LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Lineare Algebra und analytische Geometrie 4

4.1 *(Frühjahr 2007, Thema 1, Aufgabe 1)*

Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Unterräume des $\mathbb{R}^3$ übereinstimmen:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad V = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

4.2 *(Frühjahr 2001, Thema 2, Aufgabe 1)*

Gegeben seien die folgenden Unterräume des $\mathbb{R}^3$:

$$U := \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad V := \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie eine Basis von $U \cap V$.

4.3 *(Frühjahr 2000, Thema 2, Aufgabe 1)*

Gegeben seien die beiden Unterräume

$$U := \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad V := \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie eine Basis des Unterraums $U \cap V$.

4.4 *(Frühjahr 2011, Thema 2, Aufgabe 1)*

Es sei $V \subset \mathbb{R}^4$ der von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugte Unterraum. Zeigen Sie, dass V den Vektor

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

enthält und bestimmen Sie die Dimension von V.

4.5 *(Frühjahr 2000, Thema 3, Aufgabe 1)*

Gegeben seien die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix}3\\1\\2\\-2\end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

a) Zeigen Sie, dass u, v, w und x in einem Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^4$, $U \neq \mathbb{R}^4$, enthalten sind.

b) Geben Sie eine lineare Gleichung an, deren Lösungsmenge der Untervektorraum U ist.

4.6 *(Herbst 2013, Thema 1, Aufgabe 5)*

Es sei $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Weiter sei U_a der von den folgenden Vektoren aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\\a\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a eine Basis von U_a.

b) Ergänzen Sie jeweils die Basis von U_a aus a) zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$.

4.7 *(Herbst 2002, Thema 1, Aufgabe 2)*

Gegeben seien die Vektoren $u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^4$.

U sei der von u_1, u_2 und u_3 aufgespannte Unterraum des $\mathbb{R}^4$. $W \subset \mathbb{R}^4$ sei die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & x_2 & - & x_3 & + & 7\,x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & 2\,x_2 & & & - & 4\,x_4 & = & 0 \end{array}$$

a) Bestimmen Sie eine Basis B_U von U und eine Basis B_W von W.

b) Bestimmen Sie die Dimension von $U \cap W$ und von $U + W$.

c) Ergänzen Sie B_U zu einer Basis von $U + W$.

4.8 *(Frühjahr 2011, Thema 1, Aufgabe 5)*

Im Vektorraum der reellen Polynome seien die folgenden Teilmengen gegeben:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{P : P(x) = a\,x^2 + b\,x + c \;\text{ mit }\; a,\, b,\, c \in \mathbb{R}\}, \\ U_2 &= \{P : P(x) = a\,x^2 + b\,x \;\text{ mit }\; a,\, b \in \mathbb{R}\}, \\ U_3 &= \{P : P(x) \equiv 0 \;\text{ oder }\; \mathrm{Grad}(P) \geq 2\}, \\ U_4 &= \{P : P(x) = a\,x^2 + b\,x + c \;\text{ mit }\; a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \;\text{ und }\; c \neq 0\}. \end{aligned}$$

Überprüfen Sie, welche dieser Teilmengen einen linearen Unterraum bilden.

4.9 *(Herbst 2009, Thema 2, Aufgabe 2)*

Es sei V der $\mathbb{R}$–Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad ≤ 2. Die Teilmenge

$$U := \{p \in V \mid p(x) = p(1-x)\}$$

ist ein linearer Unterraum von V.

a) Bestimmen Sie eine Basis von U.

b) Ergänzen Sie die Basis von U aus a) zu einer Basis von V.

4.10 *(Frühjahr 2015, Thema 1, Aufgabe 2)*

Sei $P_3 = \{p = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ der reelle Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad höchstens 3.

a) Zeigen Sie: $U = \{p \in P_3 : p(1) = 0\}$ ist ein Untervektorraum von P_3.

b) Zeigen Sie: $\mathcal{B} = \{X - 1, X^2 - 1, X^3 - 1\}$ ist eine Basis von U.

c) Geben Sie die Abbildungsvorschrift des durch die (angeordnete) Basis $\mathcal{B}$ aus Teil b) gegebenen Vektorraumisomorphismus $\varphi_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^3 \to U$ an.

4.11 *(Herbst 2015, Thema 2, Aufgabe 1)*

Im $\mathbb{R}$–Vektorraum V aller reellen Polynome p mit $\mathrm{Grad}(p) \leq 3$ betrachte man den von

$$p_1 = X^3 - X^2, \quad p_2 = X^3 - X, \quad p_3 = X^2 - X \quad \text{und} \quad p_4 = X^3 - 1$$

erzeugten Untervektorraum U von V.

a) Man zeige: U ist die Menge aller Polynome $p \in V$, die eine Nullstelle bei 1 besitzen.

b) Man wähle aus p_1, p_2, p_3, p_4 eine Basis von U aus und ergänze diese zu einer Basis von V.

4.12 *(Herbst 2011, Thema 1, Aufgabe 1)*

Im $\mathbb{R}$–Vektorraum V aller Polynome mit reellen Koeffizienten seien

$$u_1 = X^3 + X^2, \qquad u_2 = X^2 + X \quad \text{und} \quad u_3 = X + 1$$

sowie

$$w_1 = X^3 - X^2 + X \quad \text{und} \quad w_2 = X^2 - X + 1$$

gegeben; ferner seien $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ und $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ die von u_1, u_2, u_3 bzw. von w_1, w_2 erzeugten Unterräume von V. Man bestimme eine Basis des Unterraums $U \cap W$.

4.13 *(Herbst 2005, Thema 2, Aufgabe 3)*

Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^{3\times 3}$ sei

$$U = \left\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A^\top = A \ \text{ und } \ \mathrm{Spur}(A) = 0\right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ist.

b) Bestimmen Sie die Dimension von U.

c) Zeigen Sie, dass

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in U liegen und linear unabhängig sind. Ergänzen Sie $\{A_1, A_2\}$ zu einer Basis von U.

4.14 *(Herbst 2008, Thema 1, Aufgabe 2)*

a) Es seien W_1 und W_2 Untervektorräume eines reellen Vektorraums V. Wie lautet die Dimensionsformel für Summe $W_1 + W_2$ und Durchschnitt $W_1 \cap W_2$?

b) Welche Dimension kann $W_1 \cap W_2$ haben, wenn $\dim W_1 = \dim W_2 = 3$ und $V = \mathbb{R}^5$ ist? Belegen Sie jeden möglichen Wert von $\dim (W_1 \cap W_2)$ durch ein Beispiel.

4.15 *(Frühjahr 2003, Thema 1, Aufgabe 1)*

Welche Dimension kann der Durchschnitt eines dreidimensionalen und eines vierdimensionalen Untervektorraums in einem sechsdimensionalen Vektorraum haben?

4.16 *(Herbst 2009, Thema 3, Aufgabe 2)*

Es seien v und w linear unabhängige Vektoren in einem $\mathbb{R}$–Vektorraum V, sowie α und β zwei reelle Zahlen. Zeigen Sie: Die Vektoren $x = \alpha v + \beta w$ und $y = \beta v + \alpha w$ sind genau dann linear abhängig, wenn $\alpha = \beta$ oder $\alpha = -\beta$.

4.17 *(Frühjahr 1999, Thema 1, Aufgabe 1)*

Es sei $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ eine Basis des Vektorraums V über dem Körper $\mathbb{R}$. Weiter seien Vektoren $a_i \in V$ gegeben durch

$$a_1 = b_1 + \beta_1 \cdot b_3, \quad a_2 = b_2 + \beta_2 \cdot b_4, \quad a_3 = \beta_3 \cdot b_1 + b_3, \quad a_4 = \beta_4 \cdot b_2 + b_4,$$

wobei β_1, β_2, β_3 und β_4 feste reelle Zahlen sind. Zeigen Sie, dass $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ genau dann eine Basis von V ist, wenn

$$(1 - \beta_1 \beta_3)(1 - \beta_2 \beta_4) \neq 0.$$

4.18 *(Frühjahr 2009, Thema 2, Aufgabe 1)*

Es sei $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ eine Basis des $\mathbb{R}$–Vektorraums V. Ferner seien

$$a_1 = 2\, b_1 - b_2, \quad a_2 = b_2 + b_3 + b_4, \quad a_3 = b_3 - b_4$$

und $U = \operatorname{span}\{a_1, a_2, a_3\}$ der von a_1, a_2, a_3 aufgespannte Unterraum.

a) Zeigen Sie, dass $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ eine Basis von U ist.

b) Zeigen Sie, dass $x = 6\, b_1 - 5\, b_2 - 4\, b_4$ in U liegt und bestimmen Sie die Koordinaten von x bezüglich A.

c) Ergänzen Sie A zu einer Basis von V.

4.19 *(Frühjahr 2006, Thema 3, Aufgabe 2)*

Es seien v_1, v_2, v_3, v_4 vier linear unabhängige Vektoren in einem $\mathbb{R}$–Vektorraum. Weiter sei U der von

$$u_1 := v_1 + v_2, \quad u_2 := v_2 + v_3, \quad u_3 := v_3 + v_4$$

aufgespannte Untervektorraum und W der von

$$w_1 := v_1 - v_2, \quad w_2 := v_2 - v_3$$

aufgespannte Untervektorraum. Bestimmen Sie die Dimensionen der Untervektorräume U, W, $U \cap W$ und geben Sie eine Basis von $U \cap W$ an.

4.20 *(Frühjahr 2002, Thema 3, Aufgabe 1)*

Es seien a, b, c und d linear unabhängige Vektoren in einem reellen Vektorraum. Man bestimme die Dimension des von den Vektoren

$$v_1 = a + b + c + d, \quad v_2 = b + c, \quad v_3 = c + d, \quad v_4 = a + b$$

aufgespannten Unterraums.

4.21 *(Herbst 2000, Thema 1, Aufgabe 1)*

V sei ein reeller Vektorraum und $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ eine Basis von V. Der Unterraum $U \subset V$ werde von den Vektoren u_1, u_2 und u_3 aufgespannt, der Unterraum $W \subset V$ von w_1 und w_2, wobei

$$u_1 = v_1 + v_2 - v_3 - v_4, \quad u_2 = 2v_2 + 3v_3, \quad u_3 = -v_1 + v_2 + 4v_4,$$

$$w_1 = 2v_2 + v_3 + v_4, \quad w_2 = -2v_1 + 3v_3 + 2v_4.$$

a) Untersuchen Sie, ob $x = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ in U liegt.

b) Bestimmen Sie eine Basis von $U \cap W$.

4.22 *(Frühjahr 2000, Thema 1, Aufgabe 1)*

Seien a, b und c Vektoren eines $\mathbb{R}$–Vektorraums V. Zeigen Sie:

a) Die Vektoren $v_1 = a + b + c$, $v_2 = a + 2\,b + 3\,c$, $v_3 = 2\,a + 3\,b + c$ und $v_4 = 3\,a + b + 2\,c$ sind linear abhängig.

b) Sind $\{a, b, c\}$ eine Basis von V, so sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.

4.23 *(Herbst 2007, Thema 1, Aufgabe 5)*

Es sei M eine reelle $n \times n$–Matrix mit $M^2 = M$. Weiter sei $U \subset \mathbb{R}^n$ der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems $M \cdot x = 0$ und $S \subset \mathbb{R}^n$ der von den Spalten der Matrix M erzeugte Untervektorraum. Zeigen Sie:

a) Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ ist $v - M \cdot v \in U$,

b) $\mathbb{R}^n = U \oplus S$ (direkte Summe).

4.24 *(Frühjahr 2013, Thema 3, Aufgabe 1)*

a) Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ sei die Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j, \\ 1, & \text{für } i = j+1, \\ a, & \text{für } i = 1 \text{ und } j = n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

mit einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ gegeben; zu betrachten ist also

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Man zeige $\det(A) = 1 + (-1)^{n+1}\, a$ etwa unter Verwendung des Laplaceschen Determinantenentwicklungssatzes.

b) Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum mit $\dim(V) = n \geq 3$ sowie $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V; ferner werden die Vektoren $v_j = b_j + b_{j+1}$ für $j \in \{1, \dots, n-1\}$, also

$$v_1 = b_1 + b_2, \dots, v_{n-1} = b_{n-1} + b_n,$$

sowie $v_n = b_n + b_1$ betrachtet. Man zeige etwa mit Hilfe von a), dass

- die Vektoren $v_1, \dots, v_{n-1}$ linear unabhängig sind,
- die Vektoren $v_1, \dots, v_{n-1}, v_n$ genau dann eine Basis von V sind, wenn n ungerade ist.

4.25 *(Herbst 2014, Thema 2, Aufgabe 1)*

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ seien die $n-1$ Vektoren

$$s_1, \dots, s_{n-1} \in \mathbb{R}^n$$

fest gewählt; es bezeichne

$$U = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$$

den von $s_1, \dots, s_{n-1}$ erzeugten Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$. Ferner betrachte man die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \det(s_1, \dots, s_{n-1}, x);$$

die Linearität von f ergibt sich direkt aus den Eigenschaften der Determinante und muss hier nicht nachgeprüft werden.

a) Man zeige $U \subseteq \operatorname{Kern}(f)$.

b) Man bestimme $\dim \operatorname{Kern}(f)$ in Abhängigkeit von $\dim(U)$.