LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Differential– und Integralrechnung 6

6.1 *(Frühjahr 2009, Thema 1, Aufgabe 3)*

Sei $r > 0$. Berechnen Sie die Punkte auf der Parabel $y = x^2$ mit dem kürzesten Abstand zu dem Punkt $(0, r)$ auf der y–Achse. Für welche $r > 0$ ist $(0, 0)$ der Punkt mit dem kürzesten Abstand?

6.2 *(Herbst 2011, Thema 3, Aufgabe 4)*

Zugrunde gelegt sei hier ein kartesisches (x, y)–Koordinatensystem. Bestimmen Sie für $c > 0$ die Punkte der Parabel $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = 2\,x\}$, die vom Punkt $(c, 0)$ den kleinsten Abstand haben.

6.3 *(Frühjahr 2006, Thema 3, Aufgabe 6)*

Beweisen Sie, dass $(0, 0)$ ein Randpunkt der Teilmenge

$$\left\{ \left(x,\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) \mid x \in \mathbb{R},\ x > 0 \right\}$$

des $\mathbb{R}^2$ ist.

6.4 *(Frühjahr 2012, Thema 3, Aufgabe 4)*

Gegeben sei die Kurve $\gamma : [1, 2] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \left(t^3 - 3\,t + 2,\ 12 - 3\,t^2 \right)$$

mit der Bildmenge

$$K = \{\gamma(t) : t \in [1, 2]\}\,.$$

a) Man berechne

$$\gamma(1), \quad \gamma(2), \quad \gamma'(1), \quad \gamma'(2),$$

und skizziere die Bildmenge K.

b) Man bestimme die Bogenlänge von K.

6.5 *(Frühjahr 2001, Thema 2, Aufgabe 4)*

Sei Γ die durch die Parametrisierung

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = \left(3\,t^2 - 1, 3\,t^3 - t \right) \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \le t \le \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

gegebene geschlossene Kurve in der (x, y)–Ebene. Berechnen Sie die Bogenlänge von Γ.

6.6 *(Herbst 2006, Thema 3, Aufgabe 5)*

Gegeben sei die Kurve $C : [0, \infty[\to \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$C(t) = (x(t), y(t)), \qquad x(t) = \frac{t^6}{6}, \quad y(t) = 2 - \frac{t^4}{4}.$$

Berechnen Sie die Bogenlänge von C zwischen den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen.

6.7 *(Herbst 2014, Thema 3, Teilaufgabe 2b)*

Gegeben sei die Kurve $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$f(x) = (\exp(-t)\cos(t), \exp(-t)\sin(t)).$$

Berechnen Sie die Länge der Kurve.

6.8 *(Frühjahr 2006, Thema 1, Aufgabe 6)*

a) Beweisen Sie, dass die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

eine Stammfunktion der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{1+x^2}$$

ist.

b) Bestimmen Sie die Länge der Kurve

$$\gamma : [0, 6\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto t \cdot (\cos t, \sin t).$$

c) Skizzieren Sie die Bildmenge $\gamma\left([0, 6\pi]\right)$.

6.9 *(Frühjahr 2009, Thema 2, Aufgabe 4)*

Gegeben sei die Kurve

$$\varphi : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = \left(\cos^3 t,\ \sin^3 t\right),$$

sowie ihre Bildmenge

$$K = \{\varphi(t) \mid t \in [0; 2\pi]\}.$$

a) Für welche $t \in [0; 2\pi]$ weist der Punkt $\varphi(t) \in K$ den kleinsten bzw. größten Abstand vom Ursprung $(0, 0)$ auf?

b) Man skizziere die Bildmenge K.

c) Man begründe, warum die Kurve φ rektifizierbar ist, und bestimme ihre Bogenlänge.

6.10 *(Frühjahr 2013, Thema 3, Aufgabe 3)*

Für a, $b \in \mathbb{R}$, a, $b > 0$ sei die Kurve $c : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ durch

$$c(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ a\sin(t) \\ bt \end{pmatrix}$$

gegeben und deren Bildmenge $B = \{c(t) \ : \ t \in [0,1]\}$.

a) Berechnen Sie die Bogenlänge von B in Abhängigkeit von a und b.

b) Zeigen Sie, dass der Winkel zwischen dem Tangentialvektor an die Kurve und dem Vektor

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

konstant ist.

6.11 *(Frühjahr 1999, Thema 3, Aufgabe 3)*

Gegeben sei die Kurve $K : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, definiert durch $K(t) := (x(t), y(t))$ mit $x(t) = t - \sin t$ und $y(t) = 1 - \cos t$.

a) Berechnen Sie die Bogenlänge dieser Kurve. (Hinweis: $1 - \cos t = 2\left(\sin \frac{t}{2}\right)^2$.)

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Kurve und der x–Achse eingeschlossen wird.

6.12 *(Herbst 2004, Thema 2, Aufgabe 4)*

Sei $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe und $f : B \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(1, 0) = 1$ und $f(-1, 0) = -1$. Begründen Sie, weshalb f auf dem Rand von B mindestens 2 voneinander verschiedene Nullstellen besitzt.

6.13 *(Frühjahr 2014, Thema 2, Aufgabe 4)*

Man zeige, dass eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf der Einheitskreislinie

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$$

weder surjektiv noch injektiv sein kann.

6.14 *(Frühjahr 2011, Thema 2, Aufgabe 3)*

Seien a, $b \geq 0$.

a) Man zeige, dass für $a + b > 2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^a\,|y|^b}{x^2 + y^2} = 0.$$

b) Man zeige, dass für $a + b \leq 2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^a\,|y|^b}{x^2 + y^2}$$

nicht existiert.

6.15 *(Frühjahr 2010, Thema 2, Aufgabe 4)*

Es sei $Q := [0,1] \times [1,2]$ und $f : Q \to \mathbb{R}$ definiert als

$$f(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0, \\ x^y, & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie: f ist stetig in Q, insbesondere in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in Q$ mit $x_0 = 0$.

b) Berechnen Sie
$$\int_0^1 f(x,y)\,dx \qquad \text{für jedes} \quad y \in [1,2]\,.$$

c) Berechnen Sie
$$\int_1^2 f(x,y)\,dy \qquad \text{für jedes} \quad x \in [0,1]\,.$$

6.16 *(Herbst 2011, Thema 1, Aufgabe 4)*

Die Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf dem Intervall I stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass die auf $I \times I$ definierte Funktion

$$(x,y) \mapsto g(x,y) := \left\{ \begin{array}{ll} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{für } x \neq y \\ f'(x) & \text{für } x = y \end{array} \right\}$$

auch in jedem Punkt $(x_0, x_0) \in I \times I$ stetig ist.

[Hinweis: Man beachte den Mittelwertsatz!]

6.17 *(Herbst 1995, Thema 1, Aufgabe 5)*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(0,0) = 0$ und $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x,y) \neq (0,0)$. Zeigen Sie:

a) Für jedes $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit $(a,b) \neq (0,0)$ ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(ta, tb)$ differenzierbar an der Stelle 0.

b) f ist nicht stetig an der Stelle $(0,0)$.

6.18 *(Herbst 2003, Thema 2, Aufgabe 5)*

Bestimmen Sie alle Stellen, an denen die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto |x-y| \cdot y$$

nicht partiell differenzierbar ist.

6.19 *(Frühjahr 2006, Thema 3, Aufgabe 4)*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(0,0) = 0$ und

$$f(x,y) = \sin(x) \cdot \arctan\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)$$

für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x,y) \neq (0,0)$. Zeigen Sie, dass die partielle Ableitung von f nach der 1. Variablen im Punkt $(0,0)$ existiert, und bestimmen Sie diese.

6.20 *(Frühjahr 2005, Thema 1, Aufgabe 5)*

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x\,y}{|x|+|y|}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig in $(0,0)$ ist.

b) Zeigen Sie, dass f partiell differenzierbar ist und bestimmen Sie $\operatorname{grad} f(x,y)$ in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

c) Untersuchen Sie, ob f stetig partiell differenzierbar in $(0,0)$ ist.

6.21 *(Herbst 2010, Thema 1, Aufgabe 2)*

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x\,y}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Untersuchen Sie f auf Stetigkeit und partielle Differenzierbarkeit im Punkt $(0,0)$.

6.22 *(Frühjahr 2015, Thema 3, Aufgabe 4)*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{y+1}{x}\right), & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

a) Man zeige, dass f partiell differenzierbar ist und bestimme die partiellen Ableitungen $\partial_x f(x,y)$ und $\partial_y f(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Man überprüfe die partiellen Ableitungen auf Stetigkeit im Punkt $(0,0)$.

6.23 *(Frühjahr 2015, Thema 2, Aufgabe 4)*

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion f im Punkt $(0,0)$ zweimal partiell differenzierbar ist.

b) Berechnen Sie die Hesse–Matrix von f im Punkt $(0,0)$.

c) Entscheiden Sie mit Hilfe von b), ob f zweimal stetig partiell differenzierbar ist.

6.24 *(Herbst 2015, Thema 3, Aufgabe 4)*

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, welche beide auf $]a,b[$ stetig differenzierbar sind. Ferner gelte $g(a) = g(b)$ und $h(a) = h(b)$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f :]a,b[\times]a,b[\to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = g(x) \cdot h(y),$$

mindestens eine kritische Stelle besitzt.