Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Differential– und Integralrechnung 8

8.1 *(Herbst 2012, Thema 2, Aufgabe 5)*

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \left(1 + \frac{2}{x}\right) y$$

für $x > 0$.

8.2 *(Herbst 2012, Thema 1, Aufgabe 5)*

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x\,y' + 3\,y - 5\,x^2 = 0$$

auf $]0, \infty[$.

8.3 *(Frühjahr 2015, Thema 2, Aufgabe 5)*

Bestimmen Sie für $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x)\cos(x) - 2y(x)\sin(x) = x.$$

8.4 *(Frühjahr 2005, Thema 1, Aufgabe 6)*

Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{1}{x-2}\,y + x^2 - 2\,x, \qquad x < 2, \qquad y(1) = \frac{3}{2}.$$

8.5 *(Frühjahr 2006, Thema 3, Aufgabe 5)*

Bestimmen Sie für die Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$y' = -e^x\,y, \qquad y(0) = -1$$

die Menge $\varphi(\mathbb{R})$ ihrer Funktionswerte.

8.6 *(Herbst 2015, Thema 1, Aufgabe 5)*

Bestimmen Sie alle differenzierbaren Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche die Differentialgleichung

$$y'(x) = xe^x y(x)$$

erfüllen und für die $y(\mathbb{R}) = [1, \infty[$ gilt.

8.7 *(Herbst 2007, Thema 3, Aufgabe 4)*

Bestimmen Sie die Lösung des linearen Anfangswertproblems

$$y' = \frac{x}{1+x^2}\,y + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad y(0) = 0.$$

8.8 *(Frühjahr 2008, Thema 3, Aufgabe 5)*

Man bestimme die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \cos^2 x + y \cdot \tan x \qquad \text{mit} \quad y(0) = 1.$$

8.9 *(Frühjahr 2011, Thema 2, Aufgabe 2)*

Man bestimme alle $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, für die das Anfangswertproblem

$$y' + a\,y = e^{b\,x}, \qquad y(0) = 0$$

eine auf $\mathbb{R}$ definierte und auf $\mathbb{R}^+$ beschränkte Lösung besitzt.

8.10 *(Herbst 2010, Thema 2, Aufgabe 3)*

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \frac{1}{1+y(x)}, \qquad y(0) = 1.$$

Berechnen Sie die Lösung, und geben Sie das maximale Lösungsintervall an.

8.11 *(Herbst 2008, Thema 1, Aufgabe 5)*

Man bestimme die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = -\frac{1+2x}{1+2y}, \qquad y(0) = 0,$$

im Bereich

$$B := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\tfrac{1}{2} < y\right\}$$

mit maximalem Definitionsintervall.

8.12 *(Frühjahr 2014, Thema 3, Aufgabe 5)*

Es sei die Menge

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y > -1\right\}$$

und die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = \frac{\sin(x)}{y+1}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(0) = 1.$$

8.13 *(Herbst 2015, Thema 2, Aufgabe 5)*

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = -\frac{2e^{-y(x)}}{x^2+2x}, \qquad y(1) = 0$$

und ihren maximalen Definitionsbereich.

8.14 *(Herbst 2008, Thema 2, Aufgabe 6)*

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'y\left(x^2+1\right)+x\left(y^2+1\right)=0, \qquad y(0)=1$$

mit maximalem Definitionsintervall.

8.15 *(Frühjahr 2013, Thema 3, Aufgabe 4)*

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$yy'-e^x=0, \qquad y(0)=1$$

und geben Sie den maximalen Definitionsbereich an.

8.16 *(Herbst 2004, Thema 2, Aufgabe 6)*

Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y'=(xy)^{\frac{1}{2}}, \qquad x>0, \quad y>0, \quad y(1)=1.$$

8.17 *(Herbst 2013, Thema 1, Aufgabe 5)*

a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y'=e^{x-y} \qquad \text{mit} \qquad y(0)=\ln(2)$$

eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösungsfunktion $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ besitzt.

b) Bestimmen Sie für die Lösungsfunktion ϕ die Grenzwerte

$$\lim_{x\to-\infty}\phi(x), \qquad \lim_{x\to\infty}(\phi(x)-x)$$

und skizzieren Sie den Graphen G_ϕ von ϕ.

8.18 *(Frühjahr 2015, Thema 1, Aufgabe 5)*

a) Berechnen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(x)=\frac{y(x)^2}{y(x)^2+1}.$$

b) Berechnen Sie speziell die Lösung mit dem Anfangswert $y(0)=1$. Wie weit lässt sich diese Lösung fortsetzen?

8.19 *(Frühjahr 2008, Thema 1, Aufgabe 6)*

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'=2\,x\,y^2, \qquad y(1)=a$$

für

$$\text{(i)} \quad a=\frac{1}{2}; \qquad \text{(ii)} \quad a=-\frac{1}{2}$$

jeweils unter Angabe des maximalen Definitionsintervalls.

8.20 *(Frühjahr 2011, Thema 3, Aufgabe 5)*

Berechnen Sie die Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = x\,y - x\,y^2$$

mit den Anfangswerten

$$y(0) = -1, \quad y(0) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(0) = 2.$$

8.21 *(Herbst 2011, Thema 2, Aufgabe 6)*

Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{2\,\cos^2(y)}{1 - x^2} \qquad \text{mit} \qquad y(0) = \frac{\pi}{3}.$$

8.22 *(Frühjahr 2009, Thema 3, Aufgabe 5)*

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y - 1}{x^2 + 1}. \tag{$*$}$$

Bestimmen Sie alle konstanten und alle streng monoton wachsenden Lösungsfunktionen der Differentialgleichung $(*)$.

8.23 *(Herbst 2009, Thema 1, Aufgabe 5)*

Gegeben sei, in Abhängigkeit eines reellen Parameters $a > 0$, die Differentialgleichung

$$xy' = \frac{y - a}{ax + 1} \qquad\qquad (x > -1/a)\,.$$

a) Man bestimme alle reellen Lösungen der Differentialgleichung.

b) Man bestimme, in Abhängigkeit von a, das Verhalten der Lösung am Rande des Definitionsbereichs.

8.24 *(Herbst 2010, Thema 1, Aufgabe 4)*

Bestimmen Sie alle $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, für die das Anfangswertproblem

$$y' = 2\,x\left(y^2 - y\right), \qquad y(a) = b,$$

eine auf $\mathbb{R}$ definierte beschränkte Lösung besitzt.

8.25 *(Herbst 2006, Thema 3, Aufgabe 6)*

Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = y^3 - \frac{y}{x}, \qquad x > 0, \qquad y(1) = \frac{1}{2}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $z = \dfrac{1}{y^2}$.

8.26 *(Frühjahr 2010, Thema 1, Aufgabe 5)*

a) Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung

$$(*) \qquad y' = 2xy - 6x.$$

b) Zeigen Sie: Ist y eine Lösung von $(*)$ und J ein Intervall, in dem $y(x) \neq 0$, so erfüllt $z(x) := \frac{1}{y(x)}$ in J die Differentialgleichung

$$(**) \qquad z' = 6xz^2 - 2xz.$$

Falls umgekehrt z die Differentialgleichung $(**)$ mit $z(x) \neq 0$ im Intervall J löst, so ist $y(x) = \frac{1}{z(x)}$ in J eine Lösung von $(*)$.

c) Lösen Sie die Differentialgleichung $(**)$ mit der Anfangsbedingung $z(0) = \frac{1}{2}$, und geben Sie hierzu das maximale Lösungsintervall an.

8.27 *(Frühjahr 2011, Thema 1, Aufgabe 5)*

Es bezeichne $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ die Menge der positiven reellen Zahlen. Gegeben seien zwei stetige Funktionen $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ und die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung auf $\mathbb{R}_+$:

$$y'' + f(x)\, y' + g(x)\, y = 0.$$

a) Sei φ eine Lösung dieser Differentialgleichung. Zeigen Sie: Genau dann ist $h(x)\, \varphi(x)$ auch eine Lösung, wenn $h(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$h'' \cdot \varphi + h' \cdot (2\,\varphi' + f\,\varphi) = 0$$

ist.

b) Wenden Sie a) auf die Differentialgleichung

$$y'' + y' + \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) y = 0$$

mit der Lösung $\varphi(x) := \frac{1}{x}$ an, um eine weitere Lösung zu erhalten.

8.28 *(Herbst 2011, Thema 3, Aufgabe 5)*

Gegeben seien die beiden inhomogenen linearen Differentialgleichungen

$$x\, y' = 2\, y + x^2 \qquad (x > 0) \tag{1}$$

und

$$f'''(x) = \frac{2}{x} \qquad (x > 0). \tag{2}$$

a) Zeigen Sie ohne Ermittlung der allgemeinen Lösung von (1): Jede mindestens dreimal stetig differenzierbare Lösungsfunktion $y = f(x)$ von (1) ist auch eine spezielle Lösung von (2).

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$f'''(x) = \frac{2}{x} \qquad (x > 0), \qquad f(1) = -\frac{1}{2}, \quad f'(1) = 0, \quad f''(1) = 2.$$

8.29 *(Herbst 2007, Thema 1, Aufgabe 6)*

a) Gegeben sei die Funktion

$$f : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}.$$

Untersuchen Sie, ob eine reelle Zahl L existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y| \qquad \text{für alle } x \geq 0,\ y \geq 0$$

gilt.

b) Bestimmen Sie zwei verschiedene Lösungen $y : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$y' = \sqrt{y}, \qquad y(0) = 0.$$

8.30 *(Frühjahr 2008, Thema 2, Aufgabe 5)*

Bestimmen Sie

a) die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 4\,y' + 3\,y = 0,$$

b) eine spezielle Lösung $y_0(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung

$$y'' + 4\,y' + 3\,y = 10\cos(x),$$

c) die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung aus b) mit

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

8.31 *(Frühjahr 2006, Thema 1, Aufgabe 3)*

a) Bestimmen Sie ein reelles Lösungsfundamentalsystem der Differenzialgleichung

$$y'' + 2\,y' + 2\,y = 0.$$

b) Bestimmen Sie eine reelle Lösungsfunktion der inhomogenen linearen Differenzialgleichung

$$y'' + 2\,y' + 2\,y = -4\,x^2 - 2.$$

8.32 *(Frühjahr 2012, Thema 2, Aufgabe 2)*

Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y'' - 7\,y' + 12\,y = \exp(-x).$$

a) Bestimmen Sie die Menge der Lösungen der homogenen Differentialgleichung.

b) Geben Sie eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung an und bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

8.33 *(Herbst 2012, Thema 3, Aufgabe 5)*

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' - 5\,y' + 6\,y = 12\,x^2 - 26\,x + 15$$

a) Bestimmen Sie alle Lösungen y dieser Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie die Lösung y mit

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

8.34 *(Frühjahr 2013, Thema 1, Aufgabe 4)*

Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$y'' + y' = x, \qquad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1.$$

8.35 *(Herbst 2008, Thema 3, Aufgabe 5)*

Betrachtet wird die Differentialgleichung

$$y'' - y' - 6y = e^{-x}.$$

Bestimmen Sie alle Lösungen, die im Intervall $[0, \infty[$ beschränkt sind und die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ erfüllen.

8.36 *(Frühjahr 2007, Thema 2, Aufgabe 5)*

Bestimmen Sie die Menge aller maximalen reellen Lösungen der Differenzialgleichung

$$y'' + 2\,y' + 5\,y = 10\,e^{-2x}.$$

8.37 *(Frühjahr 2006, Thema 2, Aufgabe 5)*

Man bestimme alle Lösungen der Differenzialgleichung

$$y'' + y' - 6\,y = \cos(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

die in $\mathbb{R}$ beschränkt sind.

8.38 *(Frühjahr 2010, Thema 3, Aufgabe 5)*

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$f''(t) - 6f'(t) + 9f(t) = e^t.$$

8.39 *(Herbst 2014, Thema 2, Aufgabe 5)*

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y''(x) + 2\,k\,y'(x) + k^2\,y(x) = 3\,x^2 - 2$$

mit einer Konstanten $k > 0$.

a) Bestimmen Sie die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung mit Anfangswert

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

b) Geben Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung an.

8.40 *(Frühjahr 2009, Thema 1, Aufgabe 4)*

Geben Sie alle Funktionen $f(x)$ mit $f(0) = 1$ an, die spiegelsymmetrisch zur y–Achse sind und für die

$$f''(x) = f(x) \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

gilt.

8.41 *(Herbst 2013, Thema 2, Aufgabe 5)*

Für welche $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, besitzt die Differentialgleichung

$$y'' + c^2\, y = 0$$

eine von der Nullfunktion verschiedene Lösung $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\phi(0) = 0$ und $\phi'(1) = 0$?

8.42 *(Herbst 2013, Thema 3, Aufgabe 5)*

Bestimmen Sie alle Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, so dass jede reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 2\, a\, y' + b\, y = 0$$

auf $\mathbb{R}$ beschränkt ist.

8.43 *(Frühjahr 2015, Thema 3, Aufgabe 5)*

Man bestimme alle auf ganz $\mathbb{R}$ definierten reellwertigen Lösungsfunktionen der Differentialgleichung

$$y''(x) + 2\, y'(x) + 2\, y(x) = 0,$$

die in $x = 0$ ein lokales Minimum besitzen.

8.44 *(Frühjahr 2003, Thema 2, Aufgabe 5)*

Bestimmen Sie alle Lösungen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$y''' - 2\, y'' + 5\, y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -3, \quad y''(0) = -11.$$

8.45 *(Herbst 2005, Thema 3, Aufgabe 5)*

Finden Sie sämtliche reellen Lösungen des Anfangswertproblems

$$y'''' - 16\, y = 0, \qquad y(0) = 0.$$

8.46 *(Frühjahr 2013, Thema 2, Aufgabe 4)*

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''' - 3\, y'' + y' - 3\, y = 17\, e^{4x}.$$

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Gibt es periodische Lösungen? Gibt es nicht-periodische Lösungen?

b) Geben Sie sämtliche Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung an, welche den Anfangsbedingungen

$$y(0) = y'(0) = 0$$

genügen.

8.47 *(Frühjahr 2014, Thema 1, Aufgabe 5)*

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y''''(x) + 2\,y'''(x) - 8\,y''(x) = \exp(x).$$

8.48 *(Frühjahr 2009, Thema 2, Aufgabe 5)*

Man bestimme die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' + 2\,y' + y = e^{-x} \qquad \text{mit} \qquad y(0) = y'(0) = 1.$$

8.49 *(Herbst 2009, Thema 2, Aufgabe 5)*

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' - 2ay' + a^2 y = 2e^{ax}.$$

Für welches $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0, \qquad y(1) = 1?$$

Wie lautet sie?

8.50 *(Frühjahr 2012, Thema 3, Aufgabe 5)*

Man bestimme die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' + 4\,y = \sin(2x) \qquad \text{mit} \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

8.51 *(Herbst 2014, Thema 1, Aufgabe 5)*

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + y(x) = 2\cos(x) - 2\sin(x).$$

8.52 *(Herbst 2015, Thema 3, Aufgabe 5)*

Bestimmen Sie alle $a > 0$, für welche jede reellwertige Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + a^2 y(x) = \cos(x)$$

unbeschränkt ist.

8.53 *(Herbst 2010, Thema 3, Aufgabe 5)*

Für $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ löse man das Anfangswertproblem

$$y'' + (n-1)\,y' - n\,y = n\,x, \qquad\qquad y(0) = \frac{1-n}{n}, \qquad y'(0) = n.$$

8.54 *(Frühjahr 2012, Thema 1, Aufgabe 5)*

a) Finden Sie für gegebenes $k \in \mathbb{N}$ alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y^{(k+2)} = 2\,y^{(k+1)} - y^{(k)}.$$

b) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' = 2\,y' - y + x^2,$$

zum Beispiel mit Hilfe von Aufgabenteil a).