LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Lineare Algebra und analytische Geometrie 7

7.1 *(Frühjahr 2015, Thema 2, Aufgabe 2)*

Sei V ein reeller Vektorraum.

a) Wann nennt man eine Teilmenge $U \subseteq V$ einen *Untervektorraum* von V?

b) Man nennt eine Teilmenge $A \subseteq V$ einen *(nichtleeren) affinen Unterraum* von V, falls ein Untervektorraum U von V und ein $p \in V$ existiert mit

$$A = p + U := \{p + u \mid u \in U\}.$$

Zeigen Sie, dass in dieser Situation auch $A = x + U$ für jeden Punkt $x \in A$ gilt.

c) Seien A und B affine Unterräume von V, so dass $A \cap B \neq \emptyset$ gilt. Zeigen Sie, dass dann auch $A \cap B$ wieder ein affiner Unterraum von V ist.

7.2 *(Frühjahr 2011, Thema 3, Aufgabe 4)*

Im $\mathbb{R}^3$ seien die beiden Ebenen

$$E_1 : -6\,x + 4\,y - 10\,z = -20 \quad \text{und} \quad E_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Schnittgerade der beiden Ebenen an.

b) Zeigen Sie, dass der Punkt

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

in der Ebene E_2 liegt. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade g an, welche im Punkt P senkrecht auf der Ebene E_2 steht.

c) In welchem Punkt durchstößt die Gerade g die Ebene E_1?

7.3 *(Herbst 2011, Thema 3, Aufgabe 2)*

Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ sei E die Ebene, auf der die drei Punkte

$$P = (-1, 0, 0), \qquad Q = (0, -1, 0), \qquad R = (0, 0, -1)$$

liegen. Sei g die Gerade, die den Ursprung enthält und die auf E orthogonal ist. Man bestimme g, sowie den Schnittpunkt von g mit E und den Spiegelpunkt des Ursprungs in Bezug auf E.

7.4 *(Herbst 2013, Thema 3, Aufgabe 3)*

Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ seien durch

$$E_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ebenen in $\mathbb{R}^4$ definiert. Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die sich E_α und F_α schneiden.

7.5 *(Frühjahr 2012, Thema 1, Aufgabe 4)*

Betrachten Sie die Ebene

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = -1\} \subset \mathbb{R}^3$$

und zu gegebenem $\lambda \in \mathbb{R}$ die Teilmenge

$$G_\lambda := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - \lambda z = -1 \text{ und } -2x - 3y + \lambda z = 1 + \lambda\} \subset \mathbb{R}^3$$

im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$.

a) Zeigen Sie, dass G_λ für jede Wahl von $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Gerade ist und geben Sie eine Gleichung dieser Geraden in Parameterform an.

b) Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass E und G_λ einen nicht-leeren Schnitt haben und berechnen Sie diesen jeweils.

7.6 *(Frühjahr 2008, Thema 3, Aufgabe 5)*

Gegeben seien die Punkte

$$A := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad D := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform für die Gleichung der durch A, B, C verlaufenden Ebene. Welchen Abstand hat D von dieser Ebene?

b) Geben Sie eine Parameterdarstellung für jede Gerade durch D an, welche auf der Ebene aus a) senkrecht steht. Bestimmen Sie den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Ebene.

7.7 *(Frühjahr 2014, Thema 2, Aufgabe 2)*

Gegeben seien die folgenden drei Geraden L_1, L_2, $L_3 \subset \mathbb{R}^3$:

$$L_1 \quad : \quad \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 1 \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2\,x - y - 2\,z = -1 \right\}$$

$$L_2 \quad : \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$L_3 \quad : \quad \text{Verbindungsgerade durch } \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass sich die Geraden paarweise schneiden und bestimmen Sie die Schnittpunkte p_1, p_2, p_3.

b) Sei $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ das Dreieck mit den Ecken p_1, p_2, p_3. Bestimmen Sie alle drei Innenwinkel sowie den Flächeninhalt von Δ.

7.8 *(Frühjahr 2014, Thema 3, Aufgabe 4)*

Im euklidischen Raum $(\mathbb{R}^3, \circ)$, versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$, seien die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Man zeige, dass das Dreieck ΔABC gleichschenklig und rechtwinklig ist, und bestimme den Punkt D, so dass $\square ABCD$ ein Quadrat ist.

b) Man bestimme eine Gleichung für die Ebene E, in der das Quadrat $\square ABCD$ liegt, sowie eine Parameterdarstellung für die Lotgerade ℓ zu E durch den Mittelpunkt von $\square ABCD$.

c) Man bestimme alle Punkte S auf der Geraden ℓ, für welche die Pyramide mit der Grundfläche $\square ABCD$ und der Spitze S das Volumen 36 besitzt.

7.9 *(Frühjahr 2013, Thema 2, Aufgabe 3)*

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \in M(3, \mathbb{R})$ und $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Sei U das Bild von A. Bestimmen Sie eine Basis von U.

b) Bestimmen Sie den Punkt $u \in U$, der v am nächsten liegt. Legen Sie dabei die euklidische Norm des $\mathbb{R}^3$ zugrunde.

c) Bestimmen Sie den Abstand zwischen v und U bezüglich der euklidischen Norm des $\mathbb{R}^3$.

7.10 *(Herbst 2014, Thema 1, Aufgabe 3)*

Sei f die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$, mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

und sei G die durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x - z &= 0 \end{aligned}$$

bestimmte Gerade. Berechnen Sie den Abstand des Punktes $p = (5, 3, -1)^\top$ zu G und zu $\operatorname{Bild}(f)$.

7.11 *(Herbst 2015, Thema 1, Aufgabe 1)*

Sei

$$f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \quad x \mapsto A_t \cdot x$$

die vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ abhängige lineare Abbildung mit darstellender Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & 1 \\ t^2 & t & 1 \\ t^2 + t & t^2 + t & 2 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist das Urbild

$$F_t := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid A_t \cdot x = b \right\}$$

ein affiner Raum der Dimension 2?

b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist F_t eine Ebene, die parallel zur Ebene

$$E \quad : \quad x + y + z = 2 \quad \subset \mathbb{R}^3$$

liegt?

c) Bestimmen Sie den Abstand zwischen E und F_1.

7.12 *(Herbst 2012, Thema 1, Aufgabe 4)*

a) Die Ebenen E_1 und E_2 sind im $\mathbb{R}^3$ gegeben als die Menge aller Vektoren $(x, y, z)^t$, die

$$E_1 \quad : \quad x + y + z = 1 \qquad \text{und} \qquad E_2 \quad : \quad x - y + z = -1$$

genügen. Berechnen Sie eine Parameterform von $E_1 \cap E_2$.

b) Es sei P die Menge aller Punkte $p \in \mathbb{R}^3$, die von E_1 und E_2 denselben Abstand haben. Zeigen Sie, dass P die Vereinigung zweier Ebenen ist und bestimmen Sie eine Parameterform dieser beiden Ebenen.

7.13 *(Herbst 2007, Thema 2, Aufgabe 4)*

Im euklidischen $\mathbb{R}^3$ seien die Ebene E und die Gerade G gegeben durch

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + 2\,y + 3\,z = 1 \right\}, \qquad G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : r \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass E und G parallel sind.

b) Bestimmen Sie den euklidischen Abstand der Gerade G von der Ebene E.

7.14 *(Frühjahr 2010, Thema 3, Aufgabe 5)*

Gegeben seien im euklidischen $\mathbb{R}^3$ die Gerade g_1 durch ihre Punkte $A = (0,0,2)^t$ und $B = (1,0,10)^t$, sowie die Gerade g_2 durch ihren Punkt $C = (3,2,7)^t$ und ihren Richtungsvektor $v = (0,1,4)^t$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E, welche die Gerade g_1 enthält und zur Geraden g_2 parallel ist.

b) Welchen Abstand hat die Gerade g_2 von der Ebene E? Liegt g_2 auf der gleichen Seite von E wie der Ursprung?

7.15 *(Frühjahr 2015, Thema 3, Aufgabe 4)*

a) Zeigen Sie, dass es genau eine Ebene $F \subseteq \mathbb{R}^3$ gibt, welche die drei Punkte

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

enthält und bestimmen Sie eine Gleichung von F in Normalenform.

b) Gegeben sei die Ebene $E : x + 2y + 3z = 2$ in $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie $E \cap F$ in Parameterform und den kürzesten Abstand von $E \cap F$ von der y–Achse.

7.16 *(Frühjahr 2011, Thema 2, Aufgabe 2)*

Im $\mathbb{R}^3$ seien die Geraden

$$g := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h := \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Finden Sie zwei verschiedene Punkte $p \in g$ und $q \in h$ so, dass die Gerade durch p und q auf beiden Geraden g und h senkrecht steht.

7.17 *(Frühjahr 2009, Thema 1, Aufgabe 1)*

Im $\mathbb{R}^3$ seien die beiden Geraden

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad g_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Fußpunkte des gemeinsamen Lotes und den Abstand beider Geraden.

7.18 *(Frühjahr 2007, Thema 2, Aufgabe 4)*

Im euklidischen $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und damit die Geraden

$$g_1 = t_1 + \mathbb{R}\, u_1 \quad \text{sowie} \quad g_2 = t_2 + \mathbb{R}\, u_2$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass g_1 und g_2 windschief sind.

b) Bestimmen Sie die gemeinsame Lotgerade ℓ von g_1 und g_2.

c) Berechnen Sie den Abstand zwischen g_1 und g_2.

7.19 *(Herbst 2010, Thema 1, Aufgabe 2)*

Im euklidischen $\mathbb{R}^3$ mit den Koordinaten x, y, z seien zwei Geraden gegeben, und zwar die Gerade L, welche die beiden Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

enthält, sowie der Durchschnitt M der Ebenen

$$E_1 : x - z = 0, \qquad E_2 : 2\,x + y = 0.$$

Bestimmen Sie den Abstand zwischen L und M.

7.20 *(Herbst 2007, Thema 3, Aufgabe 2)*

Im $\mathbb{R}^3$ seien die beiden folgenden Geraden gegeben:

$$g_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, dessen Lösungsmenge die Gerade g_1 ist.

b) Bestimmen Sie für das gemeinsame Lot der beiden Geraden die Fußpunkte auf g_1 und g_2.

7.21 *(Frühjahr 2007, Thema 3, Aufgabe 2)*

a) Geben Sie im $\mathbb{R}^3$ zwei nicht parallele Geraden g durch $(1, 1, 0)$ und h durch $(0, 1, 1)$ an, welche sich nicht schneiden.

b) Bestimmen Sie den Abstand zwischen g und h.

7.22 *(Herbst 2013, Thema 2, Aufgabe 4)*

Gegeben seien in $\mathbb{R}^3$ die Geraden

$$\begin{aligned} g_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ g_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ g_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass g_1 und g_2 ein eindeutiges gemeinsames Lot ℓ haben. Zeigen Sie, dass ℓ auch das eindeutige gemeinsame Lot von g_2 und g_3 sind.

b) Folgern Sie, dass ℓ ein gemeinsames Lot von g_1 und g_3 ist. Ist ℓ das einzige gemeinsame Lot von g_1 und g_3?

7.23 *(Herbst 2009, Thema 2, Aufgabe 4)*

Im euklidischen $\mathbb{R}^3$ seien die windschiefen Geraden

$$g_1 : \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Finden Sie Punkte $A \in g_1$ und $B \in g_2$ so, dass die Strecke AB parallel zur x, y–Ebene ist und die Länge 2 hat.

b) Wie groß ist die minimale Länge ℓ einer Strecke, die einen Punkt auf g_1 mit einem Punkt auf g_2 verbindet und zur x, y–Ebene parallel ist?

7.24 *(Herbst 2010, Thema 3, Aufgabe 4)*

Im euklidischen $\mathbb{R}^3$ seien die beiden folgenden Geraden gegeben:

$$g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\ell = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

die gemeinsame Lotgerade von g und h ist. Bestimmen Sie die beiden Lotfußpunkte und damit den Abstand von g und h.

b) Berechnen Sie den Mittelpunkt einer Kugel mit kleinstem Radius, welche g und h berührt, und begründen Sie diese Rechnung.

7.25 *(Frühjahr 2008, Thema 2, Aufgabe 4)*

Der euklidische $\mathbb{R}^3$ sei mit dem Standardskalarprodukt versehen. Zeigen Sie, dass der Punkt

$$P := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Mittelpunkt einer Kugel $K \subset \mathbb{R}^3$ ist, die sowohl die Gerade

$$g := \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

als auch die Ebene

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \middle| \quad 3\,x + 2\,y - 6\,z = 38 \right\}$$

berührt. Geben Sie den Radius r dieser Kugel K sowie ihre Berührpunkte mit der Geraden g und der Ebene E an.

7.26 *(Frühjahr 2012, Thema 2, Aufgabe 5)*

Sei e_1, e_2, e_3, e_4 die Standardbasis in $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie mit Hilfe des Standardskalarproduktes den Abstand des Punktes $\sqrt{2}e_1$ von der Ebene $U \subseteq \mathbb{R}^4$, welche von den Vektoren $e_1 + e_2$ und $e_3 + e_4$ aufgespannt wird.

7.27 *(Herbst 2012, Thema 2, Aufgabe 3)*

In $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die Geraden $g = \{(4, -2, 3, 5) + \lambda(1, -1, 2, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $h = \{(-1, 2, 2, 3) + \lambda(0, -1, -1, 3) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Bestimmen Sie einen Punkt P_g auf g und einen Punkt P_h auf h, deren Verbindungsvektor $\overrightarrow{P_g P_h}$ sowohl auf g als auch auf h senkrecht steht. Berechnen Sie den Abstand zwischen g und h.

7.28 *(Herbst 2011, Thema 2, Aufgabe 2)*

Im euklidischen $\mathbb{R}^4$ mit Standardskalarprodukt und Standardnorm seien

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = u_1 \in \mathbb{R}^4$$

$$U = u_1 + \mathbb{R}\,u_2 + \mathbb{R}\,u_3, \qquad V = v_1 + \mathbb{R}\,v_2,$$
$$W = \mathbb{R}\,u_2 + \mathbb{R}\,u_3 + \mathbb{R}\,v_2 \subseteq \mathbb{R}^4.$$

a) Berechnen Sie eine Basis von $W^\perp$.

b) Berechnen Sie den Abstand von U und V.

7.29 *(Herbst 2015, Thema 3, Aufgabe 2)*

Es sei X die affine Ebene in $\mathbb{R}^4$, die die Punkte $\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ enthält

und es sei $Y = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - x_3 = 0 \text{ und } x_2 + 2x_4 = 5 \right\}$.

a) Zeigen Sie, dass X und Y windschief sind, d.h. $X \cap Y = \emptyset$ und X, Y sind nicht parallel.

b) Berechnen Sie den euklidischen Abstand (bzgl. des Standardskalarprodukts) von X und Y.

7.30 *(Frühjahr 2011, Thema 1, Aufgabe 1)*

Es sei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter.

a) Geben Sie eine Gleichung an für die Menge M_a aller Punkte $P = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, welche vom Punkt $Q = \begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}$ und von der Geraden $G = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ den gleichen Abstand haben.

b) Bestimmen Sie v_a, $w_a \in \mathbb{R}$ so, dass $\begin{pmatrix}v_a\\0\end{pmatrix} \in M_a$ und $\begin{pmatrix}0\\w_a\end{pmatrix} \in M_a$.

c) Zeigen Sie: Nur für $a = 0$ ist M_a eine Gerade.

7.31 *(Herbst 2010, Thema 1, Aufgabe 3)*

Gegeben sei das Dreieck im $\mathbb{R}^2$ mit den Ecken

$$A = (0,0), \qquad B = (4,0), \qquad C = (0,2).$$

a) Bestimmen Sie für dieses Dreieck den Schwerpunkt S, den Umkreismittelpunkt U und den Höhenschnittpunkt H.

b) Zeigen Sie, dass S, U und H zusammen auf einer Geraden liegen.

7.32 *(Herbst 2008, Thema 3, Aufgabe 5)*

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ werde das Dreieck mit den Ecken

$$A = (0,0), \quad B = (4,0), \quad C = (0,3)$$

betrachtet.

a) Es sei $t \in \mathbb{R}$ und $P = (t,t) \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Geradengleichung für die Gerade BC und damit den Abstand d des Punktes P von der Geraden BC als Funktion von t.

b) Berechnen Sie den Inkreismittelpunkt I des Dreiecks ABC.

c) Berechnen Sie die Berührpunkte $A' \in BC$, $B' \in CA$ und $C' \in AB$ des Inkreises mit den Dreiecksseiten.

d) Zeigen Sie: Die drei Geraden AA', BB' und CC' treffen sich in einem Punkt.

7.33 *(Herbst 2005, Thema 1, Aufgabe 4)*

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten x, y sei ein Dreieck PQR gegeben durch seine Ecken

$$P = (0,0), \qquad Q = (1,0), \qquad R = (0,1).$$

a) Zeigen Sie: Der Kreis K_1 mit Mittelpunkt $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und Radius $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ geht durch P und berührt die durch die Dreieckseite QR definierte Gerade in R.

b) Finden Sie eine Gleichung für den Kreis K_2, der durch Q geht und die durch die Seite RP definierte Gerade in P berührt, sowie eine Gleichung für den Kreis K_3, der durch R geht und die durch die Seite PQ definierte Gerade in Q berührt.

c) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Kreise K_1 und K_2. Zeigen Sie: Es gibt einen Punkt $B \in \mathbb{R}^2$, in dem sich alle drei Kreise K_1, K_2, K_3 schneiden.

7.34 *(Herbst 2015, Thema 3, Aufgabe 3)*

Es sei $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ zwei verschiedene Punkte im $\mathbb{R}^2$ versehen mit dem Standardskalarprodukt.

a) Leiten Sie her: Die Menge aller $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, die von a und b denselben Abstand haben, ist die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2(b_1 - a_1)x_1 + 2(b_2 - a_2)x_2 = \|b\|^2 - \|a\|^2 \right\}.$$

b) Berechnen Sie den Umkreismittelpunkt des Dreiecks (a, b, c), wobei

$$a = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

7.35 *(Herbst 2014, Thema 2, Aufgabe 4)*

Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt, seien die vier Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Man zeige, dass die Menge g aller Punkte X von $\mathbb{R}^3$, die von A, B und C denselben Abstand besitzen, eine Gerade ist, und gebe eine Parameterdarstellung von g an.

b) Man bestimme den Mittelpunkt M und den Radius r der Umkugel des Tetraeders mit den Ecken A, B, C, D. Man entscheide mit Begründung, ob M im Inneren des Tetraeders liegt.

7.36 *(Herbst 2008, Thema 2, Aufgabe 4)*

In der Ebene $\mathbb{R}^2$ sei die Gerade g mit der Gleichung $x + y = 2$ gegeben. Die Spiegelung an dieser Geraden sei $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

a) Berechnen Sie für einen Punkt $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ die Koordinaten des gespiegelten Punktes $S(P)$.

b) Berechnen Sie für die Gerade g_1 mit der Gleichung $2x - y = 1$ die Gleichung der gespiegelten Geraden $g_2 = S(g_1)$.

7.37 *(Herbst 2006, Thema 1, Aufgabe 4)*

Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ sei die Ebene E gegeben durch die Gleichung

$$2\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 = 5.$$

Weiter sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Orthogonalprojektion auf die Ebene E. Bestimmen Sie die 3×3–Matrix A und den Vektor $t \in \mathbb{R}^3$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$f(x) = A\,x + t.$$

7.38 *(Frühjahr 2007, Thema 3, Aufgabe 5)*

Im $\mathbb{R}^3$ seien die Ebenen

$$H : x + y + z = 1 \qquad \text{und} \qquad E : z = 0$$

gegeben. Weiter sei $\pi : E \to H$ die Orthogonalprojektion von E auf H, d.h. die Parallelprojektion längs der Normalenrichtung von H. Finden Sie eine 3×2–Matrix A und einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ so, dass

$$\pi \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + v \qquad \text{für alle} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in E.$$

7.39 *(Herbst 2014, Thema 1, Aufgabe 4)*

Betrachten Sie die inhomogene lineare Gleichung

$$2\,x - y + z = 1.$$

a) Geben Sie die Lösungsmenge U in Parameterform an.

b) Sei U_0 der zu U parallele Untervektorraum. Bestimmen Sie die Matrix M der Spiegelung an U_0.

c) Bestimmen Sie die Spiegelung S an der affinen Ebene U als eine affine Abbildung

$$S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto Ax + t$$

mit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $t \in \mathbb{R}^3$.

7.40 *(Frühjahr 2015, Thema 1, Aufgabe 5)*

Sei Δ das Dreieck im $\mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $A = (0,0)$, $B = (3,0)$ und $C = (4,1)$. Sei $\widetilde{\Delta}$ das Dreieck im $\mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $\widetilde{A} = (0,9)$, $\widetilde{B} = (-2,1)$ und $\widetilde{C} = (-2,7)$.

a) Skizzieren Sie die beiden Dreiecke Δ und $\widetilde{\Delta}$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem

b) Geben Sie explizit die affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(A) = \widetilde{A}$, $f(B) = \widetilde{B}$ und $f(C) = \widetilde{C}$ an, welche Δ auf $\widetilde{\Delta}$ abbildet.

7.41 *(Herbst 2007, Thema 1, Aufgabe 2)*

a) Zeigen Sie, dass die Punkte

$$P_0 := (1,1,1)^t,\ P_1 := (1,2,2)^t,\ P_2 := (2,3,2)^t \text{ und } P_3 := (-3,0,3)^t \in \mathbb{R}^3$$

nicht in einer Ebene liegen.

b) Es sei $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die bijektive affine Abbildung mit

$$\psi(P_0) = (0,0,0)^t,\ \psi(P_1) = (1,0,0)^t,\ \psi(P_2) = (0,1,0)^t,\ \psi(P_3) = (0,0,1)^t.$$

Finden Sie eine 3×3–Matrix A und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt $\psi(x) = A \cdot x + b$.

7.42 *(Herbst 2013, Thema 2, Aufgabe 3)*

a) Zeien Sie, dass es genau eine bijektive affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\quad f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

gibt.

b) Zeigen Sie, dass f sogar eine Bewegung (d.h. abstandserhaltend) ist und bestimmen Sie den Typ dieser Bewegung.

7.43 *(Herbst 2005, Thema 2, Aufgabe 5)*

Es seien $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $t \in \mathbb{R}^2$. Die affine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f(x) = A\,x + t$$

sei eine Drehung der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit Drehzentrum z.

a) Begründen Sie, dass für alle $p \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\|p - z\| = \|f(p) - z\|\,.$$

b) In $\mathbb{R}^2$ seien die folgenden vier Punkte gegeben:

$$p = \begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix},\quad q = \begin{pmatrix}5{,}5\\1\end{pmatrix},\quad p' = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix},\quad q' = \begin{pmatrix}-2{,}5\\1\end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass es genau eine Drehung f um ein Drehzentrum $z \in \mathbb{R}^2$ gibt mit

$$f(p) = p' \qquad \text{und} \qquad f(q) = q'.$$

Berechnen Sie z, sowie die Matrix A und den Vektor t von f.

7.44 *(Herbst 2012, Thema 2, Aufgabe 4)*

a) Bestimmen Sie alle affinen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f((1,0)) = (2,3)$ und $f((0,1)) = (-2,-2)$. Gibt es unter all diesen affinen Abbildungen eine Bewegung (d.h. eine Isometrie)?

b) Zeigen Sie, dass $g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y+5 \\ x+2 \end{pmatrix}$ eine Bewegung (d.h. eine Isometrie) des $\mathbb{R}^2$ ist. Zeigen Sie, dass g eine Gleitspiegelung ist und berechnen Sie die zugehörige Spiegelungsgerade und den zugehörigen Translationsvektor.

7.45 *(Herbst 2013, Thema 1, Aufgabe 4)*

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ A' = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ B' = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix},\ C' = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ortsvektoren von Punkten in $\mathbb{R}^2$. Gegeben seien die Dreiecke Δ mit den Ecken A, B und C sowie Δ' mit den Ecken A', B' und C'.

a) Bestimmen Sie die Seitenlängen der beiden Dreiecke.

b) Zeigen Sie, dass eine Bewegung f des $\mathbb{R}^2$, die das Dreieck Δ auf das Dreieck Δ' abbildet, notwendig $f(A) = A'$, $f(B) = C'$ und $f(C) = B'$ erfüllt.

c) Zeigen Sie, dass es genau eine Bewegung f des $\mathbb{R}^2$ gibt, die das Dreieck Δ auf das Dreieck Δ' überführt, indem Sie f konkret angeben.

7.46 *(Frühjahr 2010, Thema 2, Aufgabe 4)*

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ seien das Dreieck Δ mit den Ecken

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

sowie das Dreieck Δ' mit den Ecken

$$a' = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c' = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Skizzieren Sie die beiden Dreiecke Δ und Δ' im kartesischen Koordinatensystem der Ebene und berechnen Sie ihre Seitenlängen.

b) Zeigen Sie, dass es genau eine Drehung

$$d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad d(x) = D \cdot x + t,$$

mit einer Drehmatrix D und einem Vektor $t \in \mathbb{R}^2$ gibt, welche das Dreieck Δ auf das Dreieck Δ' abbildet. Geben Sie D und t explizit an.

7.47 *(Frühjahr 2005, Thema 1, Aufgabe 2)*

a) Zeigen Sie, dass es genau eine Bewegung (= abstandserhaltende affine Transformation) g im $\mathbb{R}^2$ gibt, welche die Menge

$$\left\{\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\right\}$$

auf die Menge

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}\right\}$$

abbildet.

b) Berechnen Sie das Bild des Dreiecks

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

unter g.

7.48 *(Herbst 2015, Thema 1, Aufgabe 4)*

Die Bewegung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bilde die Punktmenge $\{a, b, c\}$ auf die Punktmenge $\{d, e, f\}$ (nicht notwendigerweise in dieser Reihenfolge) ab. Dabei ist

$$a = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix},\ e = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass es genau zwei Möglichkeiten für g gibt.

b) Zeigen Sie, dass eine davon eine Drehung ist. Bestimmen Sie das zugehörige Drehzentrum und den Drehwinkel.

c) Zeigen Sie, dass die andere Möglichkeit eine Gleitspiegelung ist. Bestimmen Sie die zugehörige Spiegelachse und den Verschiebungsvektor.

7.49 *(Herbst 2012, Thema 3, Aufgabe 3)*

Sei $\varphi_s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\varphi_s(x) := A_s\, x + b := \begin{pmatrix}1 & s_1\\2 & s_2\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}4\\-14\end{pmatrix}, \qquad s = \begin{pmatrix}s_1\\s_2\end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Vektoren $s \in \mathbb{R}^2$, so dass A_s das Vielfache einer orthogonalen Matrix ist.

b) Betrachten Sie nun φ_s mit $s = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Fixpunkt von φ_s.

c) Es sei weiterhin φ_s mit $s = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. Weiter sei m der Fixpunkt von φ_s. Bestimmen Sie ein $\alpha > 0$, so dass φ_s den Kreis

$$K := \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - m\| = 1\right\}$$

auf den Kreis

$$K' := \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - m\| = \alpha\right\}$$

abbildet. (Es bezeichne $\|\cdot\|$ die euklidische Norm.)

7.50 *(Herbst 2013, Thema 3, Aufgabe 4)*

Es sei A die Menge der affinen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Ist b_1, b_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$ und sind $f, g \in A$ mit $f(b_1) = g(b_1)$ und $f(b_2) = g(b_2)$, dann folgt $f = g$.

b) Ist $f \in A$ und gilt $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ und jedes $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist f eine lineare Abbildung.

7.51 *(Frühjahr 2014, Thema 3, Aufgabe 5)*

a) Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ seien

$$p_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man zeige, dass es genau eine bijektive affine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = M \cdot x + t,$$

mit $f(p_1) = p_2$, $f(p_2) = p_3$, $f(p_3) = p_4$ und $f(p_4) = p_1$ gibt, und bestimme ihre Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sowie ihren Vektor $t \in \mathbb{R}^2$.

b) Die Affinität $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ von Teilaufgabe a) bildet den Einheitskreis

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}$$

auf eine Ellipse $E \subseteq \mathbb{R}^2$ ab. Man bestimme eine Gleichung für E.