Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Differential– und Integralrechnung 2

2.1 *(Herbst 2012, Thema 3, Aufgabe 1)*

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3x}{x^2+2} \right)^k .$$

Bestimmen Sie die Menge D aller $x \in \mathbb{R}$, für die die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, sowie die Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{R}$.

2.2 *(Frühjahr 2004, Thema 2, Aufgabe 2)*

a) Bestimmen Sie für die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x+3}{(x-3)^k}, \qquad x \neq 3,$$

alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe konvergiert, und berechnen Sie den Wert der Reihe.

b) Beweisen Sie oder widerlegen Sie die Konvergenz der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k} \right)$.

2.3 *(Herbst 2014, Thema 3, Aufgabe 1)*

a) Bestimmen Sie den Grenzwert der konvergenten Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{-n}}{(n+1)!}.$$

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 2^n}.$$

2.4 *(Herbst 2006, Thema 2, Aufgabe 1)*

Man beweise oder widerlege die Konvergenz der beiden folgenden Reihen.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{2^{n^3}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n^2+n}}$

2.5 *(Frühjahr 2004, Thema 1, Aufgabe 1)*

a) Man beweise oder widerlege für jede der beiden Reihen die Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + 4^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2^n + 3^n}.$$

b) Man zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+2)}$$

konvergiert mit dem Grenzwert $\frac{3}{4}$.

2.6 *(Herbst 2011, Thema 2, Aufgabe 1)*

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^4}\right).$$

2.7 *(Frühjahr 2015, Thema 2, Aufgabe 1)*

Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}.$$

a) Beweisen Sie die Konvergenz der Reihe.

b) Ist die Reihe absolut konvergent? Begründen Sie Ihre Antwort!

2.8 *(Herbst 2011, Thema 3, Aufgabe 1)*

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \dfrac{\ln n}{n}$. Zeigen Sie:

a) Für alle $n \geq 3$ gilt $a_n > a_{n+1}$.

b) Mit $n_k := 2^k$ ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

c) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ ist konvergent.

d) Konvergiert $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ auch absolut? Begründen Sie Ihre Antwort.

2.9 *(Frühjahr 2015, Thema 3, Aufgabe 2)*

Man untersuche die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{1}{n})}{n}\, x^n$$

in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

2.10 *(Herbst 2009, Thema 3, Teilaufgabe 1b)*

Bestimmen Sie (mit Begründung) alle reellen Zahlen $x > 0$, für die die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n}.$$

2.11 *(Herbst 2007, Thema 1, Aufgabe 2)*

Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x, für die die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} x^n$$

konvergiert.

2.12 *(Frühjahr 2013, Thema 2, Aufgabe 1)*

Bestimmen Sie für jede der folgenden Reihen alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe konvergiert.

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{xk}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} e^k x^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e^x + k}.$$

2.13 *(Herbst 2010, Thema 1, Aufgabe 1)*

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{1 + x^{2n}}$$

konvergiert.

2.14 *(Herbst 2008, Thema 3, Aufgabe 1)*

Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x, für welche folgende Reihen konvergieren:

a) $$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(x^2 - 1\right)^n$$ b) $$\sum_{n \geq 1} n x^{(n^2)}$$

2.15 *(Frühjahr 2006, Thema 1, Aufgabe 2)*

Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Reihen konvergent bzw. absolut konvergent sind:

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot \sqrt{n - \frac{1}{2}}}$$ b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{(n^2)}}{(n+1)^{(n^2)}} x^n$$

2.16 *(Herbst 2004, Thema 1, Aufgabe 1)*

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die gegebenen Reihen konvergent sind:

a) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$$ b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^{n^2}$$

2.17 *(Herbst 2010, Thema 2, Aufgabe 2)*

a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n^2 - n)}$$

konvergiert. Konvergiert sie absolut?

b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - n + n^2 - n^3 + n^4 - n^5}{n^7}$$

konvergiert. Konvergiert sie absolut?

c) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(kx)^k}{k!}$$

für alle $|x| < \frac{1}{e}$ konvergiert. Konvergiert sie absolut?

2.18 *(Herbst 2007, Thema 1, Aufgabe 2)*

a) Man beweise oder widerlege die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{\left(\frac{1+n}{n}\right)^n}{3} \right)^n .$$

b) Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n .$$

2.19 *(Herbst 2010, Thema 3, Aufgabe 1)*

Für welche positiven Zahlen a, $b > 0$ mit $b \neq 1$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1 - b^n} ?$$

2.20 *(Herbst 2008, Thema 1, Aufgabe 1)*

a) Man beweise oder widerlege die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

b) Man bestimme alle reellen Zahlen x, für die die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n x^{2n}}{1 + n^2}$$

konvergent ist.

2.21 *(Frühjahr 2011, Thema 2, Aufgabe 1)*

a) Man zeige
$$1-\sqrt{1-\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{2n}$$
für $n \geq 2$ und bestimme damit, ob die Reihe
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$$
konvergiert.

b) Man bestimme, ob die Reihe
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)$$
konvergiert.

2.22 *(Frühjahr 2008, Thema 3, Aufgabe 2)*

a) Man zeige: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$

b) Man untersuche die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ auf Konvergenz.

2.23 *(Herbst 2008, Thema 2, Aufgabe 1)*

Gegeben sei eine reelle Zahl $a>0$.

a) Zeigen Sie: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=\ln a.$

b) Untersuchen Sie für $a \geq 1$ die unendliche Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$$
auf Konvergenz.

2.24 *(Frühjahr 2012, Thema 3, Aufgabe 2)*

Gegben sei die Funktion $f:[2,\infty[\,\to\mathbb{R}$ mit
$$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}.$$

a) Man zeige, dass f auf $]2,\infty[$ monoton fällt und nur positive Werte annimmt.

b) Man bestimme mit Hilfe partieller Integration eine Stammfunktion von f.

c) Man untersuche die Reihe
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$$
mittels des Integralvergleichskriteriums auf Konvergenz.

2.25 *(Frühjahr 2007, Thema 2, Aufgabe 3)*

a) Beweisen Sie für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$

$$\sum_{n=3}^{k} \frac{1}{n(\ln n)^2} \leq \int_2^k \frac{1}{x(\ln x)^2} \leq \sum_{n=2}^{k-1} \frac{1}{n(\ln n)^2}.$$

b) Beweisen Sie die Ungleichung

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} \leq \frac{1}{\ln 2}.$$

2.26 *(Herbst 2005, Thema 2, Aufgabe 3)*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) \geq 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k \geq 1} (-1)^k f\left(\frac{1}{k}\right)$$

konvergiert.

2.27 *(Herbst 2015, Thema 1, Aufgabe 1)*

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = \frac{1}{2}, \qquad a_{n+2} = a_n a_{n+1} \quad \text{für} \quad n \geq 1$$

rekursiv definierte Folge. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

2.28 *(Frühjahr 2002, Thema 2, Aufgabe 2)*

Bekanntlich gilt:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

Bestimmen Sie ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \right| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$$

gilt.

2.29 *(Frühjahr 2011, Thema 1, Aufgabe 1)*

a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass sich eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ finden lässt, so dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ absolut konvergiert.

b) Es sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, so dass es ein $d > 0$ mit $b_{n+1} < b_n - d$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{b_n}$ konvergiert.

2.30 *(Herbst 2014, Thema 1, Aufgabe 1)*

a) Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ eine absolut konvergente Reihe, dann konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut.

b) Zeigen Sie: Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ eine absolut konvergente Reihe, dann konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ absolut.

c) Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ eine konvergente Reihe, dann konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

2.31 *(Herbst 2015, Thema 1, Aufgabe 2)*

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $a_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} a_k}$ divergent.

b) Ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} a_k}$ konvergent.

c) Ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} a_k}$ absolut konvergent.

2.32 *(Herbst 2013, Thema 2, Aufgabe 1)*

a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

b) Seien $a_1, a_2, \ldots \in]0, \infty[$. Beweisen Sie mit dem Majorantenkriterium, dass aus der Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$$

folgt.

2.33 *(Frühjahr 2010, Thema 2, Aufgabe 2)*

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie: Wenn die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$$

konvergiert, dann konvergiert auch die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

2.34 *(Frühjahr 2014, Thema 1, Aufgabe 2)*

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$ und sei die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Zeigen Sie, dass dann auch die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(a_k)$$

absolut konvergiert.

b) Finden Sie ein Beispiel dafür, dass die Behauptung falsch wird, wenn man nicht voraussetzt, dass f stetig differenzierbar ist, sondern nur, dass f stetig ist.

2.35 *(Herbst 2013, Thema 3, Aufgabe 1)*

a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $a_n \geq 0$ und $b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gelte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Beweisen Sie die folgende Aussage: Wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

konvergiert, so konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

b) Zeigen Sie: Die Aussage a) gilt nicht mehr, wenn man von der Reihe $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lediglich $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ fordert.