LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Lineare Algebra und analytische Geometrie 2

2.1 *(Frühjahr 2009, Thema 3, Aufgabe 3)*

Gegeben sei die reelle 3×3–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\lambda = 3$ ein Eigenwert von A ist, und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenraum.

b) Zeigen Sie, dass $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von A ist, und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.

c) Zeigen Sie, dass A reell diagonalisierbar ist, und geben Sie eine invertierbare Matrix $P = \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ sowie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$ an.

2.2 *(Herbst 2004, Thema 1, Aufgabe 2)*

Gegeben sei die reelle 3×3–Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von M.

b) Entscheiden Sie, ob M ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.

2.3 *(Herbst 2005, Thema 2, Aufgabe 1)*

Gegeben sei die reelle Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine reelle Diagonalmatrix D und eine invertierbare reelle Matrix T derart, dass

$$D = T^{-1} M T.$$

2.4 *(Frühjahr 2010, Thema 1, Aufgabe 2)*

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

b) Ist die Matrix M diagonalisierbar?

2.5 *(Frühjahr 2012, Thema 2, Aufgabe 4)*

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

b) Prüfen Sie, ob A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist.

2.6 *(Frühjahr 2013, Thema 1, Aufgabe 3)*

Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -18 & 8 & 3 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

reell diagonalisierbar ist und bestimmen Sie eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von A.

2.7 *(Herbst 2015, Thema 1, Aufgabe 2)*

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 6 & -1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

b) Bestimmen Sie die Eigenräume von A.

c) Untersuchen Sie, ob A diagonalisierbar ist.

d) Sei nun

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob es eine Basis v_1, v_2, v_3 von $\mathbb{R}^3$ gibt, bezüglich der sowohl A als auch B Diagonalform haben. Begründen Sie Ihre Antwort.

2.8 *(Herbst 2015, Thema 2, Aufgabe 3)*

Gegeben sei die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & -4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

a) Man bestätige: $\det(M) = -108$.

b) Man zeige, dass $\lambda = 3$ ein Eigenwert der Matrix M mit einem Eigenraum der Dimension 3 ist.

c) Man folgere aus a) und b), dass M einen weiteren Eigenwert $\mu \neq \lambda$ besitzt, und entscheide mit Begründung, ob M diagonalisierbar ist.

2.9 *(Frühjahr 2014, Thema 1, Aufgabe 3)*

Betrachten Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A, zeigen Sie, dass A diagonalisierbar über $\mathbb{R}$ ist und bestimmen Sie eine Basis aus Eigenvektoren.

2.10 *(Frühjahr 2005, Thema 1, Aufgabe 5)*

a) Berechnen Sie die Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ist A diagonalisierbar?

b) Ist A invertierbar?

c) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^4$, welche möglichst viele Eigenvektoren von A enthält.

2.11 *(Herbst 2005, Thema 1, Aufgabe 2)*

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Zahlen 1 und -1 Eigenwerte der Matrix A sind und bestimmen Sie die geometrischen Vielfachheiten dieser Eigenwerte.

b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.

c) Entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist.

2.12 *(Herbst 2011, Thema 2, Aufgabe 5)*

Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -1$. Berechnen Sie eine mögliche Matrix A!

2.13 *(Herbst 2012, Thema 1, Aufgabe 2)*

Es sei V der Vektorraum der reellen 3×3 Matrizen. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie A^{2012}.

b) Zeigen Sie, dass die Matrizen A und $A - A^2$ jeweils nur einen reellen Eigenwert haben und zeigen Sie ferner, dass die dazugehörenden Eigenvektoren übereinstimmen.

c) Es sei U der von den Matrizen A, A^2 und A^3 aufgespannte Unterraum von V. Finden Sie ein $x \in \mathbb{R}^3$, welches Eigenvektor zu jedem $B \in U$ ist.

2.14 *(Herbst 2007, Thema 2, Aufgabe 3)*

Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von M besteht.

2.15 *(Herbst 2002, Thema 2, Aufgabe 2)*

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Matrix den Eigenwert 3 besitzt.

c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und alle Eigenvektoren der Matrix A.

2.16 *(Herbst 2008, Thema 3, Aufgabe 4)*

Betrachtet werde die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine orthogonale 3×3–Matrix S an derart, dass $S^t A S$ Diagonalform besitzt.

2.17 *(Frühjahr 2010, Thema 2, Aufgabe 2)*

Gegeben sei die reelle 3×3–Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte dieser Matrix.

b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $P^t S P = D$ an.

2.18 *(Frühjahr 2010, Thema 3, Aufgabe 4)*

Gegeben sei die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $v_1 = (2,1,2)^t$ ein Eigenvektor von S ist. Bestimmen Sie alle Eigenwerte von S und eine orthogonale Matrix T so, dass die Matrix $T^t S T$ Diagonalform besitzt.

2.19 *(Frühjahr 2011, Thema 1, Aufgabe 4)*

Bestimmen Sie zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

eine Drehmatrix R und eine Diagonalmatrix D so, dass

$$D = R^\top \cdot A \cdot R.$$

2.20 *(Herbst 2011, Thema 3, Aufgabe 5)*

Sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass A nur die Eigenwerte ± 2 besitzt.

b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix M, die die Matrix A diagonalisiert.

2.21 *(Frühjahr 2009, Thema 1, Aufgabe 3)*

a) Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf reelle Diagonalisierbarkeit und begründen Sie das Ergebnis:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Beweisen oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel die folgende Aussage über reelle 2×2–Matrizen:

Sind die Matrizen A und B reell diagonalisierbar, dann ist auch ihr Produkt $A \cdot B$ reell diagonalisierbar.

2.22 *(Frühjahr 2004, Thema 3, Aufgabe 2)*

Entscheiden Sie (mit Begründung), welche der folgenden vier Matrizen reell diagonalisierbar sind:

$$M_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 11 \\ 0 & 3 & 5 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}, \qquad M_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_4 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.23 *(Frühjahr 2007, Thema 2, Aufgabe 2)*

In Abhängigkeit vom reellen Parameter $t \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ t & t+1 & 0 \\ t+1 & t+1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom χ_t von A_t gegeben ist durch
$$\chi_t(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-t)(\lambda-1).$$

b) Untersuchen Sie A_t in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ auf Diagonalisierbarkeit.

c) Nun sei $t = 0$. Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $P^{-1}A_0P = D$.

2.24 *(Frühjahr 2014, Thema 2, Aufgabe 3)*

Sei $s \in \mathbb{R}$ ein Parameter und sei A_s die von s abhängige Matrix

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ s^2 & s & -s \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte A_s in Abhängigkeit von s.

b) Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist A_s diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

2.25 *(Frühjahr 2013, Thema 2, Aufgabe 4)*

Sei A die reelle, von einem Parameter $c \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c & -1-c \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ sind alle Eigenwerte von A reell?

b) Für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ ist A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

2.26 *(Herbst 2010, Thema 3, Aufgabe 3)*

Untersuchen Sie die reelle 3×3–Matrix

$$C_t = \begin{pmatrix} 0 & t & t-2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ auf reelle Diagonalisierbarkeit.

2.27 *(Herbst 2002, Thema 1, Aufgabe 1)*

Gegeben sei die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die reellen Eigenwerte von A.

b) Untersuchen Sie, für welche Zahlen α die Matrix A zu einer reellen Diagonalmatrix ähnlich ist.

2.28 *(Frühjahr 2015, Thema 3, Aufgabe 3)*

Sei $A_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$, mit reellen Parametern λ, μ. Bestimmen Sie mit geeigneten Fallunterscheidungen alle Eigenwerte und –räume von $A_{\lambda,\mu}$. Für welche Parameterwerte ist $A_{\lambda,\mu}$ diagonalisierbar? Bestimmen Sie in diesen Fällen eine invertierbare Matrix $S = S_{\lambda,\mu}$, für welche $S^{-1}A_{\lambda,\mu}S$ Diagonalgestalt hat.

2.29 *(Herbst 2005, Thema 3, Aufgabe 1)*

Geben Sie eine diagonalisierbare reelle 3×3–Matrix S so an, daß $S^2 = Y$ mit

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.30 *(Frühjahr 2009, Thema 2, Aufgabe 4)*

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A und eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren für A.

b) Bestimmen Sie eine orthogonale 2×2–Matrix T und eine Diagonalmatrix D so, dass

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = D.$$

c) Folgern Sie aus b), dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$A^n = T \cdot D^n \cdot T^{-1}.$$

d) Zeigen Sie mit c)

$$A^n = 5^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 2^{n+2}+1 & 2^{n+1}-2 \\ 2^{n+1}-2 & 2^n+4 \end{pmatrix} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.31 *(Frühjahr 2012, Thema 1, Aufgabe 5)*

Zeigen Sie:

a) Für Matrizen $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ und $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ gilt
$$SA^2S^{-1} = \left(SAS^{-1}\right)^2.$$

b) Ist $B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ diagonalisierbar und hat B nur nicht-negative Eigenwerte, so existiert eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $A^2 = B$.

Bestimmen Sie

c) eine Matrix $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$, so dass
$$A^2 = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}.$$

2.32 *(Herbst 2008, Thema 2, Aufgabe 3)*

Es sei B eine reelle $n \times n$–Matrix mit $B^2 = I_n$, wobei I_n die $n \times n$–Einheitsmatrix bezeichnet. Zeigen Sie:

a) Für jeden Eigenwert λ von B gilt $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$.

b) Ist 1 der einzige Eigenwert von B, so gilt $B = I_n$. (Hinweis: Betrachten Sie für einen Spaltenvektor $x \in \mathbb{R}^n$ das Produkt von B mit dem Vektor $x - Bx$.)

2.33 *(Frühjahr 2012, Thema 3, Aufgabe 5)*

Sei A eine invertierbare reelle $n \times n$–Matrix mit $A^{-1} = A$. Die $n \times n$–Einheitsmatrix wird mit E_n bezeichnet. Zeigen Sie:

a) Ist λ ein Eigenwert von A, so ist $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$.

b) $(A + E_n) \cdot (A - E_n) = 0$.

c) Ist 1 kein Eigenwert von A, so ist $A = -E_n$. Ist -1 kein Eigenwert von A, so ist $A = E_n$.

2.34 *(Frühjahr 2013, Thema 2, Aufgabe 5)*

Sei A eine reelle $n \times n$–Matrix mit $A^2 + 2A = 0$.

a) Bestimmen Sie alle solchen Matrizen, welche invertierbar sind.

b) Sei A wie oben, aber möglicherweise nicht invertierbar. Zeigen Sie: Für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ sind Av und $v + \frac{1}{2}Av$ entweder Null oder Eigenvektoren von A.

c) Zeigen Sie: A ist über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar.

2.35 *(Herbst 2011, Thema 1, Aufgabe 3)*

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ werde eine reelle $n \times n$–Matrix B betrachtet; es bezeichne $B^\top$ die zu B transponierte Matrix. Man beweise oder widerlege:

a) Ist $l \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von B, so auch von $B^\top$.

b) Ist $x \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von B, so auch von $B^\top$.

c) Ist B diagonalisierbar, so auch $B^\top$.

2.36 *(Frühjahr 2006, Thema 1, Aufgabe 1)*

Es sei A eine reelle 2×2–Matrix mit den (nicht notwendig reellen) Eigenwerten λ_1 und λ_2. Bekanntlich heißt A reell diagonalisierbar, wenn A ähnlich zu einer reellen Diagonalmatrix D ist, d.h., wenn es eine invertierbare reelle 2×2–Matrix T gibt mit $A = T^{-1}DT$. Welche der folgenden Aussagen a), …, d) sind richtig, bzw. falsch? Geben Sie jeweils einen Beweis, bzw. ein Gegenbeispiel an!

a) λ_1 und λ_2 sind reell mit $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Longrightarrow A$ ist reell diagonalisierbar;

b) $\det(A) < 0 \Longrightarrow A$ ist reell diagonalisierbar;

c) A ist nicht reell diagonalisierbar $\Longrightarrow \lambda_1$ und λ_2 sind nicht reell;

d) A^2 ist reell diagonalisierbar $\Longrightarrow A$ ist reell diagonalisierbar.

2.37 *(Herbst 2006, Thema 2, Aufgabe 2)*

Es sei $n \geq 2$ und A eine reelle $n \times n$–Matrix. Zeigen Sie:

a) A ist genau dann invertierbar, wenn 0 kein Eigenwert von A ist.

b) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, so ist λ^2 ein Eigenwert von A^2. Ist zudem A invertierbar, so ist λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1}.

c) Ist A reell diagonalisierbar, so gilt dies auch für A^2.

d) Ist A^2 reell diagonalisierbar, so braucht dies für A nicht zu gelten. Hinweis: Betrachten Sie etwa spezielle Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a \neq 0.$$

2.38 *(Herbst 2009, Thema 1, Aufgabe 1)*

Es sei $b \in \mathbb{R}^n$ und A eine reelle $n \times n$–Matrix. Die affine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei definiert durch

$$f(x) = A \cdot x + b, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie:

a) Die Menge der Fixpunkte von f

$$\mathrm{Fix}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = x\}$$

ist ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^n$ oder sie ist leer.

b) Wenn 1 kein Eigenwert von A ist, dann hat f genau einen Fixpunkt.

2.39 *(Herbst 2015, Thema 3, Aufgabe 1)*

Es seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reelle $n \times n$–Matrix und E_n die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Geben Sie die Definition eines Eigenwerts der Matrix A an.

b) Zeigen Sie: Ist λ Eigenwert von A, so ist $\lambda^3 - 5$ Eigenwert der Matrix $A^3 - 5E_n$.

c) Zeigen Sie: Ist λ Eigenwert von A und gilt $A^2 - 2A + E_n = 0$, so folgt $\lambda = 1$.

d) Zeigen Sie: Ist λ Eigenwert von A, so ist λ auch Eigenwert der transponierten Matrix $A^\top$.