LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Lineare Algebra und analytische Geometrie 1

1.1 *(Herbst 2005, Thema 1, Aufgabe 1)*

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & + & 6\,x_3 & + & 9\,x_4 & = & 20 \\ 2\,x_1 & + & 5\,x_2 & + & 7\,x_3 & + & 12\,x_4 & = & 27 \\ 3\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & 9\,x_3 & + & 14\,x_4 & = & 31 \end{array}$$

1.2 *(Herbst 2007, Thema 2, Aufgabe 1)*

Lösen Sie das reelle lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3\,x_1 & - & 2\,x_2 & - & 6\,x_3 & + & 4\,x_4 & = & 5 \\ -x_1 & + & 2\,x_2 & + & 2\,x_3 & - & 4\,x_4 & = & -3 \\ 2\,x_1 & - & x_2 & - & 4\,x_3 & + & 2\,x_4 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & - & 2\,x_3 & + & 2\,x_4 & = & 2 \end{array}$$

1.3 *(Herbst 2010, Thema 1, Aufgabe 1)*

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2\,x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2\,x_3 & - & 3\,x_4 & = & 0 \\ 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & - & 2\,x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3\,x_3 & + & 3\,x_4 & = & 1 \end{array}$$

1.4 *(Frühjahr 2010, Thema 1, Aufgabe 1)*

a) Lösen Sie das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2\,x_1 & + & 9\,x_2 & - & 5\,x_3 & + & 12\,x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 4\,x_2 & - & 2\,x_3 & + & 5\,x_4 & & & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & 2\,x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 5\,x_2 & - & 3\,x_3 & + & 6\,x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array}$$

b) Zeigen Sie, dass der Vektor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-12, 3, 0, 0, 0)$ eine spezielle Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2\,x_1 & + & 9\,x_2 & - & 5\,x_3 & + & 12\,x_4 & + & x_5 & = & 3 \\ x_1 & + & 4\,x_2 & - & 2\,x_3 & + & 5\,x_4 & & & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & 2\,x_4 & + & x_5 & = & 3 \\ x_1 & + & 5\,x_2 & - & 3\,x_3 & + & 6\,x_4 & - & x_5 & = & 3 \end{array}$$

ist.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems aus b).

1.5 *(Frühjahr 2007, Thema 3, Aufgabe 1)*

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$ die Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & & & + & \lambda\, x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & - & \lambda\, x_3 & + & \lambda\, x_4 & = & 0 \\ -x_1 & & & + & \lambda\, x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & & & + & \lambda^2\, x_4 & = & 1 \end{array}$$

1.6 *(Frühjahr 2009, Thema 3, Aufgabe 1)*

Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge L_s des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & s\, x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & - & 2\, x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & 2\, x_2 & + & s\, x_3 & - & 2s\, x_4 & = & -1 \\ x_1 & & & + & 2\,(s-1)\, x_3 & + & 3\, x_4 & = & 2 \end{array}$$

1.7 *(Frühjahr 2005, Thema 3, Aufgabe 1)*

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & s\, x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & s\, x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ s\, x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array}$$

a) Berechnen Sie in Abhängigkeit von s alle reellen Lösungen.

b) Bestimmen Sie für jedes $s \in \mathbb{R}$ die Dimension des Lösungsraumes des zugehörigen homogenen Systems.

1.8 *(Herbst 2008, Thema 1, Aufgabe 1)*

Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & (\lambda+1)\, x_2 & + & 2\lambda\, x_3 & + & 2\lambda\, x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & \lambda\, x_2 & + & \lambda\, x_3 & + & \lambda\, x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & \lambda\, x_2 & + & 2\lambda\, x_3 & + & 2\lambda\, x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & \lambda\, x_2 & + & \lambda\, x_3 & + & 2\lambda\, x_4 & = & 1 \end{array}$$

je nach Wahl von $\lambda \in \mathbb{R}$ entweder unlösbar oder eindeutig lösbar ist. Bestimmen Sie im zweiten Fall die Lösung.

1.9 *(Herbst 2006, Thema 3, Aufgabe 1)*

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$ alle Lösungen $(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{R}^4$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & & & 2\, x_3 & - & x_4 & = & -2 \\ 2\, x_1 & + & x_2 & + & 7\, x_3 & & & = & -3 \\ -3\, x_1 & + & 2\, x_2 & + & & & a\, x_4 & = & 8 \\ x_1 & + & 2\, x_2 & + & 8\, x_3 & + & 3\, x_4 & = & b \end{array}$$

1.10 *(Herbst 2008, Thema 3, Aufgabe 1)*

Für welche Wahl von α, $\beta \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2\,x_1 & + & x_2 & & & & & = & 0 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2\,x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & \alpha\,x_4 & = & \beta \end{array}$$

a) genau eine Lösung,

b) keine Lösung,

c) mehrere Lösungen?

Geben Sie im Fall c) alle Lösungen an.

1.11 *(Herbst 2012, Thema 3, Aufgabe 5)*

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem (G_t) über $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} -x + 3\,z & = & 3 \\ -2\,x - t\,y + z & = & 2 \\ x + 2\,y + t\,z & = & 1, \end{array}$$

wobei $t \in \mathbb{R}$ eine feste reelle Zahl ist.

a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist (G_t) eindeutig lösbar?

b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat (G_t) keine Lösung?

c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat (G_t) mehrere Lösungen?

d) Geben Sie in den Fällen der Lösbarkeit die Lösungsmenge von (G_t) an.

1.12 *(Frühjahr 2014, Thema 3, Aufgabe 1)*

Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5} \qquad \text{sowie} \qquad x_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5.$$

a) Man bestimme den Rang der Matrix A sowie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$.

b) Man bestimme $b \in \mathbb{R}^4$, so dass x_p eine Lösung von $A \cdot x = b$ ist, und gebe die Lösungsmenge dieses linearen Gleichungssystems an.

1.13 *(Frühjahr 2008, Thema 3, Aufgabe 1)*

a) Lösen Sie für $x \in \mathbb{R}^4$ das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 & -6 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

b) Ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ lösbar für jeden Vektor $b \in \mathbb{R}^4$?

1.14 *(Frühjahr 2012, Thema 3, Aufgabe 1)*

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$

a) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ des Lösungsraums des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$.

b) Geben Sie die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ an.

c) Ergänzen Sie $\mathcal{B}$ zu einer Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^5$.

1.15 *(Herbst 2003, Thema 3, Aufgabe 1)*

Gegeben sei die reelle 4×4–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie einen Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ derart, dass das lineare Gleichungssystem $\quad A \cdot x = b, \quad x \in \mathbb{R}^4$, keine Lösung besitzt.

b) Gibt es einen Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ derart, dass das lineare Gleichungssystem aus a) genau eine Lösung besitzt? (Begründung!)

c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem aus a) für $b = (1, 1, 1, 1)^t$.

1.16 *(Frühjahr 2010, Thema 3, Aufgabe 1)*

Betrachtet werde das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -a & 1 & 2 \\ -2 & 2 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}, \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von a gibt es keine, bzw. genau eine, bzw. unendlich viele Lösungen? Geben Sie in den letzten beiden Fällen jeweils die Lösungsmenge an.

1.17 *(Herbst 2007, Thema 3, Aufgabe 1)*

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & t & 7 \\ 3 & t+2 & t+4 \end{pmatrix}, \qquad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mit dem reellen Parameter t. Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem

eindeutig lösbar, mehrdeutig lösbar, bzw. nicht lösbar

ist und leiten Sie im Falle der mehrdeutigen Lösbarkeit eine Parameterdarstellung der Lösungsmenge her.

1.18 *(Herbst 2006, Thema 2, Aufgabe 1)*

In Abhängigkeit von zwei Parametern α, $\beta \in \mathbb{R}$ werde das lineare Gleichungssystem

$$A \cdot x = b, \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{R}^4,$$

betrachtet mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \alpha \\ 2 & 6 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3+\beta \end{pmatrix}.$$

a) Untersuchen Sie wann dieses Gleichungssystem lösbar ist und bestimmen Sie in diesem Fall die Dimension d des Lösungsraumes.

b) Ermitteln Sie in den beiden Fällen $\alpha = \beta = 0$ und $\alpha = \beta = 1$ jeweils explizit alle reellen Lösungen dieses linearen Gleichungssystems.

1.19 *(Herbst 2011, Thema 3, Aufgabe 4)*

a) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & 2 & t \\ 1 & t & 3 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.20 *(Herbst 2013, Thema 3, Aufgabe 1)*

Es sei

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 1-\alpha \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_\alpha = A_\alpha A_\alpha^\top \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $B_\alpha x = b$ eine eindeutige Lösung?

b) Nun sei $\alpha = 1$. Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung $B_1 x = b$.

1.21 *(Herbst 2011, Thema 2, Aufgabe 4)*

Gegeben sind die Gleichungen der drei Ebenen

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} E_1 & : & x & - & \frac{1}{4}\,y & - & 2\,z & + & 1 & = & 0 \\ E_2 & : & 2\,x & - & \frac{5}{2}\,y & - & 5\,z & - & \lambda & = & 0 \\ E_3 & : & 4\,x & + & \lambda\,y & - & 6\,z & - & \mu & = & 0 \end{array}$$

mit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Für welche λ, $\mu \in \mathbb{R}$ gibt es keinen gemeinsamen Punkt der drei Ebenen? Für welche λ, μ schneiden sich die drei Ebenen in einer Schnittgeraden? Geben Sie diese Schnittgerade an.

1.22 *(Herbst 2007, Thema 1, Aufgabe 3)*

In Abhängigkeit von den Parametern a, $b \in \mathbb{R}$ sei $L \subset \mathbb{R}^4$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & (2-b)\,x_2 & - & 2\,x_3 & & & = & 1-b \\ & & x_2 & - & 2\,x_3 & + & x_4 & = & a-1 \\ 2\,x_1 & - & 2\,b\,x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3-a-2\,b \end{array}$$

a) Zeigen Sie: L ist die Gerade

$$\left\{(1,1,1,a)^t + \lambda \cdot (b,1,1,1)^t : \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

b) Nun sei $H \subset \mathbb{R}^4$ die Hyperebene mit der Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Für welche Wahl der Parameter a und b ist

(i) $L \subset H$; (ii) $L \cap H$ ein Punkt; (iii) $L \cap H$ leer?

1.23 *(Herbst 2012, Thema 2, Aufgabe 1)*

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Es bezeichne $U := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$.

a) Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(U)$ (also die Dimension von U als $\mathbb{R}$–Vektorraum).

b) Sei U' in $\mathbb{R}^n$ die Lösungsmenge einer (weiteren) homogenen Gleichung

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$$

(die Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n$ sind aus $\mathbb{R}$; $x_1, \ldots, x_n$ sind Unbestimmte). Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap U')$ in Abhängigkeit der Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n$.

1.24 *(Frühjahr 2015, Thema 1, Aufgabe 1)*

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L \subset \mathbb{R}^n$ des folgenden Systems von n linearen Gleichungen:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_j - \sum_{j=k+1}^{n} x_j = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 \quad \text{(gibt } n-1 \text{ Gleichungen)} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j = 1. \end{cases}$$

1.25 *(Herbst 2014, Thema 3, Aufgabe 1)*

Zu $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $b \in \mathbb{R}^2$ sei $\mathcal{L}_{A,b}$ die Lösungsmenge der Gleichung $Ax = b$.

a) Beweisen oder widerlegen Sie:

i) Für alle $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gibt es ein $b \in \mathbb{R}^2$, so dass $\mathcal{L}_{A,b}$ genau aus einem Punkt besteht.

ii) Für alle $b \in \mathbb{R}^2$ gibt es ein $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass $\mathcal{L}_{A,b}$ genau aus einem Punkt besteht.

iii) Ist $\mathcal{L}_{A,b}$ ein Untervektorraum, so ist $b = 0$.

b) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass für $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\mathcal{L}_{A,b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$