LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2020): Differential– und Integralrechnung 1

1.1 *(Frühjahr 2002, Thema 3, Aufgabe 2)*

Formulieren Sie das Prinzip der vollständigen Induktion und beweisen Sie damit die folgende Aussage: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, gilt

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, k^2 = (-1)^{n+1}\, \frac{n(n+1)}{2}.$$

1.2 *(Herbst 2005, Thema 3, Aufgabe 1)*

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Gleichheit für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right).$$

1.3 *(Herbst 2006, Thema 3, Aufgabe 1)*

Gegeben sei die durch

$$a_n = \frac{(\sin(n))^3 - 3\,\cos(n)}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 1$$

definierte Folge $(a_n)_{n\geq 1}$, und eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$. Bestimmen Sie eine reelle Zahl a und eine natürliche Zahl $N = N(\varepsilon)$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle} \quad n \geq N$$

gilt.

1.4 *(Frühjahr 2015, Thema 3, Aufgabe 1)*

Es sei $r > 0$ eine fest gewählte reelle Zahl. Man zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{\sqrt{r\,n}}{1 + r\sqrt{n}} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ besitzt und bestimme für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle} \qquad n \geq n_0.$$

1.5 *(Herbst 2012, Thema 2, Aufgabe 1)*

Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit

$$a_n = \frac{(2n^2+1)(n+1)^n}{(3n+1)\,n^{n+1}}$$

konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert der Folge.

1.6 *(Herbst 2006, Thema 1, Teilaufgabe 1a)*

Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\text{(i)}\quad a_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}, \qquad \text{(ii)}\quad a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{7^k}, \qquad \text{(iii)}\quad a_n = \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

Zeigen Sie, dass diese Folgen konvergieren und berechnen Sie ihre Grenzwerte.

1.7 *(Frühjahr 2014, Thema 3, Aufgabe 2)*

Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch $f_1 = f_2 = 1$ und

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \qquad \text{für alle} \quad n \geq 2$$

rekursiv definierte Fibonacci–Folge.

a) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n \geq \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

b) Zeigen Sie, dass die durch

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{f_k}{f_{k+1}}$$

für $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge gegen 0 konvergiert.

c) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{f_k}$$

konvergiert.

1.8 *(Herbst 2009, Thema 3, Teilaufgabe 1a)*

Untersuchen Sie für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ die durch $a_n := \frac{1-x^n}{1+x^n}$ gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und ermitteln Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

1.9 *(Herbst 2009, Thema 3, Teilaufgabe 1c)*

Untersuchen Sie die durch $x_1 := 1$ und $x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(x_n^3 + 1\right)$ rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz.

1.10 *(Frühjahr 2015, Thema 1, Aufgabe 1)*

Zeigen Sie, dass die rekursiv gegebene Folge

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1, \qquad a_0 = 1$$

konvergiert.

1.11 *(Frühjahr 2007, Thema 3, Aufgabe 1)*

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist rekursiv definiert durch

$$a_0 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie:

a) $a_n \leq a_{n+1} \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$.

1.12 *(Herbst 2007, Thema 1, Aufgabe 1)*

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{12+a_n}, \quad n \geq 1.$$

a) Zeigen Sie, dass (a_n) monoton wachsend und beschränkt ist.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert von (a_n).

1.13 *(Herbst 2007, Thema 2, Aufgabe 1)*

Gegeben sei die durch

$$a_1 = 5 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = 3 + \frac{2}{7-a_n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Man zeige $3 \leq a_n \leq 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Man beweise, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

c) Man bestimme den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.14 *(Frühjahr 2009, Thema 2, Aufgabe 1)*

Gegeben sei die durch

$$a_1 = \frac{7}{2} \quad \text{und} \quad a_{n+1} = 5 - \sqrt{11 - 2\,a_n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Man zeige $1 \leq a_n \leq 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Man beweise, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

c) Man bestimme den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.15 *(Herbst 2008, Thema 1, Aufgabe 2)*

Man zeige, dass die durch

$$x_1 := 1, \qquad x_{n+1} := x_n - \frac{x_n^3}{10} + \frac{x_n^5}{100}, \quad n \geq 1,$$

definierte Folge konvergiert und bestimme ihren Grenzwert.

1.16 *(Frühjahr 2009, Thema 1, Aufgabe 1)*

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$x_{n+1} = e^{x_n - 1}, \qquad x_1 = 0.$$

a) Zeigen Sie, dass die Folge monoton wachsend und durch 1 nach oben beschränkt ist.

b) Zeigen Sie, dass die Folge gegen 1 konvergiert.

1.17 *(Frühjahr 2008, Thema 2, Aufgabe 1)*

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 := 3, \qquad a_{n+1} := \frac{a_n^2 + 4}{2\,a_n}.$$

a) Zeigen Sie: $a_n \geq 2$ für alle n.

b) Zeigen Sie: Die Folge a_n fällt monoton.

c) Berechnen Sie den Grenzwert a der Folge a_n.

1.18 *(Frühjahr 2005, Thema 1, Aufgabe 1)*

Gegeben sei die durch

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{1 + a_n^2}{2 + a_n}, \qquad n \geq 1$$

definierte Folge.

a) Zeigen Sie, daß $a_n > \frac{1}{2}$ für alle $n \geq 1$ gilt.

b) Untersuchen Sie die Folge (a_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

1.19 *(Frühjahr 2009, Thema 3, Aufgabe 1)*

Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ sei definiert durch

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}\,a_n^2 + \frac{3}{4}, \qquad \text{mit} \quad a_0 \in [1,3]\,.$$

a) Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ für alle $a_0 \in [1,3]$ monoton fallend ist.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ in Abhängigkeit von a_0, falls der Grenzwert existiert.

1.20 *(Frühjahr 2006, Thema 2, Aufgabe 2)*

Man zeige, dass für jeden Startwert $x_0 \in [0;3]$ die durch die Rekursion

$$x_{n+1} = \frac{1}{5}\left(x_n^2 + 6\right) \qquad (n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\})$$

definierte Folge konvergiert und bestimme jeweils den Grenzwert.

1.21 *(Frühjahr 2014, Thema 2, Aufgabe 1)*

Für einen beliebigen Startwert $a_0 \in \mathbb{R}$ betrachte man die durch

$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Man zeige:

a) Für alle Startwerte $a_0 \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton wachsend.

b) Für alle Startwerte $a_0 \in [0,1]$ konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen den Grenzwert 1.

c) Für alle Startwerte $a_0 \notin [0,1]$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$.

1.22 *(Herbst 2009, Thema 2, Aufgabe 1)*

Die reelle Zahlenfolge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$x_1 \geq 1, \qquad x_{k+1} = f(x_k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

wobei $f(x) := \frac{1}{5}\left(4\,x + \frac{1}{x^4}\right)$ für $x > 0$. Zeigen Sie:

a) $f(x) \geq 1$ für alle $x > 0$.

b) $x_{k+1} - x_k \leq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

c) $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Bestimmen Sie auch den Grenzwert $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$.

1.23 *(Frühjahr 2013, Thema 2, Aufgabe 3)*

Sei $f(x) = x^x$ für $x > 0$ definiert.

a) Zeigen Sie für alle $x \in \left]\frac{1}{e}, 1\right[$ die Ungleichung

$$0 < f'(x) < 1, \qquad 0 < f(x) < 1.$$

b) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv durch

$$x_0 \in \left]\tfrac{1}{e}, 1\right[, \qquad x_{n+1} = f(x_n)$$

gegeben. Zeigen Sie

$$x_n < x_{n+1} < 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Zeigen Sie, dass die in b) definierte Folge gegen 1 konvergiert.

1.24 *(Herbst 2015, Thema 3, Aufgabe 2)*

Seien $a,\ b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a,b] \to [a,b]$ eine monoton wachsende Funktion. Für ein gegebenes $x_1 \in [a,b]$ definieren wir die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad \text{für alle} \quad n \geq 1.$$

Zeigen Sie:

a) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton. (Man unterscheide die Fälle $x_1 \geq x_2$ und $x_1 < x_2$.)

b) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

c) Ist f zudem stetig, dann ist der Grenzwert x der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Fixpunkt von f. Das heißt, es gilt $f(x) = x$.

1.25 *(Frühjahr 2014, Thema 3, Aufgabe 1)*

a) Zeigen Sie
$$\sin(x) < x \qquad \text{für alle} \quad x > 0.$$

b) Bestimmen Sie den Grenzwert der rekursiv gegebenen Folge
$$x_{n+1} = \sin(x_n)$$
mit beliebigem Startpunkt $x_0 \in \mathbb{R}$.

1.26 *(Frühjahr 2005, Thema 2, Aufgabe 1)*

Für $n = 1, 2, \ldots$ sei
$$a_n := \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

a) Untersuchen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt ist.

b) Untersuchen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent ist.

1.27 *(Frühjahr 2007, Thema 1, Aufgabe 2)*

Gegeben sei die durch
$$x_1 := 1, \qquad x_{n+1} := 1 + \frac{1}{x_n}, \quad n \geq 1$$
definierte Folge.

a) Man zeige, dass die Teilfolgen (x_{2n+1}) bzw. (x_{2n}) monoton wachsend bzw. monoton fallend sind.

b) Man zeige die Konvergenz der Folge (x_n) und bestimme ihren Grenzwert.

1.28 *(Frühjahr 2011, Thema 3, Aufgabe 3)*

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, die gegen a konvergiere. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge der
$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$
gegen a konvergiert.

b) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aber nicht.

1.29 *(Frühjahr 2012, Thema 1, Aufgabe 1)*

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen a konvergente Folge in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$b_n := \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}) \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$
gegen a konvergiert.

b) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die nicht konvergiert, so dass die zugehörige Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

c) Sei vorausgesetzt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst und dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.