LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Lineare Algebra und analytische Geometrie 6

6.1 *(Herbst 2010, Thema 2, Aufgabe 4)*

Der Vektorraum $\mathbb{R}^4$ sei mit dem Standard–Skalarprodukt versehen. Der Unterraum $U \subset \mathbb{R}^4$ werde durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis e_1, e_2, e_3 von U mit $e_1 \in \operatorname{span}\{v_1\}$ und $e_2 \in \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$.

6.2 *(Frühjahr 2005, Thema 3, Aufgabe 2)*

Im $\mathbb{R}^4$ mit dem kanonischen Skalarprodukt seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass v_1 und v_2 zueinander orthogonal sind.

b) Ergänzen Sie v_1 und v_2 zu einer Basis v_1, v_2, v_3, v_4 so, dass je zwei Vektoren v_i und v_j für $i \neq j$ zueinander orthogonal sind.

6.3 *(Frühjahr 2008, Thema 1, Aufgabe 3)*

Die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{und} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

spannen einen Unterraum U im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ auf. Berechnen Sie eine Basis für das orthogonale Komplement von U im $\mathbb{R}^4$.

6.4 *(Frühjahr 2007, Thema 2, Aufgabe 1)*

Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ seien die drei Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

gegeben. Weiter sei $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ der von diesen Vektoren aufgespannte Unterraum.

a) Zeigen Sie, dass v_1, v_2 eine Basis von V ist und stellen Sie v_3 als Linearkombination von v_1 und v_2 dar.

b) Ergänzen Sie v_1, v_2 zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

c) Bestimmen Sie (bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{R}^4$) eine Orthonormalbasis für das orthogonale Komplement $V^\perp$ von V in $\mathbb{R}^4$.

6.5 *(Herbst 2014, Thema 3, Aufgabe 2)*

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Spaltenraumes U von A.

b) Bestimmen Sie alle $y \in U^\perp$, so dass $e - y \in U$.

6.6 *(Frühjahr 2008, Thema 2, Aufgabe 2)*

a) Ergänzen Sie den Vektor $u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ zu einer Basis u_1, u_2, u_3 des $\mathbb{R}^3$ aus (bezüglich des Standardskalarprodukts) paarweise orthogonalen Vektoren.

b) Zeigen Sie, dass es genau eine Matrix $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gibt, die u_1 als Eigenvektor zum Eigenwert 1 und u_2, u_3 als Eigenvektoren zum Eigenwert -2 besitzt.

c) Geben Sie eine Darstellung der Matrix U aus b) bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 des $\mathbb{R}^3$ explizit an.

6.7 *(Herbst 2014, Thema 1, Aufgabe 1)*

Sei $U \subset \mathbb{R}^4$ der lineare Unterraum, der von den Vektoren $u_1 = (0, 2, 4, 4)^\top$ und $u_2 = (4, -4, 2, 0)^\top$ aufgespannt wird.

a) Bestimmen Sie eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$.

b) Bestimmen Sie orthonormale Basen für jeweils U und $U^\perp$.

c) Benützen Sie die Ergebnisse von a) und b), um eine reelle symmetrische Matrix A zu bestimmen, die U als Eigenraum zum Eigenwert -1 und $U^\perp$ als Eigenraum zum Eigenwert 2 hat.

6.8 *(Frühjahr 2008, Thema 3, Aufgabe 3)*

Die Bilinearform $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$\varphi(x, y) := 9x_1y_1 - 6x_1y_2 - 6x_2y_1 + 5x_2y_2 \quad \text{für} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Weisen Sie nach, dass φ ein Skalarprodukt ist.

6.9 *(Frühjahr 2010, Thema 2, Aufgabe 3)*

Gegeben sei die reelle 3×3–Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Zeigen Sie, dass durch

$$\sigma_B(x, y) := x^\top \cdot B \cdot y \qquad \text{für alle} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

ein Skalarprodukt σ_B auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ definiert wird.

b) Berechnen Sie den Cosinus des Winkels, den die beiden Vektoren

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

bezüglich des in a) definierten Skalarprodukts σ_B einschließen.

6.10 *(Frühjahr 2000, Thema 2, Aufgabe 3)*

Auf dem $\mathbb{R}^3$ sei die Bilinearform

$$\langle x, y \rangle := x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass diese Bilinearform ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$ definiert.

b) Konstruieren Sie eine bezüglich des Skalarprodukts von a) orthogonale Basis für den Unterraum

$$U = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

6.11 *(Frühjahr 2013, Thema 3, Aufgabe 3)*

Gegeben sei die Matrix $M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Man begründe, dass M orthogonal diagonalisierbar ist, und bestimme eine Orthonormalbasis des euklidischen $\mathbb{R}^2$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt) aus Eigenvektoren von M.

b) Man zeige, dass durch $\sigma(x, y) = x^\top \cdot M \cdot y$ für alle x, $y \in \mathbb{R}^2$ ein Skalarprodukt σ auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird, und bestimme eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts σ.

6.12 *(Herbst 2015, Thema 2, Aufgabe 4)*

Auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ist durch

$$\sigma(x, y) = 4\, x_1\, y_1 - 8\, x_1\, y_2 - 8\, x_2\, y_1 + 25\, x_2\, y_2$$

für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ eine Bilinearform $\sigma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben.

a) Man zeige, dass σ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Man berechne eine Orthonormalbasis des euklidischen Vektorraums $(\mathbb{R}^2, \sigma)$, also bezüglich des Skalarprodukts σ von a).

c) Man bestimme eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass

$$\ell_A : (\mathbb{R}^2, \sigma) \to (\mathbb{R}^2, \circ), \quad \ell_A(x) = A \cdot x,$$

eine orthogonale Abbildung ist, also

$$\sigma(x, y) = \ell_A(x) \circ \ell_A(y) \qquad \text{für alle} \quad x,\, y \in \mathbb{R}^2$$

gilt; dabei bezeichne $\circ$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

6.13 *(Herbst 2011, Thema 1, Aufgabe 4)*

Man zeige, dass es auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ genau ein Skalarprodukt $\sigma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, bezüglich dem die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ eine Orthonormalbasis bilden, und gebe $\sigma(x, y)$ für $x,\, y \in \mathbb{R}^2$ explizit an.

6.14 *(Frühjahr 2005, Thema 1, Aufgabe 3)*

Für $n \in \mathbb{N}$ sei die $n \times n$–Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} = (\mathrm{Min}\,\{i, j\})_{i,j=1,\dots,n}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass durch die Formel

$$\langle x, y\rangle := x^t \cdot A_n \cdot y$$

ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ erklärt ist.

b) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle x, y\rangle = x^t \cdot A_3 \cdot y$.

6.15 *(Herbst 2013, Thema 3, Aufgabe 5)*

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrische Matrizen. Weiter habe A den Rang n und B sei positiv definit, d.h. für jedes $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gelte $x^\top B x > 0$. Zeigen Sie, dass die Bilinearform $f(x, y) = x^\top ABAy$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist.

6.16 *(Herbst 2010, Thema 1, Aufgabe 4)*

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und alle Eigenvektoren der Matrix
$$S = \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}.$$

b) Begründen Sie, dass die Matrix $\frac{1}{25}S$ die Spiegelung an der von $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$ aufgespannten Ursprungsgeraden beschreibt.

6.17 *(Herbst 2009, Thema 2, Aufgabe 3)*

Die Spiegelung an der Geraden $2x - y = 0$ in der Ebene ist eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Standard-Basis $(1,0)^t$, $(0,1)^t$ des $\mathbb{R}^2$.

6.18 *(Frühjahr 2010, Thema 3, Aufgabe 2)*

Die lineare Hülle W der Vektoren $w_1 = (1,0,-1,1)^t$ und $w_2 = (3,1,-4,2)^t$ ist ein Untervektorraum des euklidischen $\mathbb{R}^4$. Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von W und bestimmen Sie damit die Matrix der Orthogonalprojektion $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ auf den Unterraum W bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^4$.

6.19 *(Frühjahr 2010, Thema 3, Aufgabe 3)*

Zeigen Sie, dass die Matrix
$$D := \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \\ -1 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$
eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ beschreibt. Bestimmen Sie für diese Drehung einen Richtungsvektor der Drehachse und den Cosinus des Drehwinkels.

6.20 *(Frühjahr 2000, Thema 1, Aufgabe 2)*

Es ist
$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$
und $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$, die zu A gehörige lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass φ

a) orthogonal ist,

b) eine Spiegelung an einer Ebene ist.

6.21 *(Herbst 2014, Thema 3, Aufgabe 3)*

Es sei
$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass S im $\mathbb{R}^3$ eine Spiegelung beschreibt und berechnen Sie die Spiegelebene.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A := SDS$.

6.22 *(Frühjahr 2013, Thema 3, Aufgabe 4)*

Gegeben sei der euklidische $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$.

a) Man zeige, dass es genau zwei orthogonale 3×3–Matrizen der Form

$$S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & s_{13} \\ 1 & 2 & s_{23} \\ 2 & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

mit geeigneten s_{13}, s_{23}, s_{32}, $s_{33} \in \mathbb{R}$ gibt, und gebe diese beiden Matrizen explizit an.

b) Für welche der beiden in a) ermittelten Matrizen $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ beschreibt die lineare Abbildung $\ell_S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\ell_S(x) = S{\cdot}x$, eine Drehung? (Begründung!). Man bestimme die Drehachse sowie den Cosinus des Drehwinkels.

6.23 *(Frühjahr 2008, Thema 2, Aufgabe 3)*

Der euklidische $\mathbb{R}^3$ sei mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3 sowie dem Standardskalarprodukt versehen.

a) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung

$$s_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ s_1(x) = S_1 \cdot x \quad \text{mit} \quad S_1 := \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

eine Spiegelung an einer Ebene $E_1 \subset \mathbb{R}^3$ beschreibt, und geben Sie eine Gleichung für die Ebene E_1 an.

b) Bestimmen Sie eine Matrix $S_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass die lineare Abbildung

$$s_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ s_2(x) = S_2 \cdot x,$$

eine Spiegelung an der Ebene $E_2 : x_1 = x_3$ ist.

c) Es sei $d := s_2 \circ s_1$ die Komposition der beiden Ebenenspiegelungen aus a) und b). Zeigen Sie:

$$d(x) = S \cdot x \quad \text{mit} \quad S = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Begründen Sie, dass d eine Drehung ist. Bestimmen Sie die Drehachse sowie den Cosinus des Drehwinkels von d.

6.24 *(Frühjahr 2011, Thema 2, Aufgabe 4)*

Es sei $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der Ebene

$$E := \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die reelle Matrix A mit

$$\sigma(x) = A \cdot x \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

6.25 *(Herbst 2009, Thema 3, Aufgabe 4)*

Es seien

$$v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Zeigen Sie:

a) Es gibt genau eine orthogonale lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(v_1) = e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(v_2) = e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(v_3) = e_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Die Abbildung φ ist eine Drehung.

6.26 *(Frühjahr 2007, Thema 1, Aufgabe 3)*

Es seien φ_1 bzw. φ_2 die Drehungen um die x–Achse bzw. die z–Achse des $\mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \varphi_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Hintereinanderausführung $\varphi_1 \circ \varphi_2$ eine Drehung ist.

b) Zeigen Sie, dass $\varphi_1 \circ \varphi_2$ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

gegeben wird.

c) Bestimmen Sie die Drehachse von $\varphi_1 \circ \varphi_2$ sowie den Cosinus des Drehwinkels α.

6.27 *(Herbst 2007, Thema 3, Aufgabe 5)*

Es seien φ_x, φ_z die Drehungen im mathematisch positiven Sinn um die x– bzw. z–Achse im $\mathbb{R}^3$ mit dem Winkel $\frac{2\pi}{6}$. Begründen Sie, dass die Hintereinanderausführung $\varphi_x \circ \varphi_z$ wieder eine Drehung ist. Berechnen Sie für diese Drehung den Cosinus des Drehwinkels und die Drehachse.

6.28 *(Frühjahr 2009, Thema 1, Aufgabe 5)*

Es sei φ die Spiegelung im $\mathbb{R}^3$ an der durch die Gleichung $x+y+z=0$ definierten Ebene und ψ die Spiegelung an der (x,y)–Ebene. Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen von φ und von $\varphi \circ \psi$ bezüglich der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^3$. Begründen Sie, dass $\varphi \circ \psi$ eine Drehung ist.

6.29 *(Frühjahr 2009, Thema 3, Aufgabe 5)*

Es sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, welche eine Drehung des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$ mit der Drehachse $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ und einem Drehwinkel von $90°$ beschreibt. Bestimmen Sie eine Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $g(x) = T \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

6.30 *(Frühjahr 2011, Thema 3, Aufgabe 2)*

Geben Sie eine orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{3,3}$ an, welche (bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$) eine Drehung um die vom Vektor $v = (1, 1, -1)^t$ aufgespannten Drehachse mit Drehwinkel $\phi = \frac{\pi}{2}$ beschreibt.

6.31 *(Frühjahr 2014, Thema 3, Aufgabe 3)*

Im euklidischen Raum $(\mathbb{R}^3, \circ)$, versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$, betrachte man eine Drehung d mit der Drehachse $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und dem Drehwinkel $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

a) Man bestimme eine Orthonormalbasis b_1, b_2, b_3 von $(\mathbb{R}^3, \circ)$, so dass

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

die darstellende Matrix von d bezüglich b_1, b_2, b_3 ist.

b) Man bestimme die darstellende Matrix von d bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 von $\mathbb{R}^3$.

c) Man entscheide, ob d bezüglich einer Basis c_1, c_2, c_3 von $\mathbb{R}^3$ eine darstellende Matrix in Diagonalgestalt besitzt, und begründe die Entscheidung.

6.32 *(Frühjahr 2006, Thema 2, Aufgabe 4)*

Gegeben seien die Vektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Weiter sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear mit

$$f(e_1) = e_2, \quad f(e_2) = e_3, \quad f(e_3) = e_1.$$

a) Zeigen Sie, dass f eine Drehung ist. Bestimmen Sie die Drehachse von f und den Cosinus des Drehwinkels α von f.

b) Bestimmen Sie das Bild von e_1 unter der Spiegelung g_1 an der Ebene

$$E_1 = \mathbb{R}\, e_3 + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Schreiben Sie f als Produkt von zwei Spiegelungen an Ebenen.

6.33 *(Frühjahr 2007, Thema 3, Aufgabe 4)*

Es sei $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der Ebene

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2\,x - y - z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

und $\delta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der Geraden

$$g = \mathbb{R} \cdot (0, 1, -1)^t \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Weiter sei $\varphi = \sigma \circ \delta$.

a) Zeigen Sie, dass φ bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$ durch die Matrix

$$F = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben wird.

b) Zeigen Sie, dass φ die Spiegelung an einer Ebene ist, und geben Sie eine lineare Gleichung für die Spiegelungsebene von φ an.

6.34 *(Frühjahr 2014, Thema 1, Aufgabe 4)*

Betrachten Sie die Ebene

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -x - y + 2\,z = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

a) Geben Sie eine Parameterform von E an.

b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $T \in \mathrm{O}(3)$, so dass

$$T^{-1}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \right\}$$

gilt.

6.35 *(Herbst 2013, Thema 1, Aufgabe 2)*

Es seien $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem Standardskalarprodukt.

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von den Vektoren v_1, v_2 aufgespannten Untervektorraums U.

b) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung

$$v_1 \mapsto \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad v_2 \mapsto \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

zu einer orthogonalen Abbildung von $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ fortgesetzt werden kann. Bestimmen Sie alle solchen Fortsetzungen.

6.36 *(Herbst 2008, Thema 1, Aufgabe 3)*

Es sei $v_1,\ v_2,\ v_3 \in \mathbb{R}^3$ eine Orthonormalbasis. Zeigen Sie, dass es genau eine Drehung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit

$$\varphi(v_1) = v_2 \qquad \text{und} \qquad \varphi(v_2) = v_3.$$

Bestimmen Sie den Cosinus des Drehwinkels von φ.

6.37 *(Frühjahr 2012, Thema 3, Aufgabe 2)*

Sei $E \subset \mathbb{R}^3$ eine Ebene durch den Nullpunkt und (v_1, v_2) eine Basis von E mit $\|v_1\| = \|v_2\|$. Der Vektor $v_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ stehe senkrecht auf E. Zeigen Sie:

a) Die Vektoren $v_1 + v_2$ und $v_1 - v_2$ stehen aufeinander senkrecht.

b) Es gibt eine Drehung $\delta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\delta(v_1) = v_2$, $\delta(v_2) = v_1$, $\delta(v_3) = -v_3$.

6.38 *(Frühjahr 2009, Thema 2, Aufgabe 3)*

a) Bestimmen Sie die Größe der möglichen Drehwinkel einer Drehung des $\mathbb{R}^3$, die bezüglich der kanonischen Basis eine symmetrische Abbildungsmatrix D besitzt.

b) Bestimmen Sie die Matrix bezüglich der kanonischen Basis für die Abbildung des $\mathbb{R}^3$, die sich ergibt, wenn man zuerst eine Drehung um die z–Achse mit dem Drehwinkel π ausführt und dann an der Ebene $x = y$ spiegelt. Bestimmen Sie die Matrix für die Abbildung, die sich ergibt, wenn man zuerst spiegelt und dann dreht.

6.39 *(Herbst 2009, Thema 1, Aufgabe 3)*

Es sei W ein euklidischer Vektorraum mit dem Skalarprodukt φ. Für $U \subset W$ definiert man

$$U^\perp = \{w \in W : \varphi(u, w) = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

Zeigen Sie, dass für alle Untervektorräume U, $V \subset W$ gilt:

a) $(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$.

b) $(U \cap V)^\perp \supset U^\perp + V^\perp$.

6.40 *(Frühjahr 2015, Thema 3, Aufgabe 1)*

Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$–Vektorraum mit einem euklidischen Skalarprodukt $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$. Wenn $U \subseteq V$ ein Untervektorraum ist, so definiert man

$$U^\perp := \{v \in V \mid \forall u \in U \ \ \varphi(u, v) = 0\}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen für beliebige Untervektorräume U, W von V:

a) $U^\perp$ ist ein Untervektorraum von V.

b) $\dim(U^\perp) = \dim(V) - \dim(U)$.

c) $(U^\perp)^\perp = U$.

d) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.