Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Differential– und Integralrechnung 5

5.1 *(Frühjahr 2002, Thema 3, Aufgabe 6)*

Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n.$$

5.2 *(Herbst 2015, Thema 2, Aufgabe 1)*

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n,$$ b) $$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^4+3n^2+n} x^n.$$

5.3 *(Herbst 2009, Thema 1, Aufgabe 1)*

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_1 = 4, \qquad a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}, \quad n \geq 1.$$

a) Man zeige, daß (a_n) konvergiert und bestimme den Grenzwert von (a_n).

b) Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^n}{\sqrt{n}} x^n.$$

c) Man bestimme, ob die Potenzreihe in $x = \frac{1}{3}$ konvergiert.

5.4 *(Frühjahr 2012, Thema 2, Aufgabe 3)*

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius r der Potenzreihe

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{3^n}\,(5n^2+1)} x^n$$

b) Beurteilen Sie, ob $R(x)$ an den Stellen $x = r$ und $x = -r$ konvergiert oder divergiert.

5.5 *(Herbst 2006, Thema 3, Aufgabe 2)*

Es sei q eine positive reelle Zahl.

a) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{\sqrt{n}}$ auf Konvergenz.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{q}\, x^n$?

5.6 *(Herbst 2012, Thema 1, Aufgabe 1)*

Sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r, wobei $1 < r < \infty$ sei.

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}.$$

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

wobei $c_n = a_n^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei.

5.7 *(Frühjahr 2010, Thema 1, Aufgabe 1)*

Es sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

konvergiert, in folgenden Fällen:

a) Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergiert gegen ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$,

b) Die Folge $(n^2 a_n)_{n\geq 0}$ konvergiert gegen ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$,

c) $(a_n)_{n\geq 0}$ ist eine monoton fallende Nullfolge, und für alle $n \geq 1$ ist $a_n \geq \frac{1}{n}$.

5.8 *(Frühjahr 2010, Thema 3, Aufgabe 1)*

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ höchstens 1 ist.

5.9 *(Herbst 2014, Thema 2, Aufgabe 1)*

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe, deren Koeffizienten durch die Rekursion

$$a_n = a_{n-1}^k \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

und $a_0 > 0$ für ein $k \geq 0$ definiert sind.

a) Berechnen Sie den Wert der Potenzreihe an der Stelle $x = \frac{1}{2}$
   i) für $k = 0$ und $a_0 = 2$,
   ii) für $k = 1$ und $a_0 = 2$.

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe in Abhängigkeit von k und a_0.

5.10 *(Frühjahr 2013, Thema 3, Aufgabe 1)*

Wir betrachten die durch eine Potenzreihe gegebene Funktion

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\cos(\alpha + n\pi))^n \, x^n.$$

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Bestimmen Sie für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ den Wert $f_\alpha(1)$.

5.11 *(Frühjahr 2009, Thema 3, Aufgabe 3)*

Gegeben sei die Potenzreihe $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$.

a) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Potenzreihe.

b) Bestimmen Sie die rationale Funktion, die durch die Potenzreihe auf ihrem Konvergenzbereich dargestellt wird.

5.12 *(Herbst 2011, Thema 1, Aufgabe 3)*

Gegeben sei die Funktion

$$x \mapsto f(x) := \frac{x}{(1+x)(1-2x)}.$$

a) Geben Sie eine Potenzreihendarstellung $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ an.

   [Hinweis: Partialbruchzerlegung!]

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe aus a) und das Verhalten auf dem Rande des Konvergenzintervalls.

c) Zeigen Sie, dass die Koeffizienten a_k der Reihe aus a) die Rekursionsgleichung

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{k+2} = a_{k+1} + 2\,a_k \;\; \text{für alle} \;\; k \in \mathbb{N}$$

   erfüllen.

5.13 *(Frühjahr 2012, Thema 1, Aufgabe 4)*

a) Zeigen Sie für $a \neq 0$

$$\frac{1}{a-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{a^{k+1}}.$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe?

b) Geben Sie mit Hilfe der Partialbruchzerlegung die Taylorreihe von

$$g(x) = \frac{1}{(1+x)(2+x)}$$

bei der Entwicklung um 0 sowie ihren Konvergenzradius an.

5.14 *(Herbst 2007, Thema 2, Aufgabe 2)*

a) Man bestimme den Konvergenzradius ϱ der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n;$$

es sei $f :]-\varrho; \varrho[\to \mathbb{R}$ die durch diese Potenzreihe definierte Funktion.

b) Man stelle die Stammfunktion F von f mit $F(0) = 0$ zunächst als Potenzreihe und dann als elementare Funktion dar.

c) Man bestimme hieraus eine Darstellung von f als elementare Funktion.

5.15 *(Frühjahr 2008, Thema 2, Aufgabe 2)*

a) Bestimmen Sie das Konvergenzintervall der Potenzreihe

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(x-1)^n.$$

b) Geben Sie eine Potenzreihe an, die im Inneren des Konvergenzintervalls aus a) gegen

$$F(x) := \int_1^x f(t)\,dt$$

konvergiert.

c) Stellen Sie F und f als elementare Funktionen dar.

5.16 *(Herbst 2006, Thema 1, Teilaufgabe 1b)*

Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x, für die die Reihe

$$S(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k}$$

konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert $S(x)$ in Abhängigkeit von x.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst $S'(x)$.

5.17 *(Herbst 2001, Thema 1, Aufgabe 3)*

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^n,$$

und stellen Sie diese als rationale Funktion dar.

5.18 *(Frühjahr 2013, Thema 1, Teilaufgabe 1b)*

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Reihe? Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}.$$

5.19 *(Frühjahr 2005, Thema 2, Aufgabe 2)*

a) Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$S_0(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}}$$

konvergent ist.

b) Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $S_1(x)$, die sich durch gliedweises Differenzieren der Summanden von $S_0(x)$ ergibt, konvergent ist.

c) Für welche x aus dem Konvergenzbereich $I_0 \subseteq \mathbb{R}$ von S_0 ist die auf I_0 definierte Funktion $f : I_0 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto S_0(x)$ differenzierbar mit $f'(x) = S_1(x)$?

5.20 *(Frühjahr 2001, Thema 2, Aufgabe 2)*

Entwickeln Sie sowohl die Funktion

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^x,$$

als auch

$$f :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x},$$

an der Stelle 2 in eine Taylorreihe und geben Sie die Konvergenzintervalle dieser Reihen an.

5.21 *(Frühjahr 2005, Thema 1, Aufgabe 2)*

Gegeben sei die Funktion

$$f :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) := \ln x.$$

a) Bestimmen Sie die Taylor–Reihe von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 2$.

b) Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ diese Reihe konvergiert.

5.22 *(Frühjahr 2007, Thema 3, Aufgabe 3)*

Stellen Sie die Funktion

$$F :]-1,1[\to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}, \quad x > -1$$

als Potenzreihe $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Entwicklungspunkt 0 dar.

5.23 *(Frühjahr 2013, Thema 1, Aufgabe 5)*

a) Geben Sie die Taylorreihe von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \exp\left(x^2\right),$$

im Entwicklungspunkt 0 an.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil a)

$$f^{(n)}(0)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

5.24 *(Frühjahr 2014, Thema 2, Aufgabe 2)*

a) Man zeige, dass die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{(3n)!}\, x^{3n} \tag{$*$}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

b) Man zeige, dass die Grenzfunktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Potenzreihe $(*)$ das Anfangswertproblem

$$y'''(x) = 8\,y(x), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0$$

löst.

5.25 *(Herbst 2009, Thema 1, Aufgabe 3)*

a) Man stelle die Funktion

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

als Potenzreihe dar. Die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion darf dabei verwendet werden.

b) Man bestimme das Taylorpolynom $T_n(x)$ von kleinstem Grad $n \in \mathbb{N}$, für das $|T_n(1) - F(1)| < \frac{1}{40}$ gilt.

5.26 *(Herbst 2009, Thema 2, Aufgabe 2)*

a) Geben Sie für die Funktionen

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) := e^{-x^2} \in \mathbb{R} \qquad \text{und} \quad x \in \mathbb{R} \mapsto F(x) := \int_0^x e^{-t^2}\, dt \in \mathbb{R}$$

Potenzreihendarstellungen (mit Entwicklungspunkt 0) an und begründen Sie deren Existenz.

b) Zeigen Sie, dass das Integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\, dx$ durch eine alternierende Reihe darstellbar ist, und berechnen Sie den Wert des Integrals bis auf einen Fehler kleiner als $\frac{1}{10}$.

5.27 *(Frühjahr 1999, Thema 2, Aufgabe 3)*

a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^{2n}$ konvergiert.

b) Stellen Sie die Funktion F, definiert durch

$$F(x) := \int_0^x \ln(t^2+1)\, dt, \qquad 0 \le x < 1,$$

als Potenzreihe dar. Hinweis: Es darf die Reihenentwicklung des natürlichen Logarithmus verwendet werden.

5.28 *(Frühjahr 1998, Thema 3, Aufgabe 1)*

Gegeben sei die Potenzreihe

$$\frac{x^2}{2\cdot 1} - \frac{x^3}{3\cdot 2} + \frac{x^4}{4\cdot 3} - \frac{x^5}{5\cdot 4} + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{n(n-1)}.$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe?

b) Zeigen Sie: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{n(n-1)} = -x + (1+x)\, \ln(1+x)$ für $|x| < 1$.

(Hinweis: Differenzieren Sie!)