LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Differential– und Integralrechnung 4

4.1 *(Frühjahr 2006, Thema 3, Aufgabe 2)*

Zeigen Sie, dass für alle a, $b \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a < b \leq \pi$ gilt:

$$(b-a)\cos(b) < \sin(b) - \sin(a) < (b-a)\cos(a).$$

4.2 *(Herbst 1999, Thema 1, Aufgabe 2)*

Man zeige: $\left|\sin^3(x) + \cos(x) - \sin^3(y) - \cos(y)\right| \leq 4\,|x-y| \quad \forall x,\, y \in \mathbb{R}.$

4.3 *(Frühjahr 2002, Thema 1, Aufgabe 3)*

Für alle x, $y \in [-1, 1]$ zeige man

$$\left|\sin\left(\frac{1}{2}\left(x^3 + x\right)\right) - \sin\left(\frac{1}{2}\left(y^3 + y\right)\right)\right| \geq \frac{1}{2}\cos(1)\,|x-y|\,.$$

4.4 *(Herbst 2001, Thema 3, Aufgabe 3)*

Die Funktion $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = 2\,e^x - x, \qquad x \in]0, \infty[\,.$$

Zeigen Sie:

a) $f\left(]0, \infty[\right) =]2, \infty[$.

b) f besitzt eine differenzierbare Umkehrfunktion f^{-1}.

c) Für alle x, $y \in]2, \infty[$, $x \neq y$, gilt:

$$\left|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\right| < |x-y|.$$

4.5 *(Herbst 2008, Thema 3, Aufgabe 2)*

Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n},$$

und schließen Sie hieraus, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \ln(n+1), \qquad \ln(n) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - 1.$$

4.6 *(Frühjahr 2003, Thema 3, Aufgabe 3)*

a) Zeigen Sie, dass für alle x, $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ die Ungleichung

$$|\tan x - \tan y| \geq |x - y|$$

erfüllt ist.

b) Beweisen Sie für alle $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ die Ungleichung

$$\tan x > x.$$

c) Gibt es zwei verschiedene x, $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, so dass

$$|\tan x - \tan y| = |x - y|$$

gilt? (Begründung!)

4.7 *(Herbst 2005, Thema 1, Aufgabe 5)*

Man bestimme das 2–te Taylorpolynom $T_2(x)$ von $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ im Entwicklungspunkt $a = 0$ und zeige hiermit

$$\left|\cos\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - T_2(1)\right| \leq \frac{1}{6}.$$

4.8 *(Herbst 2002, Thema 1, Aufgabe 4)*

a) Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom T_2 der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x \sin x$$

zum Entwicklungspunkt 0.

b) Beweisen Sie mit Hilfe der Taylorformel (mit Lagrange'schem Restglied) die Abschätzung

$$|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{1}{6}\,(3 + |x|)\,|x|^3$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

4.9 *(Herbst 2007, Thema 2, Aufgabe 3)*

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (2 - x) \cdot \sin x.$$

Man bestimme das dritte Taylorpolynom T_3 von f im Entwicklungspunkt $a = 0$ und zeige für alle $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$|f(x) - T_3(x)| \leq \frac{6 + |x|}{24} \cdot |x|^4.$$

4.10 *(Frühjahr 2014, Thema 2, Aufgabe 3)*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = (\pi - x)\,\cos(x).$$

a) Man bestimme die ersten drei Ableitungen f', f'' und f''' von f.

b) Man bestimme das Taylorpolynom T_2 von f im Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{2}$.

c) Man zeige für alle $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ die Abschätzung

$$|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{\pi^3}{64}.$$

4.11 *(Frühjahr 2008, Thema 1, Aufgabe 2)*

Gegeben ist die reelle Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^x \sin x.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Taylorformel ein Polynom $p \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} p \leq 4$, so dass gilt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - p(x)}{x^4} = 0.$$

Begründen Sie ferner, dass für alle $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ gilt: $|f(x) - p(x)| \leq \frac{\sqrt{e}}{480}$.

4.12 *(Herbst 2013, Thema 3, Aufgabe 4)*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \exp(x)\sin(x).$$

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom T_2 vom Grad 2 von f im Entwicklungspunkt 0.

b) Zeigen Sie

$$|T_2(x) - f(x)| < 10^{-3}$$

für alle $x \in \left[-\frac{1}{10}, 0\right]$.

4.13 *(Frühjahr 2010, Thema 1, Aufgabe 2)*

Es sei $f : [-1, \infty[\to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}$.

a) Bestimmen Sie mittels der Taylorformel das Polynom 2. Grades $p_2(x)$, für das gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}\left(f(x) - p_2(x)\right) = 0.$$

b) Beweisen Sie für alle $x \in [0, \infty[$ die Abschätzung

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{16}\,x^3.$$

4.14 *(Herbst 2011, Thema 2, Aufgabe 4)*

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom T_2 der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \sin(x^2)$, im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Beweisen Sie, dass $|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{1}{6}$ für alle $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

4.15 *(Herbst 2008, Thema 2, Aufgabe 2)*

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \cos^2 x.$$

a) Zeigen Sie für alle $n \geq 1$:

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n 2^{2n-1} \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right).$$

b) Bestimmen Sie für f das Taylor–Polynom T_{2N} vom Grad $2N$ $(N \geq 1)$ an der Stelle $x_0 = 0$.

c) Bestimmen Sie ein $N \geq 1$ so, dass

$$\left|f\left(\tfrac{1}{2}\right) - T_{2N}\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| \leq 2 \cdot 10^{-4}$$

gilt.

4.16 *(Herbst 2012, Thema 2, Aufgabe 3)*

Die Funktion $f : \left]-1, \infty\right[\to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

a) Finden Sie für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ eine Formel für die n–te Ableitung von f und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

b) Bestimmen Sie zu f das Taylorpolynom 2. Grades mit Entwicklungspunkt $x_0 = 2$, bezeichnet mit $T_2(x; 2)$.

c) Beweisen Sie

$$|f(x) - T_2(x; 2)| \leq \frac{1}{16}$$

für alle $x \in [1, 3]$.

4.17 *(Herbst 2013, Thema 2, Aufgabe 3)*

a) Beweisen Sie die Ungleichung

$$\sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}$$

für alle $x \in [0, \pi]$.

b) Beweisen Sie diese Ungleichung für $x > \pi$.

4.18 *(Frühjahr 2015, Thema 1, Aufgabe 2)*

Zeigen Sie, etwa unter Verwendung der Exponentialreihe,

$$e^{-x^2} - 0{,}00015 \leq 1 - x^2 \leq e^{-x^2}$$

für alle $|x| \leq 0{,}1$.

4.19 *(Herbst 2010, Thema 3, Aufgabe 2)*

Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x\, e^x - e^{-x}.$$

a) Man zeige, dass f für $x > -1$ eine differenzierbare Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ besitzt.

b) Man berechne das Taylorpolynom ersten Grades T_1 von g um den Entwicklungspunkt -1.

4.20 *(Herbst 2012, Thema 1, Aufgabe 4)*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$f(0) = -3$$

und

$$1 < f'(x) < 2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f im Intervall $]1, 3]$ eine Nullstelle besitzt.

4.21 *(Frühjahr 2012, Thema 1, Aufgabe 2)*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gelte für die Ableitung

$$|f'(\xi)| \leq \frac{1}{2}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}$. Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei definiert durch ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ und $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$.

a) Zeigen Sie per Induktion

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2^n}\, |x_1 - x_0|$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

b) Zeigen Sie

$$|x_n - x_0| \leq 2\, |x_1 - x_0|$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

4.22 *(Frühjahr 2011, Thema 1, Aufgabe 3)*

Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $f(0) = 0$, $f(2) = 0$ und $f(x) > 0$ für alle $x \in (0, 2)$. Man betrachte die Funktion

$$g : (0,2) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) := \frac{1}{f(x)}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$h : (0,2) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}, & \text{für } x \neq 1, \\ g'(1), & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

stetig ist.

b) Zeigen Sie, dass die Ableitung g' jeden Wert $q \in \mathbb{R}$ annimmt, d.h. dass es zu jedem $q \in \mathbb{R}$ ein $x_0 \in (0, 2)$ gibt, so dass $g'(x_0) = q$ gilt.

4.23 *(Frühjahr 2010, Thema 3, Aufgabe 3)*

Es seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $b > a$, und es sei f eine in $I := [a; b]$ differenzierbare und w eine in I stetige Funktion. Es sei $f(a) = 0$ und $0 \leq f'(x) \leq w(x)$ für alle $x \in I$.

a) Begründen Sie kurz, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$H(x) := 2 \cdot \int_a^x w(t) f(t)\, dt - f^2(x)$$

auf I monoton steigt.

4.24 *(Frühjahr 2002, Thema 2, Aufgabe 6)*

Es seien f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, die differenzierbar auf $]a, b[$ seien, mit $f' = g$ und $g' = f$ auf $]a, b[$. Weiter sei $f(a) = 1$ und $g(a) = 0$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in\,]a, b[$

$$(f(x))^2 - (g(x))^2 = 1$$

gilt.

4.25 *(Herbst 2004, Thema 1, Aufgabe 4)*

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche in $]a, b[$ differenzierbar sei. Weiter sei die Ableitung von f streng monoton wachsend in $]a, b[$. Zeigen Sie, dass die Funktion $g :]a, b[\to \mathbb{R}$, definiert durch

$$g(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (x \in\,]a, b[)\,,$$

streng monoton wachsend in $]a, b[$ ist.

4.26 *(Herbst 2004, Thema 3, Aufgabe 4)*

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $0 = f(0) < f(1)$ und $f'(0) < 0$. Zeigen Sie, dass es ein $x_0 > 0$ mit $f'(x_0) = 0$ gibt.

4.27 *(Herbst 2011, Thema 2, Aufgabe 3)*

Es seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien stetige und auf $]a, b[$ differenzierbare Funktionen mit den Eigenschaften $f(a) < g(a)$ und $f'(x) \leq g'(x)$ für alle $x \in\,]a, b[$. Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass $f(x) < g(x)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

4.28 *(Herbst 2005, Thema 2, Aufgabe 6)*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 0$. Zeigen Sie, dass es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$|f(x)| \leq C\, x^2 \;\text{ für jedes } x \in [-1, 1]\,.$$