Dr. Erwin Schörner

# Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Lineare Algebra und analytische Geometrie 3

3.1 *(Herbst 1997, Thema 3, Aufgabe 1)*

Berechnen Sie die Determinante der reellen Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.2 *(Frühjahr 2001, Thema 1, Aufgabe 4)*

Für $n \in \mathbb{N}$ sei die $n \times n$–Matrix $A_n$ gegeben durch

$$a_{ik} := \begin{cases} -1, & \text{für } i = k, \quad k = 1, \dots, n, \\ 1, & \text{für } i = k+1, \quad k = 1, \dots, n-1, \\ 1, & \text{für } i = k-1, \quad k = 2, \dots n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Ermitteln Sie $\det(A_1)$, $\det(A_2)$ und $\det(A_3)$.

b) Bestimmen Sie eine Rekursionsformel für $\det(A_n)$.

c) Berechnen Sie $\det(A_n)$ für alle $n$.

3.3 *(Frühjahr 2008, Thema 3, Aufgabe 2)*

Für $n \in \mathbb{N}$ sei die folgende $n \times n$–Matrix gegeben:

$$T_n := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Determinanten-Entwicklungssatzes die Rekursionsformel

$$\det(T_n) = 2 \cdot \det(T_{n-1}) - \det(T_{n-2}) \qquad \text{für} \quad n > 2.$$

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

$$\det(T_n) = 1 \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

3.4 *(Herbst 2008, Thema 2, Aufgabe 2)*

Berechnen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & \alpha \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.5 *(Herbst 2009, Thema 2, Aufgabe 1)*

Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und berechnen Sie in diesen Fällen die inverse Matrix.

3.6 *(Herbst 2010, Thema 3, Aufgabe 2)*

In Abhängigkeit von einem Parameter $s \in \mathbb{R}$ seien die beiden $3 \times 3$–Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & s \\ 0 & 1-s & 0 \\ s & s & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} -s & s & -1 \\ 0 & -1 & s \\ s^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, für die $A$ bzw. $B$ invertierbar sind.

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$ den Rang der Matrix $A \cdot B$.

3.7 *(Herbst 2012, Thema 1, Aufgabe 1)*

Für $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$ sei

$$A_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & c & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$, so dass $\det(A_{a,b,c}) = 0$.

b) Bestimmen Sie alle $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$, so dass $\mathrm{Rang}(A_{a,b,c}) = 3$.

3.8 *(Frühjahr 2015, Thema 2, Aufgabe 4)*

Gegeben sei die reelle $3 \times 3$–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3};$$

ferner werde die Nullmatrix des $\mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $O$ bezeichnet.

a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}^3$ mit $Ax = 0$ ( $=$ Nullvektor im $\mathbb{R}^3$) und finden Sie alle Matrizen $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $AB = O$.

b) Geben Sie eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3} \setminus \{O\}$ mit $AB = O$ (wie in Teil a)) an, so dass *zusätzlich* auch $BA = O$ gilt.

3.9 *(Herbst 2013, Thema 2, Aufgabe 2)*

Sei $m \in \mathbb{N}$. Für $s \in \mathbb{R}$ bezeichne $M_s := \begin{pmatrix} s & \dots & s \\ \vdots & & \vdots \\ s & \dots & s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,m}$ die $m \times m$–Matrix, bei der jeder Eintrag $s$ ist. Geben Sie eine Formel für

$$(M_s)^n = M_s \cdot \ldots \cdot M_s$$

($n$ Faktoren, $n \in \mathbb{N}$ beliebig) an und beweisen Sie diese.

3.10 *(Herbst 2007, Thema 2, Aufgabe 2)*

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eine beliebige reelle $2 \times 2$–Matrix. Weiter sei $D := \det(A)$ die Determinante und

$$S := a + d$$

die Spur dieser Matrix.

a) Zeigen Sie
$$D \cdot E_2 - S \cdot A + A^2 = 0,$$
wobei $E_2$ die $2 \times 2$–Einheitsmatrix und $0$ die $2 \times 2$–Nullmatrix bezeichnet.

b) Folgern Sie aus a): Es gilt $A^2 = E_2$ genau dann, wenn
- entweder $S = 0$ und $D = -1$,
- oder $b = c = 0$ und $a^2 = d^2 = 1$.

3.11 *(Frühjahr 2014, Thema 2, Aufgabe 4)*

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto A\,x$, die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung. Gegeben seien weiterhin die drei Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $B$ von $f$ bezüglich der Basis $b_1$, $b_2$, $b_3$.

b) Berechnen Sie $B^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und bestimmen Sie daraus $A^n$.

c) Die reellen Folgen $(u_n)$, $(v_n)$, $(w_n)$ seien durch folgende Rekursionsformeln definiert: $u_0 = v_0 = 1$, $w_0 = 2$ und für alle $n \geq 0$ sei
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3\,u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} &= 2\,v_n \\ w_{n+1} &= u_n - v_n + 3\,w_n \end{aligned}$$
Berechnen Sie $u_n$, $v_n$, $w_n$ für $n \in \mathbb{N}$.

3.12 *(Herbst 2007, Thema 1, Aufgabe 4)*

Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf Orthogonalität und reelle Diagonalisierbarkeit:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \qquad A_4 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.13 *(Herbst 2014, Thema 2, Aufgabe 3)*

In Abhängigkeit vom reellen Parameter $a \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ 1 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gegeben. Man bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für die

i) die Matrix $M_a$ sowohl invertierbar als auch diagonalisierbar ist,

ii) die Matrix $M_a$ invertierbar, aber nicht diagonalisierbar ist,

iii) die Matrix $M_a$ nicht invertierbar, aber diagonalisierbar ist,

iv) die Matrix $M_a$ weder invertierbar noch diagonalisierbar ist.

3.14 *(Frühjahr 2015, Thema 1, Aufgabe 3)*

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ beliebig und $\mathbb{R}^{n\times n}$ der Vektorraum aller reellen $(n \times n)$–Matrizen. Ferner bezeichne $E_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie alle zu $\lambda \cdot E_n$ ähnlichen Matrizen.

b) Zeigen Sie: Eine obere Dreiecksmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, deren Diagonaleinträge alle gleich $\lambda$ sind, ist genau dann diagonalisierbar, wenn $A$ bereits eine Diagonalmatrix ist.

3.15 *(Frühjahr 2012, Thema 1, Aufgabe 3)*

a) Betrachten Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ 15 & -5 & -3 \\ -5 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es bezeichne $E_3 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Einheitsmatrix. Zeigen Sie, dass $(E_3 - A)^2 = 0$ gilt und bestimmen Sie die inverse Matrix $A^{-1}$.

b) Zeigen Sie, dass $A$ nur einen Eigenwert besitzt und nicht diagonalisierbar ist.

3.16 *(Herbst 2013, Thema 3, Aufgabe 2)*

Es sei $\mathbb{R}^{3\times 3}$ der Vektorraum der reellen $3 \times 3$–Matrizen. Weiter sei

$$M = \left\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid \det(A) = 0\right\} \qquad \text{und} \qquad N = \left\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A^\top = -A\right\}.$$

a) Untersuchen Sie, ob $M$ bzw. $N$ einen Unterraum von $\mathbb{R}^{3\times 3}$ bilden.

b) Untersuchen Sie, ob $N$ eine Teilmenge von $M$ ist, bzw. ob $M$ eine Teilmenge von $N$ ist.

3.17 *(Frühjahr 2004, Thema 1, Aufgabe 2)*

Es bezeichnen $A$, $B$ reelle $2 \times 2$–Matrizen, $E$ die $2 \times 2$–Einheitsmatrix und $O$ die $2 \times 2$–Nullmatrix. Man beweise oder widerlege durch ein Gegenbeispiel jede der folgenden Aussagen a) – d):

a) $\det(AB) = 0 \iff \det(A) = 0$ oder $\det(B) = 0$.

b) $AB = O \iff A = O$ oder $B = O$.

c) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $A$, so ist $\lambda^k$ ein Eigenwert von $A^k$ $(k \in \mathbb{N})$.

d) $A^2 = E \Longrightarrow A = E$ oder $A = -E$.

3.18 *(Frühjahr 2006, Thema 2, Aufgabe 2)*

Es seien $A$, $B$ und $C$ invertierbare reelle $2 \times 2$–Matrizen. Beweisen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel jede der folgenden sechs Aussagen. (Die Regel $(AB)^t = B^t A^t$ darf verwendet werden.)

a) $A$ und $B$ symmetrisch $\Longrightarrow A \cdot B$ symmetrisch.

b) $A$ symmetrisch $\Longrightarrow A^{-1}$ symmetrisch.

c) $A$ symmetrisch $\Longrightarrow C^t AC$ symmetrisch.

d) $A$ und $B$ orthogonal $\Longrightarrow A \cdot B$ orthogonal.

e) $A$ orthogonal $\Longrightarrow A^{-1}$ orthogonal.

f) $A$ orthogonal $\Longrightarrow C^t AC$ orthogonal.

3.19 *(Herbst 2004, Thema 1, Aufgabe 1)*

Es sei $n > 1$. Zwei reelle $n \times n$–Matrizen $A$ und $B$ heißen ähnlich, wenn es eine invertierbare reelle $n \times n$–Matrix $T$ gibt mit $B = T^{-1}AT$. Welche der folgenden Aussagen für ähnliche Matrizen sind richtig, welche sind falsch? (Begründung!)

a) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $A$, so auch von $B$.

b) Ist $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von $A$, so auch von $B$.

c) Ist $A$ invertierbar, so ist dies auch $B$.

d) Ist $A$ eine Diagonalmatrix, so auch $B$.

e) Ist $A$ die Einheitsmatrix, so auch $B$.

f) $\det(A) = \det(B)$.

3.20 *(Herbst 2011, Thema 3, Aufgabe 1)*

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Es gibt eine Basis $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ des $\mathbb{R}^4$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 23 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -17 \\ 23 \\ 11 \end{pmatrix}$.

b) Jede diagonalisierbare Matrix ist invertierbar.

c) Jede invertierbare Matrix ist diagonalisierbar.

d) Sei $A$ eine Matrix mit $A^3 = A$. Dann sind die einzig möglichen Eigenwerte von $A$ gleich 0 oder $\pm 1$.

3.21 *(Frühjahr 2013, Thema 2, Aufgabe 2)*

Wahr oder falsch: Begründen Sie Ihre Antwort durch eine Erklärung oder eine Widerlegung.

a) Wenn $v$ ein Eigenvektor einer Matrix $A$ zum Eigenwert $\lambda$ ist, dann ist $2v$ ein Eigenvektor der Matrix $A$ zum Eigenwert $2\lambda$.

b) Für jede quadratische Matrix $A$ gilt $\mathrm{Kern}(A) \subseteq \mathrm{Kern}(A^2)$.

c) Sei $\chi_A(\lambda) = (1 - \lambda)^n$ das charakteristische Polynom einer Matrix $A$. Dann ist $A$ zur Einheitsmatrix $E_n$ ähnlich.

d) Wenn das Produkt $AB$ zweier $n \times n$–Matrizen invertierbar ist, dann sind die beiden Matrizen $A$ und $B$ auch invertierbar.

3.22 *(Frühjahr 2014, Thema 1, Aufgabe 5)*

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Für jedes $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt $\mathrm{Rang}\, A^2 \leq \mathrm{Rang}\, A$.

b) Ist $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine orthogonale Matrix, dann ist $B$ invertierbar.

c) Sei $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\det C^2 = \det C$, so ist $C$ eine orthogonale Matrix.

3.23 *(Frühjahr 2014, Thema 2, Aufgabe 5)*

Wahr oder falsch: Begründen Sie Ihre Antwort durch Beweis oder Widerlegung. Dabei sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl.

a) Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f = 0$ genau dann, wenn $\mathrm{Bild}(f) \subseteq \mathrm{Kern}(g)$.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{5\times 4}$. Die Spaltenvektoren von $A$ sind genau dann linear abhängig, wenn die Zeilenvektoren von $A$ linear abhängig sind.

c) Sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Dann gilt $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

d) Sei $T \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Wenn $\det(T) = \pm 1$ und die Spaltenvektoren von $T$ paarweise senkrecht zueinander sind, so ist $T$ eine orthogonale Matrix.

3.24 *(Herbst 2014, Thema 1, Aufgabe 5)*

Wahr oder falsch: Begründen Sie Ihre Antwort durch eine Erklärung oder eine Widerlegung.

a) Jede Diagonalmatrix ist ähnlich zu einer symmetrischen Matrix.

b) Der Spaltenraum einer Matrix ist das orthogonale Komplement des Zeilenraums der Matrix.

c) Wenn $v_1$, $v_2$, $v_3$ linear abhängig voneinander sind, so hat der lineare Unterraum $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ die Dimension 2.

d) Wenn ein Endomorphismus $f$ den Eigenwert 0 hat, so ist $\dim \operatorname{Kern}(f) > 0$.

e) Für je zwei $3 \times 3$–Matrizen $A$ und $B$ gilt: Wenn $AB = E_3$, dann ist auch $BA = E_3$.

f) Für je zwei $3 \times 3$–Matrizen $A$ und $B$ gilt: Wenn $AB = 0$, dann ist auch $BA = 0$.

3.25 *(Frühjahr 2015, Thema 2, Aufgabe 3)*

Eine reelle $n \times n$–Matrix $A$ ist bekanntlich genau dann orthogonal, wenn $A^\top A = E_n$ gilt, wobei $E_n$ die $n \times n$–Einheitsmatrix bezeichne. Geben Sie für jede der folgenden Aussagen über reelle $2 \times 2$–Matrizen entweder einen Beweis oder widerlegen Sie sie durch ein Gegenbeispiel:

a) Ist $A$ orthogonal, so muss $\det(A) = 1$ oder $\det(A) = -1$ sein.

b) Ist $A$ orthogonal, so sind 1 und $-1$ die einzig möglichen reellen Eigenwerte von $A$.

c) Ist $A$ orthogonal, so muss $A$ den Eigenwert 1 oder den Eigenwert $-1$ besitzen.

d) Ist $A$ orthogonal, so ist $A$ auch invertierbar.

e) Ist $A$ orthogonal, so ist $A$ auch symmetrisch.

3.26 *(Herbst 2015, Thema 1, Aufgabe 5)*

Wahr oder falsch: Begründen Sie Ihre Antwort durch eine Erklärung oder Widerlegung. Alle Matrizen sind dabei reell.

a) Für jede diagonalisierbare $2 \times 2$–Matrix gibt es eine orthogonale Basis aus Eigenvektoren.

b) Sei $\lambda$ ein Eigenwert einer $3 \times 3$–Matrix mit

$$A^2 - 2\,A = -E_3,$$

wobei $E_3$ die $3 \times 3$–Einheitsmatrix bezeichnet. Dann ist $\lambda = 1$.

c) Seien $A$ und $B$ zwei $3\times 3$–Matrizen mit $\operatorname{Spaltenraum}(BA) = \operatorname{Spaltenraum}(B)$. Dann ist $A$ invertierbar.

d) Eine Gleichung der Form $x^2 + y^2 + ax + b = 0$ definiert im $\mathbb{R}^2$ immer eine Ellipse.

e) Eine Gleichung der Form $x^2 + y + ax + b = 0$ definiert im $\mathbb{R}^2$ immer eine Parabel.

f) Seien $U_1$, $U_2$ und $U_3$ Unterräume eines reellen Vektorraums $V$. Wenn $U_2 \subseteq U_3$ gilt, dann gilt auch $U_1 + U_2 \subseteq U_1 + U_3$.