine Gleichung an, zeigen Sie damit, dass H ein Kegelschnitt ist, berechnen Sie die affine Normalform der Gleichung für H und zeigen Sie damit, dass H eine Hyperbel ist.

8.36 *(Herbst 2008, Thema 1, Aufgabe 5)*

Es sei $Q \subset \mathbb{R}^2$ die Menge aller Punkte, welche vom Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Geraden g mit der Gleichung $x + y = 0$ den gleichen Abstand haben. Zeigen Sie, dass Q ein Kegelschnitt ist, und bestimmen Sie seinen affinen Typ.

8.37 *(Frühjahr 2012, Thema 3, Aufgabe 4)*

Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ die Menge aller Punkte, die von der Geraden $L = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und dem Punkt $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ gleich weit entfernt sind. Zeigen Sie, dass K ein Kegelschnitt ist und bestimmen Sie den Typ und die metrische Normalform von K.

8.38 *(Herbst 2007, Thema 2, Aufgabe 5)*

Es sei $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Im $\mathbb{R}^2$ sei

$$L_t \text{ die Verbindungsgerade der Punkte } (1, 0) \text{ und } (t, t)$$

sowie

$$M_t \text{ die Verbindungsgerade der Punkte } (0, 1) \text{ und } (-t, -t).$$

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt P_t der Geraden L_t und M_t.

b) Zeigen Sie, dass P_t auf dem Kegelschnitt

$$C = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - y)^2 = x + y\big\}$$

liegt, und bestimmen Sie den affinen Typ dieses Kegelschnitts C.

8.39 *(Herbst 2004, Thema 1, Aufgabe 5)*

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ seien die Punkte $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$ gegeben und in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, der Punkt $C = (t, t)$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t

a) eine Gleichung für die Gerade durch A und C;
b) eine Gleichung für die Höhe h_B des Dreiecks ABC durch die Ecke B;
c) den Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC.

Zeigen Sie außerdem:

d) Wenn t variiert, bewegt sich H auf einer Hyperbel.

8.40 *(Frühjahr 2013, Thema 2, Aufgabe 1)*

Sei E die Ellipse im $\mathbb{R}^2$, die durch die Gleichung

$$Q(x, y) = x^2 + x\,y + y^2 - 2\,x - y - 1 = 0$$

definiert wird.

a) Zeigen Sie, dass E von den Spiegelungen

$$\varphi : \mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\tau : \mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

invariant gelassen wird.

b) Benutzen Sie das Ergebnis von a), um den Mittelpunkt $\mathbf{m}$ von E zu bestimmen.
c) Verschieben Sie die Koordinaten so, dass $\mathbf{m}$ der Ursprung des neuen Koordinatensystems wird. Bestimmen Sie die Gleichung Q' von E im neuen System.
d) Benutzen Sie das Ergebnis von a)–c), um Basisvektoren der Hauptachsen zu finden. Führen Sie die Hauptachsentransformation aus, um die euklidische Normalform Q'' von E zu bestimmen.

8.41 *(Herbst 2010, Thema 3, Aufgabe 5)*

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten x und y werde die Ellipse E mit den Scheitelpunkten

$$(0, 3) \quad \text{und} \quad (4, -1) \qquad \text{sowie} \qquad (1, 0) \quad \text{und} \quad (3, 2)$$

betrachtet.

a) Skizzieren Sie E im (x, y)–Koordinatensystem. Bestimmen Sie den Mittelpunkt der Ellipse E, ihre Hauptachsen sowie die Längen ihrer Hauptachsenabschnitte.
b) Geben Sie in den Koordinaten x und y eine Gleichung für E an.

8.42 *(Frühjahr 2013, Thema 1, Aufgabe 5)*

Betrachten Sie den Kegel

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 2\,z^2 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3,$$

sowie die Ebene $E_\lambda \subset \mathbb{R}^3$, die den Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ enthält und den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ als Lot hat. Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass der Schnitt $E_\lambda \cap K$ eine Parabel ist.