LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Differential– und Integralrechnung 7

7.1 *(Herbst 2015, Thema 1, Aufgabe 4)*

Gegeben sei das Dreieck

$$\Delta = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x+y \leq 3\big\}$$

und die Funktion $f : \Delta \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = (3-(x+y))e^x y^2.$$

Bestimmen Sie $f(\Delta)$.

7.2 *(Herbst 2015, Thema 2, Aufgabe 4)*

Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2-5}(x^2+y^2)^2.$$

Geben Sie jeweils an, ob es sich um ein lokales Minimum oder Maximum handelt und ob dieses Extremum global ist.

7.3 *(Frühjahr 2015, Thema 1, Aufgabe 3)*

a) Finden Sie alle kritischen Punkte und deren Typ der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = (x+y)^2 - \cos(x).$$

b) Zeigen Sie, dass die Funktion tatsächlich ein globales Minimum hat.

7.4 *(Herbst 2014, Thema 1, Aufgabe 4)*

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = x^4 - 3\,x^2\,y + y^2.$$

a) Zeigen Sie, dass für alle $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ die Funktion

$$g(t) = f(ta, tb)$$

ein lokales Minimum in $t = 0$ hat.

b) Zeigen Sie, dass f kein lokales Minimum in $(0,0)$ hat.

7.5 *(Herbst 2014, Thema 3, Aufgabe 4)*

Bestimmen Sie das absolute Minimum und Maximum von

$$f(x,y) = 2\,x\,y - x + y$$

auf $D = [-2,2] \times [-2,2]$.

7.6 *(Frühjahr 2014, Thema 1, Aufgabe 4)*

a) Die Funktion $f_c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f_c(x,y) = x^2 + y^2 + c\,x\,y.$$

Zeigen Sie, dass f_c für $|c| \leq 2$ ein absolutes Minimum im Punkt $(0,0)$ hat.

b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x,y) = x^2 + y^2 + e^{xy}.$$

Für festes $(x,y) \neq (0,0)$ sei $h : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(t) = g(tx,ty).$$

Zeigen Sie $h'(t) \geq 0$ für alle $t > 0$ und folgern Sie, dass g ein absolutes Minimum in $(0,0)$ hat.

7.7 *(Frühjahr 2014, Thema 2, Aufgabe 5)*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - x\,y - x.$$

a) Man bestimme alle lokalen Extremstellen und Sattelpunkte der Funktion f.

b) Man bestimme alle globalen Extremstellen der Funktion f auf dem Rechteck

$$R = [-1,1] \times [-1,2].$$

7.8 *(Frühjahr 2014, Thema 3, Aufgabe 4)*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \left(x^2 + 1\right)(\sin(\pi y) + 2).$$

a) Zeigen Sie, dass f unendlich viele isolierte lokale Minima besitzt.

b) Untersuchen Sie, ob f lokale Maxima besitzt.

c) Bestimmen Sie $f(\mathbb{R}^2)$.

7.9 *(Herbst 2013, Thema 1, Aufgabe 4)*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = (x+y)\,e^{x\,y}.$$

a) Zeigen Sie, dass f keine kritischen Punkte besitzt.

b) Bestimmen Sie die globalen Extremstellen von f auf dem Kreis

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\right\}.$$

7.10 *(Herbst 2013, Thema 2, Aufgabe 4)*

Sei

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$$

und $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right) \exp(-x - y).$$

a) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f für x, $y > 0$.

b) Bestimmen Sie das globale Maximum von f.

7.11 *(Frühjahr 2013, Thema 1, Aufgabe 3)*

a) Weisen Sie nach, dass $(0, 0)$ der einzige kritische Punkt von

$$f(x, y) = e^{xy} + x^2 + y^2,$$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ist.

b) Liegt in $(0, 0)$ ein lokales Extremum vor?

7.12 *(Frühjahr 2013, Thema 2, Aufgabe 5)*

Sei

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \leq x \leq 2\pi \;\text{ und }\; \cos(x) \leq y \leq \sin(x)\right\}.$$

Skizzieren Sie diese Menge und zeigen Sie, dass der Punkt

$$\left(\tfrac{3}{4}\pi, 0\right)$$

eine globale Minimalstelle der Funktion

$$f(x, y) = (y - \sin(x))\,(y - \cos(x))$$

auf D ist.

7.13 *(Frühjahr 2013, Thema 3, Aufgabe 2)*

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \ln\left(x^2 + (y - 1)^2 + 1\right).$$

a) Bestimmen Sie für $c = 0$, $c = 1$ und $c = \ln(4)$ die Menge der Punkte im $\mathbb{R}^2$, in denen f den Wert c annimmt und skizzieren Sie diese Mengen.

b) Bestimmen Sie alle Extrema von f und geben Sie dabei jeweils an, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt und ob dieses global ist.

7.14 *(Herbst 2012, Thema 2, Aufgabe 4)*

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = 2\,x^2 + 2\,y^2 - 4\,x\,y - x^4 - y^4.$$

Untersuchen Sie f auf lokale Extrema.

7.15 *(Herbst 2012, Thema 3, Aufgabe 4)*

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3\,x\,y.$$

7.16 *(Frühjahr 2012, Thema 1, Aufgabe 3)*

a) Diskutieren Sie die Funktion

$$f(r) = e^{-r^2} + r^2$$

hinsichtlich globaler Extrema.

b) Bestimmen Sie den kritischen Punkt der Funktion

$$g(x, y) = e^{-x^2-y^2} + x^2 + y^2$$

und die Hesse-Matrix im kritischen Punkt.

c) Besitzt g ein absolutes Extremum, und welcher Art ist es?

7.17 *(Frühjahr 2012, Thema 2, Aufgabe 1)*

Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei f definiert durch

$$f(x, y) = x\,y\,\exp(x - y).$$

a) Zeigen Sie

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (y\,(1 + x)\,\exp(x - y),\; x\,(1 - y)\,\exp(x - y))$$

und bestimmen Sie die Punkte (x, y), die

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (0, 0)$$

erfüllen.

b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix von f und entscheiden Sie mit deren Hilfe, ob f lokale Extremstellen besitzt, und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Typ.

7.18 *(Frühjahr 2012, Thema 3, Aufgabe 3)*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x, y) = x^2 \left(x^2 + y^2 - 2\right).$$

a) Man bestimme die Nullstellen von f und skizziere die Bereiche des $\mathbb{R}^2$, in denen f positive bzw. negative Funktionswerte besitzt.

b) Man bestimme alle lokalen Extremstellen von f.

7.19 *(Herbst 2011, Thema 2, Aufgabe 5)*

Es sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0$ und $x^2 + y^2 = 3\}$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x, y) = \exp(x + y)$.

a) Skizzieren Sie die Menge D.

b) Begründen Sie, warum die Funktion f ihr Maximum und ihr Minimum annimmt.

c) Bestimmen Sie die Werte des Maximums und Minimums der Funktion f.

7.20 *(Frühjahr 2011, Thema 1, Aufgabe 2)*

Bestimmen Sie die Maxima und Minima der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)} \cdot \left(-x^2 + 1\right)$$

auf der Kreisscheibe $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

7.21 *(Frühjahr 2011, Thema 3, Aufgabe 2)*

Zeigen Sie, dass (e, e) ein kritischer Punkt der Funktion

$$f(x, y) = x^y - y^x$$

ist, und bestimmen Sie, ob in (e, e) ein lokales Minimum oder Maximum, ein Sattelpunkt, oder ein Punkt, in dem mit der Hessematrix keine Aussage möglich ist, vorliegt.

7.22 *(Herbst 2010, Thema 1, Aufgabe 3)*

Bestimmen Sie Infimum und Supremum der Menge

$$\left\{e^{-(x+y)} \left(x^2 + y^2 + xy - 3\right) \mid x,\ y \geq 0\right\}.$$

7.23 *(Frühjahr 2010, Thema 1, Aufgabe 3)*

Es sei $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ und $f : M \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x, y) = x^2 - x + 2\,y^2.$$

Bestimmen Sie Maximum und Minimum von f.

7.24 *(Herbst 2009, Thema 1, Aufgabe 2)*

Man bestimme Infimum und Supremum der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \left(4\,y^2 - x^2\right) e^{-x^2-y^2}$$

auf der Menge $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$.

7.25 *(Herbst 2009, Thema 2, Aufgabe 3)*

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x, y) = x^3 + 4y^3 - 3x - 3y$. Berechnen Sie das Maximum und das Minimum von f auf dem Quadrat $[-1, +1] \times [-1, +1]$. An welchen Stellen wird der Extremwert jeweils angenommen?

7.26 *(Herbst 2009, Thema 3, Aufgabe 3)*

Gegeben seien

$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 < y < \frac{\pi}{2}\right\}$$

und die Funktion

$$h : D \to \mathbb{R}; \qquad h(x,y) := 2x \tan y - \left(\frac{x}{\cos y}\right)^2 .$$

a) Bestimmen Sie $N := \{(x,y) \in D : h(x,y) = 0\}$ und skizzieren Sie diese Menge in der xy–Ebene.

b) Bestimmen Sie den Wertebereich $h(D) = \{h(x,y) : (x,y) \in D\}$.

7.27 *(Frühjahr 2009, Thema 3, Aufgabe 4)*

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = 2\,x^2 + y^2 - x\,y^2.$$

a) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen und alle lokalen Extrema der Funktion f.

b) Besitzt die Funktion f ein globales Maximum oder ein globales Minimum? Begründen Sie Ihre Antwort.

7.28 *(Herbst 2008, Thema 1, Aufgabe 4)*

Man bestimme Infimum und Supremum der Funktion

$$f(x,y) = e^{-(x+y)}\,(xy + x + y + 1)$$

auf der Menge $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,\ y \geq 0\}$.

7.29 *(Herbst 2008, Thema 2, Aufgabe 4)*

Gegeben sei die Funktion

$$f : \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0,\ y \neq 0\right\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + 16x - 4y.$$

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f.

7.30 *(Frühjahr 2008, Thema 1, Aufgabe 5)*

Bestimmen Sie für die Funktion

$$h : \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\right\} \to \mathbb{R}; \quad h(x,y) := 4xy - x^3y - xy^3$$

Maximum und Minimum.

7.31 *(Frühjahr 2008, Thema 3, Aufgabe 4)*

Gegeben sei

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi \leq x \leq \pi \text{ und } 0 \leq y \leq \pi\right\}.$$

Man begründe, warum die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \cos x + \sin y,$$

globale Extremstellen besitzt, und bestimme zwei Punkte (a,b) und $(c,d) \in D$ mit

$$f(a,b) \leq f(x,y) \leq f(c,d)$$

für alle $(x,y) \in D$.

7.32 *(Herbst 2007, Thema 1, Aufgabe 3)*

Gegeben sei für $c \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^2 - 2\,x\,y + 4\,y^2 - 12\,y + c.$$

a) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f_c.

b) Bestimmen Sie für jedes $c \in \mathbb{R}$ den Wertebereich W_c von f_c.

7.33 *(Herbst 2007, Thema 2, Aufgabe 4)*

Für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 6\,x^2\,y - 5\,x^2 + 2\,x - 2\,y^3,$$

bestimme man Lage und Art ihrer kritschen Punkte sowie ihren Wertebereich.

7.34 *(Frühjahr 2007, Thema 1, Aufgabe 4)*

Man bestimme Infimum und Supremum der Funktion

$$f(x,y) = x\,y\,(x + y - 1)$$

auf der Menge $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,\ y \geq 0,\ x + y - 1 \leq 0\}$.

7.35 *(Frühjahr 2007, Thema 2, Aufgabe 4)*

Sei $R := [-1,1] \times [0, 2\pi]$ und $f : R \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x + e^x\, \cos y$.

Bestimmen Sie alle globalen Maximal- und Minimalstellen von f.

7.36 *(Frühjahr 2007, Thema 3, Aufgabe 4)*

An welchen Stellen nimmt die Funktion

$$f : D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^2 - 2y^2 + 1$$

ihren maximalen Wert an?

7.37 *(Frühjahr 2006, Thema 1, Aufgabe 4)*

Sei $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ die Einheitskreisscheibe und $f : E \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^3 - 3\,x\,y^2$.

a) Begründen Sie, warum f mindestens eine globale Minimalstelle und eine globale Maximalstelle besitzt.

b) Bestimmen Sie alle globalen Minimal– und Maximalstellen von f.

7.38 *(Frühjahr 2006, Thema 2, Aufgabe 4)*

Man bestimme Infimum und Supremum der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x + y$$

auf der Menge $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

7.39 *(Frühjahr 2006, Thema 3, Aufgabe 1)*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2\,x^2 - 2\,y^2 + 4\,x\,y \qquad \text{für jedes } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Bestimmen Sie alle Stellen, an denen f ein lokales Extremum hat.

b) Warum gibt es $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ mit $a^2 + b^2 = 1$, so dass

$$f(x, y) \leq f(a, b) \qquad \text{für jedes } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } x^2 + y^2 \leq 1$$

gilt?

7.40 *(Herbst 2005, Thema 1, Aufgabe 2)*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}\left(x^2 - 2\,y^2\right).$$

a) Man bestimme $\inf f(\mathbb{R}^2)$ und $\sup f(\mathbb{R}^2)$.

b) Man untersuche f auf lokale Extrema.

7.41 *(Frühjahr 2005, Thema 1, Aufgabe 3)*

Gegeben sei die Funktion

$$f : \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0,\ y \neq 0\right\} \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\,x^3 - \frac{1}{y^2} - \frac{1}{16}\,y^2.$$

a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f.

b) Ist f nach oben beschränkt?

7.42 *(Frühjahr 2005, Thema 2, Aufgabe 5)*

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f :]-1, 1[\times \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto e^x \cos(y) + e^{-x} \sin(y)$$

sämtliche kritischen Punkte, und stellen Sie fest, bei welchen von diesen es sich um lokale Extremstellen handelt.