LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Differential– und Integralrechnung 3

3.1 *(Herbst 2011, Thema 3, Aufgabe 2)*

Gegeben ist für $m \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_m : \,]-\infty, 2\pi[\, \to \mathbb{R}; \quad f_m(x) = \begin{cases} mx & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{x - \sin x}{1 - \cos x} & \text{für } x > 0 \end{cases}.$$

Folgende Tatsachen sind ausführlich zu begründen:

a) Die Funktion f_m ist für jede reelle Zahl m in $x_0 = 0$ stetig.

b) Für $m \leq 0$ gilt $f_m\left(]-\infty, 2\pi[\right) = [0, \infty[$.

c) Für $m = \frac{1}{3}$ ist f_m in $x_0 = 0$ differenzierbar.

3.2 *(Herbst 2011, Thema 2, Aufgabe 2)*

a) Gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion f definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ a & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

stetig ist auf ganz $\mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Gegeben sei die Funktion $f : \,]0, \infty[\, \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^{\ln x}$. Berechnen Sie die Ableitung dieser Funktion und die Nullstelle(n) der Ableitung.

3.3 *(Frühjahr 2009, Thema 1, Aufgabe 2)*

Sei $f : \,]0, \infty[\, \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = x^{\sin(x)}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion f in 0 stetig fortgesetzt werden kann.

b) Beweisen Sie

$$\lim_{x \searrow 0} f'(x) = -\infty.$$

c) Folgern Sie, dass die Fortsetzung in 0 nicht von rechts differenzierbar ist.

3.4 *(Frühjahr 2011, Thema 1, Aufgabe 4)*

Man betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x + x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{für } x < 0, \\ e^x - 1, & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar ist.

3.5 *(Frühjahr 2012, Thema 2, Aufgabe 4)*

Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

sowie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass f im Punkt $x = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar ist.

b) Zeigen Sie, dass g im Punkt $x = 0$ stetig und differenzierbar ist.

3.6 *(Herbst 2013, Thema 3, Aufgabe 3)*

Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie für alle $x \in [-1, 1]$ die Ableitung $f'(x)$.

b) Ist die Funktion f' beschränkt?

3.7 *(Herbst 2013, Thema 1, Aufgabe 2)*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\ln |x|\right), & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung f'.

b) Zeigen Sie, dass f in $]0, 1[$ und in $]1, \infty[$ jeweils unendliche viele Nullstellen besitzt.

3.8 *(Herbst 2014, Thema 2, Aufgabe 3)*

Gegeben sei die Funktion $f:]-1,1[\to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{wenn } \frac{1}{n} \leq |x| < \frac{1}{n-1} \text{ für } n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \\ 0, & \text{wenn } x = 0. \end{cases}$$

a) Erstellen Sie eine Skizze des Graphen von f.

b) Entscheiden Sie, ob f in $x = 0$ stetig ist.

c) Entscheiden Sie, ob f in $x = 0$ differenzierbar ist.

3.9 *(Herbst 2014, Thema 3, Aufgabe 3)*

Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}}.$$

3.10 *(Herbst 2013, Thema 1, Aufgabe 1)*

a) Zeigen Sie

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(\cos(t))}{t^2} = -\frac{1}{2}.$$

b) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n.$$

3.11 *(Herbst 2012, Thema 3, Aufgabe 1)*

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n+1} + \frac{n}{3^n}\right),$$ b) $$\lim_{x\to 2} \left(\frac{x^2 - \sqrt{6+5x}}{\ln(x-1)}\right).$$

3.12 *(Frühjahr 2010, Thema 2, Aufgabe 3)*

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}.$$

3.13 *(Frühjahr 2015, Thema 2, Aufgabe 3)*

a) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2) - 1}{x^3 \sin(x)}.$$

b) Berechnen Sie für alle $a > 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)}{a + \sin(x)^2}\, dx.$$

3.14 *(Herbst 2015, Thema 2, Aufgabe 3)*

Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^2 \cos\left(\pi \frac{3x-3}{3x-x^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2-6x+9}\right) dx.$$

3.15 *(Herbst 2008, Thema 2, Aufgabe 3)*

a) Bestimmen Sie eine reelle Zahl c so, dass die Funktion

$$f : [0,\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^x, & \text{falls } x > 0 \\ c, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

stetig ist.

b) Zeigen Sie: $\displaystyle \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = 1.$

3.16 *(Herbst 2015, Thema 1, Aufgabe 3)*

Sei $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}.$$

a) Zeigen Sie $f(x) > 0$ für alle $x > 0$.

b) Untersuchen Sie, ob die Funktion $F :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$$

bijektiv ist.

3.17 *(Herbst 2012, Thema 1, Aufgabe 2)*

Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = x \cdot \sin(x).$$

a) Berechnen Sie eine Stammfunktion F von f.

b) Geben Sie an, in welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ die Stammfunktion F lokale Extrema hat, und ob es sich dabei jeweils um ein lokales Maximum oder Minimum handelt.

3.18 *(Herbst 2014, Thema 1, Aufgabe 2)*

a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

$$\cosh(\cosh(x)) \cdot \sinh(x) \cdot \cosh(x).$$

b) Sei $f :]-1,\infty[\to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(y) = \int_{-1}^y \cosh(\cosh(x)) \cdot \sinh(x) \cdot \cosh(x) dx.$$

Bestimmen Sie die Stellen, an denen f ein Maximum und Minimum annimmt.

3.19 *(Herbst 2013, Thema 3, Aufgabe 2)*

a) Berechnen Sie

$$\int_0^{2\pi} x^3 \cos(x)\, dx.$$

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

auf dem Intervall $\left[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi\right]$ monoton fällt.

c) Beweisen Sie mit (b) für die in (b) definierte Funktion f die Abschätzung

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} \le \int_{\pi/2}^{3\pi/4} f(x)\, dx \le \frac{1}{2}.$$

3.20 *(Frühjahr 2014, Thema 3, Aufgabe 3)*

Sei die Funktion $f :]1, \infty[\to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x \ln(x)}.$$

a) Bestimmen Sie $f\,(]1, \infty[)$.

b) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k f(k)$$

auf Konvergenz.

c) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f.

3.21 *(Frühjahr 2013, Thema 1, Aufgabe 2)*

a) Berechnen Sie für $a \ge 2$

$$g(a) = \int_2^a \frac{x^2 - 2\,x - 1}{x - x^3}\, dx.$$

b) Geben Sie $g'(a)$ an und zeigen Sie, dass g in

$$a = 1 + \sqrt{2}$$

ein globales Maximum auf dem Intervall $[2, \infty[$ hat.

3.22 *(Frühjahr 2013, Thema 3, Aufgabe 5)*

Wir betrachten die Funktion $f :]1, \infty[\to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion f streng monoton fällt.

b) Berechnen Sie

$$\int_e^{e^2} f(x)\, dx.$$

3.23 *(Herbst 2014, Thema 2, Aufgabe 4)*

Wir betrachten die Funktion $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \int_1^x \left(\frac{t}{e}\right)^t \ln(t)\, dt.$$

a) Berechnen Sie $f(x)$.

b) Zeigen Sie, dass im Intervall $[1, e]$ eine Stelle x existiert, so dass die Tangente in x an den Graphen von f die Steigung $\frac{1}{e}$ hat.

3.24 *(Herbst 2014, Thema 3, Teilaufgabe 2a)*

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f :]3, \infty[\to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \int_3^{x^2+x} \frac{1}{t^3+1}\, dt.$$

3.25 *(Herbst 2010, Thema 3, Aufgabe 4)*

Sei Q ein achsenparalleles Rechteck im ersten Quadranten, mit einer Ecke im Nullpunkt, zwei Ecken auf den Koordinatenachsen und der letzten Ecke auf dem Graphen der Funktion

$$y = \frac{4-x}{2+x}.$$

Wie groß kann der Flächeninhalt von Q höchstens sein?

3.26 *(Frühjahr 2011, Thema 2, Aufgabe 5)*

Man berechne den größten Flächeninhalt des Dreiecks, das von der x–Achse, von der y–Achse und von der Tangente im Punkt $x = a > 0$ des Graphen von $y = (x+1)^{-2}$ begrenzt wird.

3.27 *(Frühjahr 2012, Thema 2, Aufgabe 5)*

Gegeben sei für $x > -2$ die Funktion

$$h(x) = (x-1) \cdot \ln(x+2).$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von der x–Achse, der Funktion $h(x)$ und den beiden Nullstellen von $h(x)$ eingeschlossen wird.

3.28 *(Herbst 2012, Thema 3, Aufgabe 3)*

Die Funktion $f :]-e, \infty[\to \mathbb{R}$ (mit e, der Eulerschen Zahl) sei gegeben durch

$$f(x) = \frac{x-e}{x+e}.$$

Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt der Fläche, die durch den Graphen von f und der x–Achse im Bereich von $x = 0$ und $x = 3e$ eingeschlossen wird, den Wert e hat.

3.29 *(Frühjahr 2008, Thema 2, Aufgabe 4)*

Gegeben sei die kompakte Menge

$$M := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \quad \text{und} \quad e^x - 1 \leq y \leq e^{-x} + 1\right\}.$$

a) Zeigen Sie: Der rechte Eckpunkt von M, d.h., der Punkt (x_r, y_r) mit

$$y_r = e^{-x_r} + 1 = e^{x_r} - 1$$

hat die Koordinaten

$$x_r = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right), \qquad y_r = \sqrt{2}.$$

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von M.

3.30 *(Frühjahr 2014, Thema 1, Aufgabe 3)*

Berechnen Sie die Fläche von

$$F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi \leq x \leq \pi,\ \sin(x) \leq y \leq \cos(x)\right\}.$$

3.31 *(Herbst 2014, Thema 2, Aufgabe 2)*

Wir betrachten das Gebiet des $\mathbb{R}^2$, das von der x–Achse und dem Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{6}\left(e + \frac{1}{e}\right) - \frac{1}{3}\cosh(3x)$$

eingeschlossen wird.

a) Berechnen Sie die Fläche des Gebietes.

b) Berechnen Sie seinen Umfang.

3.32 *(Frühjahr 2015, Thema 3, Aufgabe 3)*

Gegeben seien die Funktionen $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = (\ln x)^2$$

und $g :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \ln\left(x^2\right).$$

a) Man zeige, dass die Graphen G_f und G_g genau zwei Schnittpunkte besitzen und gebe deren x–Koordinaten a und b mit $a < b$ an.

b) Man zeige durch partielle Integration, dass der Inhalt A der durch G_f und G_g zwischen a und b begrenzten Fläche durch

$$A = \int_a^b x\left(f'(x) - g'(x)\right)dx$$

gegeben wird.

c) Man bestimme mit Hilfe von b) den Wert des Flächeninhalts A.

3.33 *(Frühjahr 2008, Thema 2, Aufgabe 3)*

a) Beweisen Sie durch partielle Integration

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx = -\int_0^{\pi} e^x \cos x\, dx.$$

b) Zeigen Sie:

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx = \frac{1+e^{\pi}}{2}.$$

3.34 *(Herbst 2010, Thema 1, Aufgabe 5)*

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei I_n definiert durch

$$I_n := \int_0^{\pi} (\sin(x))^n\, dx.$$

Zeigen Sie

$$I_n = \frac{n-1}{n}\, I_{n-2} \quad \text{für} \quad n \geq 2.$$

3.35 *(Herbst 2005, Thema 3, Aufgabe 4)*

Beweisen Sie für $0 < x < 1$ die Gleichheit

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}$$

und leiten Sie hieraus eine Funktionalgleichung für den Arcustangens her.

3.36 *(Frühjahr 2011, Thema 2, Aufgabe 4)*

Sei die Funktion $y(x) = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ mit $a > 0$. Man berechne

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon}^{a} \sqrt{1+(y')^2}\, dx.$$

3.37 *(Herbst 2009, Thema 3, Aufgabe 2)*

Gegeben sei die reelle Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x) := \begin{cases} x^2\,(1 - 2\ln|x|) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f in $x_0 = 0$ differenzierbar ist.

b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f nach Lage, Art und Wert.

c) Skizzieren Sie in einem kartesischen xy–Koordinatensystem den Bereich

$$B := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x)\right\}$$

und berechnen Sie seinen Flächeninhalt.

3.38 *(Frühjahr 2010, Thema 3, Aufgabe 2)*

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) := x^{2010} - x - 1 \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

definiert ist, genau zwei Nullstellen in $\mathbb{R}$ besitzt.

3.39 *(Herbst 2010, Thema 3, Aufgabe 3)*

Man zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{x^2}{2} - x + \sin x$$

genau eine Nullstelle hat.

3.40 *(Herbst 2015, Thema 2, Aufgabe 2)*

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \sin(x) - x.$$

a) Man zeige, dass f' unendlich viele Nullstellen hat.

b) Man zeige, dass f streng monoton fällt.

c) Man zeige, dass f genau eine Nullstelle hat und gebe ein abgeschlossenes Intervall der Länge π an, das die Nullstelle enthält.

3.41 *(Frühjahr 2007, Thema 3, Aufgabe 2)*

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp(x^3) + \arctan(x) + x^2 - 2$$

mindestens zwei Nullstellen und mindestens eine Nullstelle der Ableitung besitzt.

3.42 *(Frühjahr 2013, Thema 2, Aufgabe 2)*

a) Die Funktion $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x).$$

Zeigen Sie, dass f weder surjektiv noch injektiv ist, und bestimmen Sie die Extrema von f.

b) Die Funktion $g :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$g(x) = \exp(x)\ln(x).$$

Zeigen Sie, dass g bijektiv ist.

3.43 *(Herbst 2012, Thema 2, Aufgabe 2)*

Die Funktion $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = x \cdot (2\,x - 1 + \ln(x))\,.$$

Beweisen Sie:

a) $g = f'$ ist streng monoton wachsend auf $]0, \infty[$.

b) $g = f'$ hat genau eine Nullstelle in $]0, \infty[$.

c) f hat genau ein lokales Extremum in $]0, \infty[$, und zwar ein Minimum.

3.44 *(Frühjahr 2011, Thema 3, Aufgabe 1)*

a) Diskutieren Sie die Funktion $(1-x)\,e^x$ auf Monotonie-Intervalle, Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ und globale Extrema.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, gilt

$$e^x \leq \frac{1}{1-x}?$$

3.45 *(Frühjahr 2015, Thema 2, Aufgabe 2)*

a) Beweisen Sie

$$\ln(x) < x - 1 \qquad \text{für alle} \qquad x > 0,\ x \neq 1.$$

b) Beweisen Sie

$$x^e < e^x \qquad \text{für alle} \qquad x > 0,\ x \neq e.$$

3.46 *(Frühjahr 2014, Thema 1, Aufgabe 1)*

a) Berechnen Sie für $c > 0$ die absoluten Extrema der Funktion $f_c :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_c(x) = c\,x - \ln(x)$$

in Abhängigkeit von c.

b) Bestimmen Sie alle Werte $c > 0$, für die die Gleichung

$$c\,x = \ln(x)$$

genau eine Lösung $x > 0$ besitzt.

3.47 *(Frühjahr 2006, Thema 1, Aufgabe 1)*

Seien a, b, $c \in \mathbb{R}$ mit $a < b < c$. Beweisen Sie, dass die Gleichung

$$\frac{1}{x-a} + \frac{2}{x-b} + \frac{3}{x-c} = 0$$

in den Intervallen $]a, b[$ und $]b; c[$ jeweils mindestens eine Lösung besitzt.

3.48 *(Herbst 2013, Thema 1, Aufgabe 3)*

Sei a, $b \in \,]0,1[$. Zeigen Sie, dass

$$a^x + b^x = 1$$

genau eine Lösung im Intervall $]0,\infty[$ hat.

3.49 *(Frühjahr 2009, Thema 2, Aufgabe 3)*

a) Man zeige, dass die Funktion

$$h : \,]0;\infty[\, \to \mathbb{R}, \qquad h(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1},$$

streng monoton fällt und nur positive Werte annimmt.

b) Man zeige, dass die Funktion

$$f : \,]0;\infty[\, \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$

streng monoton steigt, und bestimme ihren Wertebereich.

3.50 *(Frühjahr 2008, Thema 3, Aufgabe 2)*

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \arctan x + \frac{1}{1+x^2}.$$

a) Man zeige, daß die Funktion f umkehrbar ist, und bestimme ihren Wertebereich $W_f = f(\mathbb{R})$.

b) Man begründe, daß die Umkehrfunktion $f^{-1} : W_f \to \mathbb{R}$ stetig ist, und gebe alle Punkte $a \in \mathbb{R}$ an, in denen f^{-1} auch differenzierbar ist.

3.51 *(Herbst 2012, Thema 1, Aufgabe 3)*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}.$$

a) Man zeige, dass f streng monoton wächst.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ besitzt f lokal eine differenzierbare Umkehrfunktion

$$g = f^{-1}?$$

c) Man berechne $g'\left(\frac{1}{2}\right)$.

3.52 *(Frühjahr 2008, Thema 3, Aufgabe 3)*

Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $g(0) = 0$. Man zeige, dass dann auch die Funktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = |x| \cdot g(x)$$

stetig differenzierbar ist.

3.53 *(Frühjahr 2010, Thema 2, Aufgabe 4)*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist.

b) Zeigen Sie, dass f konstant ist.

3.54 *(Herbst 2015, Thema 3, Aufgabe 3)*

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei monoton fallende (nicht notwendig differenzierbare) Funktionen. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel!

a) Die Funktion $f + g$ ist monoton fallend.

b) Die Funktion $f - g$ ist monoton fallend.

c) Die Funktion $f \circ g$ ist monoton wachsend.

3.55 *(Frühjahr 2012, Thema 3, Aufgabe 1)*

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende, stetige Funktion mit

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

sowie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton fallende, stetige Funktion mit

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty.$$

Man zeige, dass die Graphen von f und g einen Schnittpunkt besitzen.

3.56 *(Herbst 2013, Thema 2, Aufgabe 2)*

Gegeben seien zwei stetige Funktionen $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\sup \{f(x) : -1 \leq x \leq 1\} = \sup \{g(x) : -1 \leq x \leq 1\}.$$

Beweisen Sie, dass es ein $x_0 \in [-1, 1]$ gibt mit $f(x_0) = g(x_0)$.

3.57 *(Herbst 2014, Thema 1, Aufgabe 3)*

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine nach oben und unten beschränkte und stetig differenzierbare Funktion, so dass

$$c = \lim_{x\to\infty} f'(x)$$

existiert. Zeigen Sie, dass dann $c = 0$ gilt.

b) Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist: Ist $a \in \mathbb{R}$ und $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0,$$

dann ist f beschränkt.

3.58 *(Frühjahr 2015, Thema 1, Aufgabe 4)*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, und es gebe eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) > c > 0 \qquad \text{für alle} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Zeigen Sie, dass F bijektiv ist.