Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Lineare Algebra und analytische Geometrie 5

5.1 *(Herbst 2009, Thema 3, Aufgabe 1)*

Betrachtet werde die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

und die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto A \cdot x.$$

Bestimmen Sie für den Kern und das Bild der Abbildung φ jeweils eine Basis.

5.2 *(Frühjahr 2012, Thema 2, Aufgabe 3)*

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ -6 & -6 & -3 & -4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot x.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

b) Untersuchen Sie f auf Injektivitiät und Surjektivität.

5.3 *(Herbst 2009, Thema 1, Aufgabe 2)*

Betrachtet werde die Abbildung

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto v_1 - v_2 + 2\,v_3.$$

a) Zeigen Sie, dass g eine lineare Abbildung ist und geben Sie eine darstellende Matrix für g an.

b) Geben Sie für $\mathrm{Kern}(g)$ und $\mathrm{Bild}(g)$ jeweils die Dimension und eine Basis an.

c) Lösen Sie die lineare Gleichung $g(v) = 1$.

5.4 *(Frühjahr 2010, Thema 2, Aufgabe 1)*

Für die reelle 3×4–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & -3 & -7 \\ 3 & -6 & 4 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

betrachte man die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = A \cdot x.$$

Es seien $U = \mathrm{Kern}(f)$ der Kern von f sowie $W = \mathrm{Bild}(f)$ der Bildraum von f.

a) Zeigen Sie, dass sowohl U als auch W die Dimension 2 besitzt. Bestimmen Sie eine Basis u_1, u_2 von U und eine Basis w_1, w_2 von W.

b) Entscheiden Sie, ob es eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $\mathrm{Kern}(g) = W$ und $\mathrm{Bild}(g) = U$ gibt und begründen Sie diese Entscheidung.

5.5 *(Frühjahr 2008, Thema 2, Aufgabe 1)*

In Abhängigkeit von einem reellen Parameter s sei die Matrix

$$A_s := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

gegeben. Die zugehörige lineare Abbildung sei

$$f_s : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f_s(x) = A_s \cdot x.$$

a) Bestimmen Sie alle Parameter $s \in \mathbb{R}$, für welche die lineare Abbildung f_s surjektiv ist, und berechnen Sie für diese s den Kern von f_s.

b) Nun sei $s = 0$ gewählt. Bestimmen Sie eine Basis v_1, v_2 des Kerns und eine Basis w_1, w_2 des Bildraums von f_0.

5.6 *(Herbst 2010, Thema 2, Aufgabe 5)*

Es sei $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die lineare Abbildung mit der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis für den Kern von F.

b) Zeigen Sie, dass B den Eigenwert 1 besitzt und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenraum.

c) Entscheiden Sie, ob B diagonalisierbar ist, und begründen Sie Ihre Antwort.

5.7 *(Frühjahr 2011, Thema 3, Aufgabe 1)*

In Abhängigkeit von einem reellen Parameter t seien die Matrix

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ -2 & -2t & t & 4+t \\ -4t & -4 & 2-2t & 8t \\ 6 & -6 & 3+t & -9+t \end{pmatrix} \quad \text{und der Vektor} \quad b(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3-t^2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t den Rang der Matrix $A(t)$.

b) Geben Sie eine Basis an für den Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad x \mapsto A(0) \cdot x.$$

c) Für welche Werte von t ist das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$A(t) \cdot x = b(t)$$

lösbar?

5.8 *(Herbst 2014, Thema 2, Aufgabe 2)*

a) Für den Endomorphismus $\ell_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\ell_A(x) = A \cdot x$, mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

zeige man $\operatorname{Kern}(\ell_A) = \operatorname{Bild}(\ell_A)$.

b) Man bestimme Matrizen $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und $C \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, so dass die dadurch gegebenen Endomorphismen

$$\ell_B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ \ell_B(x) = B \cdot x, \quad \text{und} \quad \ell_C : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ \ell_C(x) = C \cdot x,$$

die Eigenschaften

$$\operatorname{Kern}(\ell_B) \subsetneq \operatorname{Bild}(\ell_B) \subsetneq \mathbb{R}^4 \quad \text{und} \quad \operatorname{Bild}(\ell_C) \subsetneq \operatorname{Kern}(\ell_C) \subsetneq \mathbb{R}^4$$

besitzen.

5.9 *(Frühjahr 2012, Thema 3, Aufgabe 3)*

Sei π die lineare Abbildung

$$\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2\,x - y - z \\ x - z \\ x - y \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

a) Für alle $v \in \mathbb{R}^3$ ist $\pi(\pi(v)) = \pi(v)$.

b) $\operatorname{Kern}(\pi) \cap \operatorname{Bild}(\pi) = \{0\}$.

c) $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Kern}(\pi) + \operatorname{Bild}(\pi)$.

5.10 *(Herbst 2004, Thema 1, Aufgabe 3)*

a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, und bestimmen Sie S^{-1}.

b) Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit

$$f(a_1) = a_2, \qquad f(a_2) = a_3 \qquad f(a_3) = a_1,$$

und bestimmen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

5.11 *(Frühjahr 2011, Thema 1, Aufgabe 3)*

a) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ g_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie eine Matrix N mit $N \cdot f_i = g_i$ für $i = 1, 2, 3$.

5.12 *(Herbst 2012, Thema 2, Aufgabe 2)*

a) Gibt es jeweils eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit den angegebenen drei Vorgaben? Begründen Sie Ihre Antwort. (e_1, e_2, e_3 bezeichnen die Standardbasisvektoren in $\mathbb{R}^3$.)

(i) $f(e_1) = (2, 3, 1)$, $f(e_2) = (2, 1, 3)$, $f(e_3) = (4, 4, 4)$.

(ii) $f((1, 2, 3)) = e_1$, $f((-2, 3, 0)) = e_2$, $f((-3, 1, -3)) = (-1, 1, 1)$.

b) Bestimmen die Vorgaben

$$\begin{aligned} g((1, 2, -3, -4)) &= (1, 2, 3, 4) \\ g((-2, -2, 5, 13)) &= (4, 3, 2, 1) \\ g((2, 4, -6, -14)) &= (2, 2, 2, 2) \\ g((1, 4, -4, -1)) &= (1, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

eine eindeutige lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$?

5.13 *(Frühjahr 2009, Thema 3, Aufgabe 2)*

Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben; dabei ist t ein reeller Parameter.

a) Bestimmen Sie alle Parameter $t \in \mathbb{R}$, für die v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, und stellen Sie in den anderen Fällen den Nullvektor jeweils als nichttriviale Linearkombination dieser Vektoren dar.

b) Bestimmen Sie alle Parameter $t \in \mathbb{R}$, für die es eine lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{mit} \qquad f(v_1) = w_1, \quad f(v_2) = w_2 \quad \text{und} \quad f(v_3) = w_3$$

gibt. Entscheiden Sie mit Begründung, in welchen Fällen f dadurch eindeutig bestimmt ist.

5.14 *(Herbst 2006, Thema 1, Aufgabe 1)*

Gegeben seien die Vektoren v_1, v_2, $v_3 \in \mathbb{R}^3$ und w_1, w_2, $w_3 \in \mathbb{R}^4$ durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2c-1 \\ 1-c \end{pmatrix},$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist c ein reeller Parameter.

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von c die Dimension des von v_1, v_2, v_3 aufgespannten Unterraums im $\mathbb{R}^3$.

b) Untersuchen Sie, für welche Werte von c es

(i) keine, (ii) genau eine, (iii) mehr als eine

lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ gibt mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, 2, 3$.

c) Nun sei $c = 0$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ die lineare Abbildung mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, 2, 3$. Bestimmen Sie die Dimension des Bildes von f. Untersuchen Sie, ob f injektiv bzw. surjektiv ist.

5.15 *(Herbst 2003, Thema 1, Aufgabe 2)*

Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(a_i) = b_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$ gibt, wobei

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad b_4 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.16 *(Frühjahr 2011, Thema 3, Aufgabe 3)*

Im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ seien die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{bzw.} \ \ c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ c_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass b_1, b_2, b_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ und c_1, c_2 eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Bezüglich der kanonischen Basen des $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ sei die lineare Abbildung $f_P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ durch die Matrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$$

gegeben. Bestimmen Sie die darstellende Matrix P' für f_P bezüglich der Basen aus a).

5.17 *(Herbst 2012, Thema 3, Aufgabe 2)*

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die Matrix der Abbildung $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ bzgl. der folgenden Basen

$$B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$B_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

a) Stellen Sie

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

als Linearkombination der Basiselemente aus B_1 dar.

b) Bestimmen Sie den Bildvektor $f(M)$ der Matrix M bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

c) Ist f surjektiv? (mit Begründung)

5.18 *(Herbst 2011, Thema 1, Aufgabe 2)*

Für die reelle 3×4–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

betrachte man die zugehörige lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = A \cdot x;$$

es seien $U = \mathrm{Kern}(f)$ der Kern von f sowie $W = \mathrm{Bild}(f)$ der Bildraum von f.

a) Man zeige, dass sowohl U als auch W die Dimension 2 besitzt, und bestimme eine Basis von U sowie eine Basis von W.

b) Man ermittle eine Basis von $\mathbb{R}^4$ und eine Basis von $\mathbb{R}^3$, so dass f bezüglich dieser Basen die darstellende Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

besitzt.

5.19 *(Frühjahr 2013, Thema 3, Aufgabe 2)*

Man betrachte den von den vier Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

aufgespannten Untervektorraum $V = \langle v_1, v_2, w_1, w_2 \rangle$ im $\mathbb{R}^3$.

a) Man zeige, dass v_1, v_2 eine Basis von V ist, und stelle w_1 und w_2 als Linearkombinationen von v_1, v_2 dar.

b) Man begründe, dass es genau einen Endomorphismus $f : V \to V$ von V mit $f(v_1) = w_1$ und $f(v_2) = w_2$ gibt, und gebe die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis v_1, v_2 von V an.

c) Man zeige, dass f diagonalisierbar ist, und bestimme eine Basis von V aus Eigenvektoren von f.

5.20 *(Herbst 2015, Thema 1, Aufgabe 3)*

Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt $\circ$ sei $U = \mathrm{span}(v_1, v_2)$ der lineare Unterraum mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis von $U^\perp$.

b) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung mit $\mathrm{Kern}(f) = U$ und $\mathrm{Bild}(f) = U^\perp$ und $e_1 \circ f(e_1) = 4$. Bestimmen Sie die zu f gehörige Matrix A.

c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von f.

d) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$, welche aus Eigenvektoren von f besteht.

5.21 *(Herbst 2014, Thema 3, Aufgabe 4)*

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix und

$$f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad X \mapsto AXA^{-1}.$$

Zeigen Sie:

a) f ist eine lineare Abbildung.

b) Die Menge $U_A := \left\{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid f(X^\top) = f(X)^\top\right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$.

c) Ist A orthogonal, so ist $U_A = \mathbb{R}^{n\times n}$.

d) 1 ist ein Eigenwert von f.

e) 0 ist kein Eigenwert von f.

5.22 *(Herbst 2012, Thema 1, Aufgabe 3)*

Es sei V der Vektorraum der reellen 2×2–Matrizen. Auf V werde eine Abbildung

$$\Phi : V \to V \qquad \text{durch} \qquad A \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

definiert.

a) Zeigen Sie, dass Φ eine lineare Abbildung ist.

b) Bestimmen Sie den Kern und das Bild von Φ.

c) Es sei U der Unterraum

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestimmen Sie die Dimensionen der Unterräume $\Phi(U)$, $U \cap \Phi(U)$ und $U + \Phi(U)$.

5.23 *(Frühjahr 2013, Thema 1, Aufgabe 2)*

Seien A, $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben. Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad X \mapsto AX - XB.$$

a) Zeigen Sie: Ist $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor der transponierten Matrix ${}^tB$ zum Eigenwert μ, so ist

$$\begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 \\ x_2y_1 & x_2y_2 \end{pmatrix} = x \cdot {}^ty$$

ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda - \mu$.

b) Haben A und B einen gemeinsamen Eigenwert, so gibt es eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{2\times 2} \setminus \{0\}$ mit $AC = CB$.

5.24 *(Frühjahr 2015, Thema 3, Aufgabe 2)*

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass $\Phi : \mathbb{R}^{3\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $X \mapsto A \cdot X$ eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung ist.

b) Zeigen Sie, dass Φ surjektiv ist.

c) Bestimmen Sie alle $X \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ mit $A \cdot X = E_2$.

5.25 *(Herbst 2007, Thema 3, Aufgabe 3)*

Es bezeichne $\mathbb{R}^{2\times 2}$ den Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen und $\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ die lineare Abbildung

$$\varphi(A) = A + A^\top,$$

wobei $A^\top$ die zu A transponierte Matrix ist.

a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von φ bezüglich der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

b) Zeigen Sie, dass φ diagonalisierbar ist und bestimmen Sie eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aus Eigenvektoren für φ.

5.26 *(Frühjahr 2007, Thema 1, Aufgabe 2)*

Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der reellen 2×2–Matrizen sei die Basis

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix der linearen Abbildung

$$F : V \to V, \quad F(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis A_1, A_2, A_3, A_4.

b) Entscheiden Sie, ob F diagonalisierbar ist.

5.27 *(Herbst 2015, Thema 3, Aufgabe 4)*

Gegeben sei die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad A \mapsto B \cdot A,$$

wobei

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass Φ eine lineare Abbildung ist.

b) Zeigen Sie, dass für die charakteristischen Polynome von Φ und B die folgende Gleichheit gilt:

$$\chi_\Phi = (\chi_B)^2 .$$

c) Zeigen Sie, dass Φ diagonalisierbar ist, und geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bestehend aus Eigenvektoren von Φ an.

5.28 *(Herbst 2015, Thema 2, Aufgabe 2)*

Für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ bezeichne $\mathbb{R}^{n\times n}$ den $\mathbb{R}$–Vektorraum aller reellen $n \times n$–Matrizen. Für fest gewählte reelle Zahlen a und b betrachte man die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad f(X) = a\,X + b\,X^\top,$$

wobei $X^\top$ die zu X transponierte Matrix bezeichne. Man zeige:

a) f ist eine lineare Abbildung.
b) $a + b$ und $a - b$ sind Eigenwerte von f.
c) f ist genau dann bijektiv, wenn $a^2 \neq b^2$ ist.

5.29 *(Frühjahr 2013, Thema 1, Aufgabe 1)*

Es bezeichne $V := \{f(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(f) \leq 3\}$ den reellen Vektorraum aller reellen Polynome, deren Grad höchstens 3 ist.

a) Zeigen Sie, dass bei vorgegebenem $c \in \mathbb{R}$ die Abbildung
$$\varphi_c : V \to \mathbb{R}, \quad f(X) \mapsto f(c)$$
linear ist.
b) Bestimmen Sie die Dimension des Untervektorraums
$$U_c := \{f(X) \in V \mid f(c) = 0\}.$$
c) Bestimmen Sie die Dimension des Durchschnitts $U_0 \cap U_1$ und eine Basis davon.

5.30 *(Frühjahr 2015, Thema 2, Aufgabe 1)*

Sei P_2 der reelle Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2. Sei

$$L : P_2 \to \mathbb{R}^2, \quad p \mapsto \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) - p(-1) \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass L eine lineare Abbildung ist.
b) Zeigen Sie, dass L surjektiv ist und bestimmen Sie $\dim(\ker(L))$ (die Dimension des Kerns $\ker(L)$ von L).
c) Bestimmen Sie eine Basis von $\ker(L)$.
d) Bestimmen Sie die L darstellende Matrix bezüglich der Basis $(1, x, x^2)$ von P_2 und der Standardbasis $\left(\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right)$ von $\mathbb{R}^2$.

5.31 *(Herbst 2013, Thema 2, Aufgabe 1)*

Für $d \in \mathbb{N}$ bezeichne V_d die Menge aller Polynome mit reellen Koeffizienten in einer Unbestimmten X und vom Grad $\leq d$, ferner sei

$$U_{d+1} := \{f \cdot (X - 1) \mid f \in V_d\}.$$

Für jedes $d \in \mathbb{N}$:

a) Zeigen Sie $U_{d+1} \subseteq V_{d+1}$.
b) Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\alpha_d : V_d \to V_{d+1}, \quad f \mapsto f \cdot (X - 1)$$
$\mathbb{R}$–linear ist; bestimmen Sie Kern und Bild dieser Abbildung.
c) Bestimmen Sie $\dim(U_{d+1})$.

5.32 *(Herbst 2010, Thema 2, Aufgabe 3)*

Es bezeichne $\mathbb{R}[X]$ den $\mathbb{R}$–Vektorraum aller Polynome mit reellen Koeffizienten und $V \subset \mathbb{R}[X]$ den Untervektorraum aller Polynome vom Grad höchstens $= 3$. Weiter sei die lineare Abbildung $f : V \to V$ definiert durch

$$f : \quad p(X) \mapsto \frac{1}{2}\left(p(X+1) + p(X-1)\right).$$

a) Bestimmen Sie die zu f gehörende Matrix bezüglich der Basis 1, X, X^2, X^3.

b) Zeigen Sie: Genau die Polynome $p \neq 0$ vom Grad ≤ 1 sind Eigenvektoren von f.

5.33 *(Herbst 2010, Thema 3, Aufgabe 1)*

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ den $\mathbb{R}$–Vektorraum der Polynome $p(X)$ vom $\mathrm{Grad}(p) \leq n$ mit reellen Koeffizienten. Betrachtet werde die Abbildung

$$f : \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}), \quad p \mapsto p' - (X+1) \cdot p''.$$

Dabei bezeichne p' bzw. p'' die erste bzw. zweite Ableitung des Polynoms p.

a) Zeigen Sie, dass f linear ist.

b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix M von f bezüglich der Standardbasen 1, X, X^2, X^3 von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ und 1, X, X^2 von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$.

c) Berechnen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ sowie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

5.34 *(Frühjahr 2009, Thema 1, Aufgabe 2)*

Betrachtet werde der Vektorraum

$$V = \left\{a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \mid a_0,\ a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

der reellen Polynome vom Grad ≤ 2. Für ein Polynom $p \in V$ bezeichnet p' seine Ableitung.

a) Zeigen Sie, dass für jedes feste $\alpha \in \mathbb{R}$ die Abbildung

$$\varphi : p \mapsto Xp' + \alpha p$$

ein Endomorphismus von V ist.

b) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die φ ein Isomorphismus ist.

5.35 *(Frühjahr 2009, Thema 2, Aufgabe 2)*

Es sei $\mathbb{R}[x]$ der Vektorraum aller Polynome mit reellen Koeffizienten, $W \subset \mathbb{R}[x]$ der Untervektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3, und $f : W \to W$ die lineare Abbildung

$$p(x) \mapsto p(x+1) - p(x).$$

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von f bezüglich der Basis 1, x, x^2, x^3 von W.

b) Entscheiden Sie, ob f injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv ist.

c) Bestimmen Sie $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Bild}(f)$ und die Dimensionen dieser beiden Räume.

5.36 *(Herbst 2008, Thema 2, Aufgabe 1)*

Es sei V der $\mathbb{R}$–Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad ≤ 2. Für jedes Polynom $p(x)$ hat das Polynom $x\,p(x+1) - x\,p(x)$ keinen höheren Grad als $p(x)$. Deswegen ist die lineare Abbildung

$$F : V \to V, \quad p(x) \mapsto x\,p(x+1) - x\,p(x),$$

wohldefiniert.

a) Bestimmen Sie die Matrix von F bezüglich der Basis 1, x, x^2 von V.

b) Ist diese Matrix (und damit die Abbildung F) diagonalisierbar?

5.37 *(Frühjahr 2007, Thema 3, Aufgabe 3)*

Es sei V ein 4–dimensionaler $\mathbb{R}$–Vektorraum mit der Basis v_1, v_2, v_3, v_4. Weiter sei $\varphi : V \to V$ die lineare Abbildung mit

$$\varphi(v_1) = v_2, \quad \varphi(v_2) = v_3, \quad \varphi(v_3) = v_4, \quad \varphi(v_4) = v_1.$$

Berechnen Sie Basen für die Eigenräume von φ in V und entscheiden Sie, ob φ reell diagonalisierbar ist.

5.38 *(Frühjahr 2014, Thema 3, Aufgabe 2)*

Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines reellen Vektorraums V mit der Eigenschaft $f \circ f = \mathrm{id}_V$. Ferner seien

$$U = \{u \in V \mid f(u) = u\} \qquad \text{und} \qquad W = \{w \in V \mid f(w) = -w\}\,.$$

Man zeige:

a) Es sind U und W Untervektorräume von V, und für alle $v \in V$ gilt $v + f(v) \in U$ und $v - f(v) \in W$.

b) Es ist $U + W = V$ und $U \cap W = \{0_V\}$.

c) Ist V vom Nullraum $\{0_V\}$ verschieden und endlich erzeugt, so ist der Endomorphismus $f : V \to V$ diagonalisierbar.

5.39 *(Frühjahr 2014, Thema 1, Aufgabe 1)*

Es sei V ein n–dimensionaler $\mathbb{R}$–Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$, und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $\dim(\ker(f)) = m \geq 1$, so dass

$$\mathrm{Bild}(f) \cap \ker(f) = \{0\}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass die Einschränkung

$$f|_{\mathrm{Bild}(f)} : \mathrm{Bild}(f) \to \mathrm{Bild}(f)$$

ein Isomorphismus ist.

b) Zeigen Sie, dass sich jeder Vektor $v \in V$ eindeutig als Summe $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in \ker(f)$ und $v_2 \in \mathrm{Bild}(f)$ schreiben lässt.

c) Zeigen Sie, dass es eine Basis von V gibt, bezüglich der die lineare Abbildung durch eine Blockmatrix der Gestalt

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

mit einer invertierbaren Matrix $B \in \mathbb{R}^{k \times k}$ für $k = n - m$ gegeben ist.

5.40 *(Frühjahr 2011, Thema 1, Aufgabe 2)*

Es sei A eine orthogonale $n \times n$–Matrix. Zeigen Sie:

a) Jeder Eigenvektor von A zum Eigenwert 1 ist auch Eigenvektor der transponierten Matrix $A^\top$ zum gleichen Eigenwert 1.

b) Der Eigenraum von A zum Eigenwert 1 ist orthogonal zum Bildraum der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto (A - E_n) \cdot x.$$

5.41 *(Frühjahr 2012, Thema 2, Aufgabe 1)*

Sei $\mathbb{R}^{n \times n}$ die Menge aller reellen $n \times n$–Matrizen und sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit der Eigenschaft $M \cdot M = M$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die Matrix $M' := (E_n - M) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (wobei $E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix sei) erfüllt die Gleichung $M' \cdot M' = M'$.

b) $\mathrm{Bild}(M) = \mathrm{Kern}(M')$ und $\mathrm{Bild}(M') = \mathrm{Kern}(M)$ (wobei wir eine Matrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$ mit der zugeordneten linearen Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ identifizieren).

c) $\mathbb{R}^n = \mathrm{Bild}(M) \oplus \mathrm{Kern}(M)$.

5.42 *(Frühjahr 2011, Thema 2, Aufgabe 3)*

Es sei V ein endlich–dimensionaler Vektorraum und $\varphi : V \to V$ linear. Zeigen Sie:

a) Ist $\mathrm{Kern}(\varphi) \cap \mathrm{Bild}(\varphi) = \{0\}$, so ist $V = \mathrm{Kern}(\varphi) \oplus \mathrm{Bild}(\varphi)$.

b) Ist $\varphi \circ \varphi = \varphi$, so ist $\mathrm{Bild}(\varphi)$ die Menge der Fixpunkte von φ, und es gilt $V = \mathrm{Kern}(\varphi) \oplus \mathrm{Bild}(\varphi)$.

5.43 *(Herbst 2003, Thema 2, Aufgabe 4)*

Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{R}$–Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Entscheiden Sie (mit Begründung), welche der folgenden sechs Eigenschaften von f zueinander äquivalent sind:

(i)	f ist injektiv	(iv)	$\dim \mathrm{Bild}(f) = \dim W$
(ii)	f ist surjektiv	(v)	$\dim \mathrm{Kern}(f) = 0$
(iii)	$\dim \mathrm{Bild}(f) = \dim V$	(vi)	$\dim \mathrm{Kern}(f) = \dim V - \dim W$

5.44 *(Herbst 2013, Thema 1, Aufgabe 1)*

Es seien $\varphi : W \to U$ und $\psi : V \to W$ lineare Abbildungen zwischen endlichdimensionalen $\mathbb{R}$–Vektorräumen.

a) Zeigen Sie, dass $\varphi \circ \psi : V \to U$ eine lineare Abbildung ist.

b) Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

   i) Wenn $\varphi \circ \psi$ injektiv ist, dann ist ψ injektiv.

   ii) Wenn $\varphi \circ \psi$ injektiv ist, dann ist φ injektiv.

   iii) Wenn $\varphi \circ \psi$ surjektiv ist, dann ist ψ surjektiv.

   iv) Wenn $\varphi \circ \psi$ surjektiv ist, dann ist φ surjektiv.

5.45 *(Herbst 2013, Thema 1, Aufgabe 3)*

Es sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum und v_1, v_2 eine Basis von V. Weiter seien a, $b \in \mathbb{R}$ und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung, die durch

$$\begin{aligned} \varphi(v_1) &= a\,v_1 + b\,v_2 \\ \varphi(v_2) &= -b\,v_1 + a\,v_2 \end{aligned}$$

gegeben ist.

a) Es sei $\mathrm{id}_V : V \to V$, $v \mapsto v$, die identische Abbildung. Zeigen Sie, dass die Abbildungen id_V, φ, φ^2 im Vektorraum der $\mathbb{R}$–linearen Abbildungen von V nach V linear abhängig über $\mathbb{R}$ sind.

b) Zeigen Sie:
$$\varphi \text{ ist invertierbar} \iff a^2 + b^2 \neq 0.$$

c) Stellen Sie im Fall von $a^2 + b^2 = 1$ die Vektoren $\varphi^{-1}(v_1)$ und $\varphi^{-1}(v_2)$ durch v_1 und v_2 dar.

5.46 *(Frühjahr 2012, Thema 2, Aufgabe 2)*

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es gibt unendlich viele lineare Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(1) = 2$.

b) Drei Vektoren v_1, v_2, v_3 in $\mathbb{R}^3$ seien paarweise linear unabhängig. Dann sind auch die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.

c) Es gibt eine injektive $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.