

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2012): Lineare Algebra und analytische Geometrie 4 — Lösungsvorschlag —

4.1 Der Nachweis, daß die beiden Unterräume $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ und $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ mit

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$ übereinstimmen, kann auf verschiedene Weise erbracht werden:

- Algebraisch gesehen ist U bzw. V die Menge der Linearkombinationen von u_1 und u_2 bzw. von v_1 und v_2 , was jedoch dem Spaltenraum der Matrix $A_U = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ bzw. $A_V = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ entspricht. Wegen

$$\begin{aligned} (A_U | b) &= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & b_1 \\ 2 & 2 & b_2 \\ 3 & 1 & b_3 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}-3\text{I}]{\text{II}-2\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -8 & b_3 - 3b_1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}-2\text{II}} \\ &\xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - 2b_2 + b_1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

für alle $b \in \mathbb{R}^3$ ist also

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid b_1 - 2b_2 + b_3 = 0 \right\},$$

und wegen

$$\begin{aligned} (A_V | b) &= \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & b_1 \\ 5 & 5 & b_2 \\ 6 & 4 & b_3 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III} \cdot 2]{\text{II} \cdot 4} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & b_1 \\ 20 & 20 & 4b_2 \\ 12 & 8 & 2b_3 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}-3\text{I}]{\text{II}-5\text{I}} \\ &\xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & b_1 \\ 0 & -10 & 4b_2 - 5b_1 \\ 0 & -10 & 2b_3 - 3b_1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & b_1 \\ 0 & -10 & 4b_2 - 5b_1 \\ 0 & 0 & 2b_3 - 4b_2 + 2b_1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

für alle $b \in \mathbb{R}^3$ ist also

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid b_1 - 2b_2 + b_3 = 0 \right\};$$

folglich stimmen U und V überein.

- Geometrisch gesehen ist U bzw. V die von den beiden (offensichtlich linear unabhängigen) Vektoren u_1 und u_2 bzw. von v_1 und v_2 aufgespannte Ursprungsebene in $\mathbb{R}^3$. Wegen

$$u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = (-4) \cdot \tilde{u} \quad \text{mit} \quad \tilde{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

besitzt U den Normalenvektor $\tilde{u}$ und damit die Gleichung

$$\tilde{u} \circ x = 0, \quad \text{also} \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,$$

und wegen

$$v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \\ -10 \end{pmatrix} = (-10) \cdot \tilde{v} \quad \text{mit} \quad \tilde{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

besitzt V den Normalenvektor $\tilde{v}$ und damit die Gleichung

$$\tilde{v} \circ x = 0, \quad \text{also} \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 0;$$

folglich stimmen U und V überein.

4.2 Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ liegt genau dann im Durchschnitt $U \cap V$ der beiden Unterräume $U = \text{span}\{u_1, u_2\}$ und $V = \text{span}\{v_1, v_2\}$ mit

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wenn er sowohl Linearkombination von u_1, u_2 als auch Linearkombination von v_1, v_2 ist, wenn es also Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2}_{x \in U} = x = \underbrace{\mu_1 \cdot v_1 + \mu_2 \cdot v_2}_{x \in V}$$

gibt; dies führt aber zur Beziehung

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \mu_1 \cdot (-v_1) + \mu_2 \cdot (-v_2) = 0,$$

also zum linearen Gleichungssystem

$$A \cdot x = 0 \quad \text{mit} \quad A = (u_1, u_2, -v_1, -v_2) \in \mathbb{R}^{3 \times 4}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} (A|0) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}-3\text{I}]{\text{II}-2\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{II} \cdot (-1)]{\rightsquigarrow} \\ &\quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}+2\text{II}]{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

erhält man die Lösungen

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}\alpha \\ 0 \\ \frac{2}{3}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$, woraus sich

$$\underbrace{\frac{5}{3}\alpha \cdot u_1 + 0 \cdot u_2}_{x \in U} = x = \underbrace{\frac{2}{3}\alpha \cdot v_1 + \alpha \cdot v_2}_{x \in W}, \quad \text{also} \quad x = \frac{5}{3}\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

ergibt. Damit ist

$$U \cap V = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

weswegen der Vektor $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine Basis von $U \cap V$ bildet.

4.3 Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ liegt genau dann im Durchschnitt $U \cap V$ der beiden Unterräume $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ und $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ mit

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

wenn er sowohl Linearkombination von u_1, u_2 als auch Linearkombination von v_1, v_2 ist, wenn es also Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2}_{x \in U} = x = \underbrace{\mu_1 \cdot v_1 + \mu_2 \cdot v_2}_{x \in V}$$

gibt; dies führt aber zur Beziehung

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \mu_1 \cdot (-v_1) + \mu_2 \cdot (-v_2) = 0,$$

also zum linearen Gleichungssystem

$$A \cdot x = 0 \quad \text{mit} \quad A = (u_1, u_2, -v_1, -v_2) \in \mathbb{R}^{3 \times 4}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} (A|0) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}-3\text{I}]{\text{II}-2\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{II} \cdot (-1)]{\rightsquigarrow} \\ &\quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}+3\text{II}]{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

erhält man die Lösungen

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$, woraus sich

$$\underbrace{(-\alpha) \cdot u_1 + \alpha \cdot u_2}_{x \in U} = x = \underbrace{(-\alpha) \cdot v_1 + \alpha \cdot v_2}_{x \in V}, \quad \text{also} \quad x = (-\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

ergibt. Damit ist $U \cap V = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, weswegen etwa der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine Basis von $U \cap V$ bildet.

4.4 Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $B \cdot x = v$ mit

$$B = (v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Wegen

$$\begin{aligned} (B|v) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}-3\text{I, IV}-4\text{I}]{\text{II}-2\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -7 & -1 & -3 & -11 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{IV}-7\text{II}]{\text{III}-2\text{II}} \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III} \leftrightarrow \frac{1}{4}\text{IV}]{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

ist das lineare Gleichungssystem $B \cdot x = v$ lösbar, also der Vektor v eine Linearkombination der Spalten v_1, v_2, v_3, v_4 der Matrix B ; genauer erhält man etwa mit der Lösung

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

die Linearkombination

$$v = (-1) \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + 1 \cdot v_4 \in \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = V.$$

Der Spaltenraum $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ der Matrix $B = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ besitzt ferner die Dimension

$$\dim V = \text{Rang } B = 3.$$

- 4.5 a) Es ist $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ der kleinste Unterraum von $\mathbb{R}^4$, der die vier Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

enthält; wir weisen nach, daß $U \subsetneq \mathbb{R}^4$ ein echter Unterraum von $\mathbb{R}^4$ ist. Sei dazu $A = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$. Wegen

$$\begin{aligned} (A|0) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{IV}-\text{II}]{\text{I}+\text{II}} \\ &\quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{IV}-3\text{III}]{\text{I}+4\text{III}, \text{II}+\text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -\lambda \\ -\lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$; damit sind

$$(-\lambda) \cdot v_1 + (-\lambda) \cdot v_2 + \lambda \cdot v_3 + \lambda \cdot v_4 = 0$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$ alle Darstellungen des Nullvektors 0 als Linearkombination von v_1, v_2, v_3, v_4 . Etwa für $\lambda = 1$ erhalten wir

$$-v_1 - v_2 + v_3 + v_4 = 0, \quad \text{also} \quad v_4 = v_1 + v_2 - v_3,$$

weswegen $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ bereits durch die drei Vektoren v_1, v_2, v_3 erzeugt wird; damit ist $\dim(U) \leq 3$, insbesondere also $U \subsetneq \mathbb{R}^4$. Genauer ergibt sich mit Hilfe der Matrix $A' = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ wegen

$$(A'|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

die lineare Unabhängigkeit der Vektoren v_1, v_2, v_3 ; damit bilden diese bereits eine Basis von U , und es ist $\dim(U) = 3$.

- b) Ein Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ liegt genau dann im Unterraum U , wenn er Linearkombination der Vektoren v_1, v_2, v_3 ist, also das lineare Gleichungssystem $A' \cdot x = b$

lösbar ist. Wegen

$$(A'|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & b_2 \\ 1 & 1 & 2 & b_3 \\ 0 & -1 & -2 & b_4 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}-\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & -1 & b_3 - b_1 \\ 0 & -1 & -2 & b_4 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{IV}-\text{II}} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & -1 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & -3 & b_4 - b_2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{IV}-3\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & -1 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 - b_2 - 3(b_3 - b_1) \end{array} \right)$$

ist

$$U = \{b \in \mathbb{R}^4 \mid 3b_1 - b_2 - 3b_3 + b_4 = 0\}.$$

4.6 a) Für die Hilfsmatrix $A_1 = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ gilt

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\frac{1}{2} \cdot \text{II}]{\text{III}-\text{I}} \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}-\text{I}, \text{IV}-\text{II}]{\text{I}+\text{II}} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

damit sind u_1, u_2 linear unabhängig mit $u_3 = 2 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2$. Folglich ist $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$, und u_1, u_2 ist eine Basis von U . Ferner ist W der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix

$$A_2 = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & 0 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{I} \leftrightarrow \text{II}]{\sim} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{I}+2\text{II}]{\sim} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \end{array} \right);$$

über die beiden freien Variablen x_3 und x_4 ergibt sich für W die Basis

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^4$ gilt

$$\begin{aligned} v \in U \cap W &\iff v \in U \text{ und } v \in W \\ &\iff v \in \langle u_1, u_2 \rangle \text{ und } A_2 \cdot v = 0; \end{aligned}$$

für $v \in \langle u_1, u_2 \rangle$ gibt es $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$v = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 \\ 2\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix},$$

und wegen

$$A_2 \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 \\ 2\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\lambda_2 - \lambda_1 \\ \lambda_1 - 9\lambda_2 \end{pmatrix}$$

gilt

$$A_2 \cdot v = 0 \iff \lambda_1 = 9 \lambda_2,$$

insgesamt also

$$v = \begin{pmatrix} 9 \lambda_2 - \lambda_2 \\ 2 \lambda_2 \\ 9 \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 \cdot v_0 \quad \text{mit} \quad v_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist $U \cap W = \mathbb{R} \cdot v_0$, und wegen $v_0 \neq 0$ ist v_0 eine Basis von $U \cap W$, also $\dim(U \cap W) = 1$; gemäß a) ist ferner $\dim U = 2$ und $\dim W = 2$, so daß sich mit Hilfe der Dimensionsformel für Unterräume dann

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$$

ergibt.

- c) Es ist $w_1 \notin U \cap W$, woraus wegen $w_1 \in W$ schon $w_1 \notin U = \langle u_1, u_2 \rangle$ folgt; damit sind aber u_1, u_2, w_1 drei linear unabhängige Vektoren in $U + W$, wegen $\dim(U + W) = 3$ also schon eine Basis von $U + W$.

4.7 Wir behandeln diese Aufgabe zunächst nur unter Rückgriff auf Erkenntnisse zur Lösbarkeit und dem Lösungsverhalten linearer Gleichungssysteme; dazu unterwerfen wir die erweiterte Koeffizientenmatrix von $A \cdot x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

elementaren Zeilenumformungen gemäß dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$\begin{aligned} (A \mid b) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & b_1 \\ 0 & 3 & 2 & b_2 \\ 1 & 0 & -1 & b_3 \\ 3 & 3 & -1 & b_4 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b_3 \\ 0 & 3 & 2 & b_2 \\ 2 & 3 & 0 & b_1 \\ 3 & 3 & -1 & b_4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{IV} - 3\text{I}]{\text{II} - 2\text{I}} \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b_3 \\ 0 & 3 & 2 & b_2 \\ 0 & 3 & 2 & b_1 - 2b_3 \\ 0 & 3 & 2 & b_4 - 3b_3 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{IV} - \text{II}]{\text{III} - \text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b_3 \\ 0 & 3 & 2 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 - 2b_3 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 - 3b_3 - b_2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

a) Wegen

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\text{Rang}(A) = 2$.

b) Das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ ist genau dann lösbar, wenn

$$b_1 - 2b_3 - b_2 = 0 \quad \text{und} \quad b_4 - 3b_3 - b_2 = 0$$

gilt, also $b \in \mathbb{R}^4$ Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

ist; damit ist aber diese Bedingung gleichwertig zu

$$b \in \underbrace{\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=w} + \underbrace{\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v} = \langle v, w \rangle = V.$$

c) Das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit der rechten Seite

$$b = s v + t w = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+t \\ s+3t \\ -t \\ s \end{pmatrix}$$

besitzt wegen

$$(A \mid b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -t \\ 0 & 3 & 2 & s+3t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{3} \cdot \text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -t \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{s}{3}+t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

die Lösungsmenge

$$L_{s,t} = \left\{ \begin{pmatrix} -t+\lambda \\ \frac{s}{3}+t-\frac{2}{3}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} -t \\ \frac{s}{3}+t \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ein alternativer Lösungsweg stützt sich auch auf Ergebnisse zur Struktur reeller Vektorräume und der Gestalt von Lösungsmengen inhomogener linearer Gleichungssysteme; dazu bezeichnen

$$s_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

die Spalten der Matrix A sowie $W = \langle s_1, s_2, s_3 \rangle$ den Spaltenraum von A .

a) Wegen

$$\begin{aligned} (A \mid 0) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{IV}-3\text{I}]{\text{II}-2\text{I}} \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{IV}-\text{II}]{\text{III}-\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

ist

$$L_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ -\frac{2}{3}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$. Damit ist

$$3 \cdot s_1 + (-2) \cdot s_2 + 3 \cdot s_3 = 0, \quad \text{also} \quad s_2 = \frac{3}{2} \cdot s_1 + \frac{3}{2} \cdot s_3,$$

und folglich $W = \langle s_1, s_3 \rangle$; offensichtlich sind s_1, s_3 linear unabhängig und demnach eine Basis von W . Man erhält $\text{Rang}(A) = \dim(W) = 2$.

b) Das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ ist genau dann lösbar, wenn $b \in W$ gilt; wir haben also $V = W$ zu zeigen:

„ $\subseteq$ “: Wegen $v = \frac{1}{3} \cdot s_2 \in W$ und $w = s_2 - s_1 \in W$ ist $V = \langle v, w \rangle \subseteq W$.

„ $\supseteq$ “: Wegen $s_1 = 3 \cdot v - w \in V$ und $s_3 = w - v \in V$ ist $W = \langle s_1, s_3 \rangle \subseteq V$.

c) Wegen

$$v = 0 \cdot s_1 + \frac{1}{3} \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 \quad \text{ist} \quad x_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = v$, und wegen

$$w = (-1) \cdot s_1 + 1 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 \quad \text{ist} \quad x_w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = w$; folglich ist aber $x_p = s \cdot x_v + t \cdot x_w$ wegen

$$A \cdot x_p = A \cdot (s \cdot x_v + t \cdot x_w) = s \cdot (A \cdot x_v) + t \cdot (A \cdot x_w) = s \cdot v + t \cdot w$$

eine Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = s \cdot v + t \cdot w$. Damit ist

$$L = x_p + L_0 = \begin{pmatrix} -t \\ \frac{s}{3} + t \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = s \cdot v + t \cdot w$.

4.8 a) Für ein Polynom $p \in \text{Pol}_2(\mathbb{R})$ vom $\text{Grad}(p) \leq 2$ ist

$$p(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \quad \text{mit} \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

und damit

$$\begin{aligned} p(1-X) &= a_0 + a_1(1-X) + a_2(1-X)^2 \\ &= a_0 + a_1(1-X) + a_2(1-2X+X^2) \\ &= a_0 + (a_1 - a_1X) + (a_2 - 2a_2X + a_2X^2) \\ &= (a_0 + a_1 + a_2) + (-a_1 - 2a_2)X + a_2X^2; \end{aligned}$$

damit ergibt sich durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} p \in U &\iff p(X) = p(1 - X) \iff \\ &a_0 + a_1 X + a_2 X^2 = (a_0 + a_1 + a_2) + (-a_1 - 2a_2) X + a_2 X^2 \\ &\iff a_0 = a_0 + a_1 + a_2 \text{ und } a_1 = -a_1 - 2a_2 \iff a_2 = -a_1. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} U &= \{a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } a_2 = -a_1\} \\ &= \{a_0 + a_1 X + (-a_1) X^2 \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot (X - X^2) \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle 1, X - X^2 \rangle \end{aligned}$$

der von den beiden Polynomen 1 und $X - X^2$ erzeugte Unterraum in $\text{Pol}_2(\mathbb{R})$; da aber 1 und $X - X^2$ keine skalaren Vielfachen voneinander sind, sind sie zudem linear unabhängig, insgesamt also eine Basis von U .

- b) Es ist $\text{Pol}_2(\mathbb{R}) = 3$, und wir können die beiden linear unabhängigen Polynome 1 und $X - X^2$ durch jedes $p \in \text{Pol}_2(\mathbb{R})$ mit $p \notin U$ zu einer Basis von $\text{Pol}_2(\mathbb{R})$ ergänzen; gemäß der in a) ermittelten Charakterisierung der Elemente von U ist etwa 1, $X - X^2$, X oder 1, $X - X^2$, X^2 eine Basis von $\text{Pol}_2(\mathbb{R})$.

4.9 Wir betrachten den $\mathbb{R}$ -Vektorraum V_0 aller Polynome mit reellen Koeffizienten vom Höchstgrad 3; für einen Vektor

$$v = a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \in V_0 \quad \text{sei} \quad p(v) = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

sein Koordinatenvektor bezüglich der Standardbasis $X^3, X^2, X, 1$. Damit ergibt sich für das Erzeugendensystem u_1, u_2, u_3 von U dann

$$p(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(u_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie für das Erzeugendensystem w_1, w_2 von W dann

$$p(w_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(w_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für $v \in V_0$ gilt damit

$$\begin{aligned} v \in U \cap W &\iff v \in \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \text{ und } v \in \langle w_1, w_2 \rangle \\ &\iff p(v) \in \langle p(u_1), p(u_2), p(u_3) \rangle \text{ und } p(v) \in \langle p(w_1), p(w_2) \rangle \\ &\iff \alpha_1 p(u_1) + \alpha_2 p(u_2) + \alpha_3 p(u_3) = p(v) = \beta_1 p(w_1) + \beta_2 p(w_2) \end{aligned}$$

mit geeigneten Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Dies führt über

$$\alpha_1 p(u_1) + \alpha_2 p(u_2) + \alpha_3 p(u_3) + \beta_1(-p(w_1)) + \beta_2(-p(w_2)) = 0$$

auf das homogene lineare Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix

$$(p(u_1), p(u_2), p(u_3), -p(w_1), -p(w_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}-\text{I}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV}-\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

und damit den Lösungen

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Folglich ist

$$v \in U \cap W \iff v = \lambda w_1 + \lambda w_2 = \lambda (X^3 + 1) \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

damit ist $U \cap W = \mathbb{R} \cdot (X^3 + 1)$, also $X^3 + 1$ eine Basis von $U \cap W$.

4.10 Wir betrachten die reellen 2×2 -Matrizen

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -v & w \end{pmatrix} = u \cdot E_{11} + v \cdot B + w \cdot E_{22}$$

für alle $u, v, w \in \mathbb{R}$ bilden E_{11}, B, E_{22} ein Erzeugendensystem von M ; wegen

$$u \cdot E_{11} + v \cdot B + w \cdot E_{22} = 0 \iff \begin{pmatrix} u & v \\ -v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff u = v = w = 0$$

für alle $u, v, w \in \mathbb{R}$ sind E_{11}, B, E_{22} ferner linear unabhängig und bilden damit sogar eine Basis von M . Wegen

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = x \cdot E_{11} + y \cdot E_{21}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ bilden E_{11}, E_{21} ein Erzeugendensystem von N ; wegen

$$x \cdot E_{11} + y \cdot E_{21} = 0 \iff \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff x = y = 0$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ sind E_{11}, E_{21} ferner linear unabhängig und bilden damit sogar eine Basis von N .

Für alle $A \in M \cap N$ gibt es $u, v, w, x, y \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -v & w \end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix},$$

woraus sich $u = x, v = 0, -v = y$ und $w = 0$, also auch $y = 0$, ergibt; es ist also $A = u \cdot E_{11}$. Wegen $E_{11} \in M \cap N$ ist demnach

$$M \cap N = \mathbb{R} \cdot E_{11}$$

sowie E_{11} eine Basis von $M \cap N$. Mit Hilfe des Dimensionssatzes erhält man damit

$$\dim(M + N) = \dim(M) + \dim(N) - \dim(M \cap N) = 3 + 2 - 1 = 4$$

und damit $M + N = \mathbb{R}^{2 \times 2}$; damit ist das Erzeugendensystem $E_{11}, E_{21}, E_{22}, B$ von $M + N$ bereits eine Basis von $M + N$.

4.11 a) Es ist

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \\ x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \end{pmatrix}$$

und

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_1 + x_2 \\ x_3 + x_4 & x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} A \cdot X = X \cdot A &\iff \begin{pmatrix} x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \\ x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_1 + x_2 \\ x_3 + x_4 & x_3 + x_4 \end{pmatrix} \iff \\ &\iff \begin{array}{rclcl} x_1 + x_3 & = & x_1 + x_2 & -x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_4 & = & x_1 + x_2 & -x_1 & + x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_3 & = & x_3 + x_4 & x_1 & - x_4 & = & 0 \\ x_2 + x_4 & = & x_3 + x_4 & x_2 - x_3 & & = & 0 \end{array} \iff \end{aligned}$$

Für die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix gilt

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

woraus sich der Lösungsraum

$$L_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \mu \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

der Dimension

$$\dim L_0 = 2$$

ergibt.

b) Gemäß a) gilt

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\},$$

und wir haben $C = \langle A, E_2 \rangle$ zu zeigen:

„ $\subseteq$ “: Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (\lambda - \mu) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mu A + (\lambda - \mu) E_2$$

und damit $C \subseteq \langle A, E_2 \rangle$.

„ $\supseteq$ “: Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\alpha A + \beta E_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & \alpha \\ \alpha & \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

und damit $\langle A, E_2 \rangle \subseteq C$.

4.12 a) Wir weisen anhand des Unterraumkriteriums nach, daß die Teilmenge

$$U = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid A^\top = A \text{ und } \text{Spur}(A) = 0\}$$

ein Unterraum des $\mathbb{R}$ -Vektorraums $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist:

- Wegen $0^\top = 0$ und $\text{Spur}(0) = 0$ ist $0 \in U$.
- Für alle $A, B \in U$ gilt $A^\top = A$ und $\text{Spur}(A) = 0$ sowie $B^\top = B$ und $\text{Spur}(B) = 0$. Dann gilt $(A + B)^\top = A^\top + B^\top = A + B$ und $\text{Spur}(A + B) = \text{Spur}(A) + \text{Spur}(B) = 0 + 0 = 0$, also ist $A + B \in U$.
- Für alle $A \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $A^\top = A$ und $\text{Spur}(A) = 0$; damit gilt $(\lambda \cdot A)^\top = \lambda \cdot A^\top = \lambda \cdot A$ und $\text{Spur}(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \text{Spur}(A) = \lambda \cdot 0 = 0$, also ist $\lambda \cdot A \in U$.

Insgesamt ist damit U ein Unterraum von $\mathbb{R}^{3 \times 3}$.

b) Für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gilt

$$\begin{aligned} A \in U &\iff A = A^\top \text{ und } \text{Spur}(A) = 0 \\ &\iff a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{23} = a_{32} \text{ und } a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0. \end{aligned}$$

Damit besteht U genau aus den Matrizen A der Gestalt

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & -a_{11} - a_{22} \end{pmatrix} &= a_{11} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=B_1} + a_{12} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=B_2} + \\ &+ a_{13} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=B_3} + a_{22} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=B_4} + a_{23} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=B_5}; \end{aligned}$$

damit bilden B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 aber ein Erzeugendensystem von U . Für alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \cdot B_1 + \lambda_2 \cdot B_2 + \lambda_3 \cdot B_3 + \lambda_4 \cdot B_4 + \lambda_5 \cdot B_5 = 0$ gilt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \lambda_3 & \lambda_5 & -\lambda_1 - \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$. Damit sind B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 linear unabhängig, insgesamt also eine Basis von U . Folglich ist $\dim(U) = 5$.

- c) Es ist $A_1 = B_1 - B_4 \in U$ und $A_2 = -B_2 + B_3 \in U$; für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2 = 0$ gilt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & -\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, damit sind A_1 und A_2 linear unabhängig. Wir zeigen nun, daß die Vektoren A_1, A_2, B_1, B_2, B_5 linear unabhängig sind, und damit wegen $\dim(U) = 5$ schon eine Basis von U sind. Für alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2 + \lambda_3 \cdot B_1 + \lambda_4 \cdot B_2 + \lambda_5 \cdot B_5 = 0$ gilt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 & -\lambda_2 + \lambda_4 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 + \lambda_4 & -\lambda_1 & \lambda_5 \\ \lambda_2 & \lambda_5 & -\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\lambda_1 + \lambda_3 = -\lambda_2 + \lambda_4 = \lambda_2 = -\lambda_1 = \lambda_5 = -\lambda_3 = 0$, und folglich $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$. Damit sind A_1, A_2, B_1, B_2, B_5 Basis von U .

- 4.13 a) Wir zeigen mit Hilfe des Unterraumkriteriums, daß die Menge

$$M = \{X \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid A \cdot X = (A \cdot X)^\top\}$$

ein Untervektorraum des Matrizenraums $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ und damit selbst ist ein reeller Vektorraum ist:

- Für die Nullmatrix $0 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gilt

$$A \cdot 0 = 0 = 0^\top = (A \cdot 0)^\top$$

und damit $0 \in M$.

- Für alle $X, Y \in M$ gilt $A \cdot X = (A \cdot X)^\top$ und $A \cdot Y = (A \cdot Y)^\top$, und es folgt

$$\begin{aligned} A \cdot (X + Y) &= A \cdot X + A \cdot Y = (A \cdot X)^\top + (A \cdot Y)^\top = \\ &= (A \cdot X + A \cdot Y)^\top = (A \cdot (X + Y))^\top \end{aligned}$$

und damit $X + Y \in M$.

- Für alle $X \in M$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $A \cdot X = (A \cdot X)^\top$, und es folgt

$$\begin{aligned} A \cdot (\lambda \cdot X) &= \lambda \cdot (A \cdot X) = \lambda \cdot (A \cdot X)^\top = \\ &= (\lambda \cdot (A \cdot X))^\top = (A \cdot (\lambda \cdot X))^\top \end{aligned}$$

und damit $\lambda \cdot X \in M$.

Des weiteren zeigen wir erneut mit dem Unterraumkriterium, daß die Menge

$$S = \{X \in M \mid X^\top = X\}$$

ist ein Untervektorraum von M ist:

- Wegen $0^\top = 0$ gilt $0 \in S$.
- Für alle $X, Y \in S$ gilt $X, Y \in M$ mit $X^\top = X$ und $Y^\top = Y$; damit gilt $X + Y \in M$ mit $(X + Y)^\top = X^\top + Y^\top = X + Y$ und damit $X + Y \in S$.
- Für alle $X \in S$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $X \in M$ mit $X^\top = X$; damit gilt $\lambda \cdot X \in M$ mit $(\lambda \cdot X)^\top = \lambda \cdot X^\top = \lambda \cdot X$ und damit $\lambda \cdot X \in S$.

b) Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und alle} \quad X = \begin{pmatrix} a & d_1 & d_2 \\ e_1 & b & d_3 \\ e_2 & e_3 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

gilt

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a + 4e_2 & d_1 + 4e_3 & d_2 + 4c \\ 5e_1 & 5b & 5d_3 \\ 3a + 2e_2 & 3d_1 + 2e_3 & 3d_2 + 2c \end{pmatrix},$$

so daß sich

$$X \in M \iff A \cdot X = (A \cdot X)^\top \iff \begin{cases} d_1 + 4e_3 = 5e_1 \\ d_2 + 4c = 3a + 2e_2 \\ 5d_3 = 3d_1 + 2e_3 \end{cases}$$

ergibt; dies führt auf das homogene lineare Gleichungssystem in den neun Unbekannten $e_1, e_2, e_3, a, b, c, d_1, d_2, d_3$ mit der Koeffizientenmatrix

$$C = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 9}$$

in Zeilenstufenform mit $\text{Rang}(C) = 3$, welches damit die sechs freien Variablen a, b, c, d_1, d_2, d_3 sowie die drei gebundenen Variablen e_1, e_2, e_3 besitzt. Folglich ergibt sich $\dim(M) = 6$.

c) Für eine Matrix $X \in M$ gilt

$$X \in S \iff X^\top = X \iff d_1 = e_1 \quad \text{und} \quad d_2 = e_2 \quad \text{und} \quad d_3 = e_3,$$

so daß die in b) ermittelten, die Matrizen X aus dem Untervektorraum M von $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ charakterisierenden Bedingungen zu

$$\begin{cases} e_1 + 4e_3 = 5e_1 \\ e_2 + 4c = 3a + 2e_2 \\ 5e_3 = 3e_1 + 2e_3 \end{cases} \iff \begin{cases} 4e_3 = 4e_1 \\ 4c = 3a + e_2 \\ 3e_3 = 3e_1 \end{cases}$$

und damit

$$e_1 = e_3 \quad \text{und} \quad e_2 = 4c - 3a$$

werden. Damit besteht der Untervektorraum S von $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ genau aus den Matrizen der Gestalt

$$X = \begin{pmatrix} a & e_1 & 4c - 3a \\ e_1 & b & e_1 \\ 4c - 3a & e_1 & c \end{pmatrix} = a \cdot B_1 + b \cdot B_2 + c \cdot B_3 + e_1 \cdot B_4$$

mit $a, b, c, e_1 \in \mathbb{R}$, wobei

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sowie

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bezeichnen; damit bilden B_1, B_2, B_3, B_4 ein Erzeugendensystem von S . Wegen

$$\begin{aligned} a \cdot B_1 + b \cdot B_2 + c \cdot B_3 + e_1 \cdot B_4 = 0 &\iff \\ \iff \begin{pmatrix} a & e_1 & 4c - 3a \\ e_1 & b & e_1 \\ 4c - 3a & e_1 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\iff \\ &\iff a = b = c = e_1 = 0 \end{aligned}$$

für alle $a, b, c, e_1 \in \mathbb{R}$ sind B_1, B_2, B_3, B_4 auch linear unabhängig und folglich eine Basis von S .

- 4.14 a) Die Dimensionsformel für Summe $W_1 + W_2$ und Durchschnitt $W_1 \cap W_2$ zweier Untervektorräume W_1 und W_2 eines reellen Vektorraums V lautet

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2.$$

- b) Für $V = \mathbb{R}^5$ und Untervektorräume W_1 und W_2 von V der Dimensionen $\dim W_1 = 3$ und $\dim W_2 = 3$ gilt wegen $W_1 \cap W_2 \subseteq W_1$ zum einen

$$\dim(W_1 \cap W_2) \leq \dim W_1 = 3$$

sowie wegen $W_1 + W_2 \subseteq \mathbb{R}^5$ zum anderen

$$\dim(W_1 + W_2) \leq \dim \mathbb{R}^5 = 5,$$

so daß sich unter Verwendung der Dimensionsformel dann

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \underbrace{\dim W_1}_{=3} + \underbrace{\dim W_2}_{=3} - \underbrace{\dim(W_1 + W_2)}_{\leq 5} \geq 3 + 3 - 5 = 1$$

ergibt. Zusammenfassend erhalten wir also

$$\dim(W_1 \cap W_2) \in \{1, 2, 3\}$$

und haben diese drei möglichen Werte noch zu belegen:

- Für $W_1 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ und $W_2 = \langle e_3, e_4, e_5 \rangle$ ist $W_1 \cap W_2 = \langle e_3 \rangle$ und damit $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$.
- Für $W_1 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ und $W_2 = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle$ ist $W_1 \cap W_2 = \langle e_2, e_3 \rangle$ und damit $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$.
- Für $W_1 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ und $W_2 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ ist $W_1 \cap W_2 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ und damit $\dim(W_1 \cap W_2) = 3$.

4.15 Sei V ein Vektorraum der Dimension $\dim(V) = 6$ sowie U und W Unterräume von V der Dimensionen $\dim(U) = 3$ und $\dim(W) = 4$. Wegen $U \cap W \subseteq U$ gilt zunächst

$$\dim(U \cap W) \leq \dim(U) = 3;$$

wegen $U + W \subseteq V$ ist

$$\dim(U + W) \leq \dim(V) = 6,$$

und unter Verwendung der Dimensionsformel ergibt sich dann

$$\dim(U \cap W) = \underbrace{\dim(U)}_{=3} + \underbrace{\dim(W)}_{=4} - \underbrace{\dim(U + W)}_{\leq 6} \geq 3 + 4 - 6 = 1.$$

Zusammenfassend erhalten wir also

$$\dim(U \cap W) \in \{1, 2, 3\}$$

und haben noch nachzuweisen, daß diese drei Möglichkeiten auch tatsächlich eintreten. Sei dazu $b_1, \dots, b_6$ eine Basis von V :

- Für $U = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ und $W = \langle b_3, b_4, b_5, b_6 \rangle$ ist $U \cap W = \langle b_3 \rangle$ und damit $\dim(U \cap W) = 1$.
- Für $U = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ und $W = \langle b_2, b_3, b_4, b_5 \rangle$ ist $U \cap W = \langle b_2, b_3 \rangle$ und damit $\dim(U \cap W) = 2$.
- Für $U = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ und $W = \langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle$ ist $U \cap W = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ und damit $\dim(U \cap W) = 3$.

4.16 Sei $U = \langle v, w \rangle$ der von den beiden Vektoren v und w erzeugte Unterraum von V ; da v und w als linear unabhängig vorausgesetzt sind, bilden sie sogar eine Basis von U . Für die Vektoren

$$x = \alpha \cdot v + \beta \cdot w \quad \text{und} \quad y = \beta \cdot v + \alpha \cdot w \in U$$

betrachten wir nun ihre Koordinatenvektoren $p(x)$ und $p(y)$ bezüglich der Basis v und w , es ist also

$$p(x) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p(y) = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Damit sind die Vektoren x und y genau dann linear abhängig, wenn ihre Koordinatenvektoren $p(x)$ und $p(y)$ linear abhängig sind; dies ist genau dann der Fall, wenn die Matrix

$$A = (p(x), p(y)) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

nicht invertierbar ist, also $\det(A) = 0$ gilt. Wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

sind die Vektoren x und y genau dann linear abhängig, wenn $\alpha - \beta = 0$, also $\alpha = \beta$, oder $\alpha + \beta = 0$, also $\alpha = -\beta$, gilt.

4.17 Für einen Vektor $v \in V$ betrachten wir seinen Koordinatenvektor $p(v) \in \mathbb{R}^4$ bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3, b_4 von V . Damit bilden die Vektoren

$$a_1 = b_1 + \beta_1 \cdot b_3, \quad a_2 = b_2 + \beta_2 \cdot b_4, \quad a_3 = \beta_3 \cdot b_1 + b_3, \quad a_4 = \beta_4 \cdot b_2 + b_4$$

genau dann eine Basis von V , wenn ihre Koordinatenvektoren

$$p(a_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(a_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \quad p(a_3) = \begin{pmatrix} \beta_3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(a_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden; dies ist aber genau dann der Fall, wenn die Matrix

$$A = (p(a_1), p(a_2), p(a_3), p(a_4)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_4 \\ \beta_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

invertierbar ist, also $\det(A) \neq 0$ gilt. Wegen

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_4 \\ \beta_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{III} - \beta_1 \text{I} \\ \text{IV} - \beta_2 \text{II} \end{matrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_4 \\ 0 & 0 & 1 - \beta_1 \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \beta_2 \beta_4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Dreiecks-} \\ \text{matrix} \end{matrix} (1 - \beta_1 \beta_3) (1 - \beta_2 \beta_4) \end{aligned}$$

sind also die Vektoren a_1, a_2, a_3, a_4 genau dann eine Basis von V , wenn

$$(1 - \beta_1 \beta_3) (1 - \beta_2 \beta_4) \neq 0$$

gilt.

4.18 Für einen Vektor $v \in V$ betrachten wir seinen Koordinatenvektor $p(v) \in \mathbb{R}^4$ bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3, b_4 von V , es ist also

$$p(a_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(a_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p(a_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p(x) = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Für die Hilfsmatrix $M = (p(a_1), p(a_2), p(a_3)) \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ und einen Spaltenvektor $z \in \mathbb{R}^4$ ergibt sich

$$(M|z) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & z_1 \\ -1 & 1 & 0 & z_2 \\ 0 & 1 & 1 & z_3 \\ 0 & 1 & -1 & z_4 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2} \cdot I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}z_1 \\ -1 & 1 & 0 & z_2 \\ 0 & 1 & 1 & z_3 \\ 0 & 1 & -1 & z_4 \end{array} \right) \xrightarrow{II+I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}z_1 \\ 0 & 1 & 0 & z_2 + \frac{1}{2}z_1 \\ 0 & 1 & 1 & z_3 \\ 0 & 1 & -1 & z_4 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{\substack{III-II \\ IV-II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}z_1 \\ 0 & 1 & 0 & z_2 + \frac{1}{2}z_1 \\ 0 & 0 & 1 & z_3 - z_2 - \frac{1}{2}z_1 \\ 0 & 0 & -1 & z_4 - z_2 - \frac{1}{2}z_1 \end{array} \right) \xrightarrow{IV+III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}z_1 \\ 0 & 1 & 0 & z_2 + \frac{1}{2}z_1 \\ 0 & 0 & 1 & z_3 - z_2 - \frac{1}{2}z_1 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 + z_3 - 2z_2 - z_1 \end{array} \right);$$

mit dieser Rechnung lassen sich nun alle drei Teilaufgaben bearbeiten.

- a) Das homogene lineare Gleichungssystem $(M|0)$, also mit $z = 0$, ist ohne freie Variable und besitzt demnach nur die triviale Lösung; folglich sind die Koordinatenvektoren $p(a_1)$, $p(a_2)$, $p(a_3)$ linear unabhängig, weswegen auch die Vektoren a_1 , a_2 , a_3 linear unabhängig sind. Gemäß der Definition von $U = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ sind a_1, a_2, a_3 auch ein Erzeugendensystem von U , insgesamt also eine Basis von U .
- b) Für $z = p(x) \in \mathbb{R}^4$ ergibt sich gemäß obiger Rechnung

$$(M | p(x)) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

damit ist das lineare Gleichungssystem $(M | p(x))$ lösbar, also $p(x)$ eine Linearkombination von $p(a_1)$, $p(a_2)$, $p(a_3)$, wobei deren Koeffizienten durch die Lösung gegeben werden. Wegen

$$p(x) = 3 \cdot p(a_1) + (-2) \cdot p(a_2) + 2 \cdot p(a_3)$$

ergibt sich entsprechend

$$x = 3 \cdot a_1 + (-2) \cdot a_2 + 2 \cdot a_3 \in \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = U,$$

und x besitzt bezüglich der Basis a_1, a_2, a_3 von U die Koordinaten $3, -2, 2$.

- c) Die gemäß a) linear unabhängigen Vektoren a_1, a_2, a_3 können mit jedem Vektor $a_4 \in V$ mit $a_4 \notin \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ zu einer Basis von V ergänzt werden; dies ist aber zu $p(a_4) \notin \langle p(a_1), p(a_2), p(a_3) \rangle$ gleichwertig. Gemäß obiger Rechnung ist also

$$p(a_4) = z \quad \text{mit} \quad z_4 + z_3 - 2z_2 - z_1 \neq 0$$

zu wählen; damit ist etwa $p(a_4) = e_1$ und damit $a_4 = b_1$ geeignet.

4.19 Es sei $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ der von den linear unabhängigen Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 aufgespannte Vektorraum sowie $p : V \rightarrow \mathbb{R}^4$ die bijektive lineare Abbildung, die

jedem Vektor $v \in V$ seinen Koordinatenvektor $p(v) \in \mathbb{R}^4$ bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3, v_4 zuordnet; damit ist also

$$p(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p(u_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$p(w_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p(w_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix $A = (p(u_1), p(u_2), p(u_3)) \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV}-\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit $\text{Rang}(A) = 3$; damit sind ihre Spalten $p(u_1), p(u_2), p(u_3)$ linear unabhängig. Folglich sind auch die Vektoren u_1, u_2, u_3 linear unabhängig und damit eine Basis des Unterraums $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$; somit ist $\dim(U) = 3$.

Offensichtlich sind $p(w_1), p(w_2)$ linear unabhängig; folglich sind auch die Vektoren w_1, w_2 linear unabhängig und damit eine Basis des Unterraums $W = \langle w_1, w_2 \rangle$, so daß man $\dim(W) = 2$ erhält.

Ferner liegt $v \in V$ genau dann im Durchschnitt $U \cap W$, wenn es $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot u_3}_{v \in U} = v = \underbrace{\mu_1 \cdot w_1 + \mu_2 \cdot w_2}_{v \in W},$$

also

$$\lambda_1 \cdot p(u_1) + \lambda_2 \cdot p(u_2) + \lambda_3 \cdot p(u_3) = p(v) = \mu_1 \cdot p(w_1) + \mu_2 \cdot p(w_2),$$

was auf das lineare Gleichungssystem $B \cdot x = 0$ mit der Koeffizientenmatrix

$$B = (p(u_1), p(u_2), p(u_3), -p(w_1), -p(w_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$$

führt. Wegen

$$\begin{aligned}
 (B|0) &= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \\
 &\xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{IV}-\text{III}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{IV} \cdot \frac{1}{2}} \\
 &\xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I}+\text{IV}, \text{II}-2\text{IV}, \text{III}+2\text{IV}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

ergeben sich die Lösungen

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \text{für ein } \alpha \in \mathbb{R};$$

damit erhält man

$$p(v) = \alpha \cdot p(u_1) - \alpha \cdot p(u_2) + 0 \cdot p(u_3) = \alpha \cdot p(w_1) + \alpha \cdot p(w_2) = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und folglich $v = \alpha \cdot (v_1 - v_3)$. Es ergibt sich also

$$U \cap W = \mathbb{R} \cdot (v_1 - v_3),$$

und wegen $v_1 - v_3 \neq 0$ bildet $v_1 - v_3$ schon eine Basis von $U \cap W$; damit ist aber $\dim(U \cap W) = 1$.

4.20 Es sei $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ der von den vier Vektoren

$$v_1 = a + b + c + d, \quad v_2 = b + c, \quad v_3 = c + d, \quad v_4 = a + b$$

aufgespannte Unterraum in einem reellen Vektorraum V ; dabei sind die Vektoren a, b, c, d als linear unabhängig vorausgesetzt. Wegen

$$v_1 = (a + b) + (c + d) = v_4 + v_3 \in \langle v_2, v_3, v_4 \rangle$$

wird der Unterraum U bereits durch die drei Vektoren v_2, v_3, v_4 erzeugt; zum Nachweis ihrer linearen Unabhängigkeit seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot v_2 + \lambda_2 \cdot v_3 + \lambda_3 \cdot v_4 = 0_V,$$

also

$$\lambda_1 \cdot (b + c) + \lambda_2 \cdot (c + d) + \lambda_3 \cdot (a + b) = 0_V$$

und damit

$$\lambda_3 \cdot a + (\lambda_1 + \lambda_3) \cdot b + (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot c + \lambda_2 \cdot d = 0_V.$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von a, b, c, d folgt daraus

$$\lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad \lambda_2 = 0,$$

insgesamt also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$; folglich sind v_2, v_3, v_4 auch linear unabhängig und somit eine Basis von U . Für die Dimension von U ergibt sich demnach $\dim(U) = 3$.

4.21 Für einen Vektor $v \in V$ betrachten wir seinen Koordinatenvektor $p(v) \in \mathbb{R}^4$ bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3, v_4 von V , also

$$p(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad p(u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(u_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und

$$p(w_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p(w_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad p(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Der Vektor $x \in V$ liegt genau dann in $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \subseteq V$, wenn sein Koordinatenvektor $p(x) \in \mathbb{R}^4$ in $\langle p(u_1), p(u_2), p(u_3) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ liegt. Wegen

$$\begin{aligned} (p(u_1), p(u_2), p(u_3) \mid p(x)) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}+\text{I}, \text{IV}+\text{I}]{\text{II}-\text{I}} \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}-\frac{3}{2}\text{II}]{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{IV}+\frac{3}{4}\text{III}]{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{array} \right) \end{aligned}$$

ist $p(x)$ nicht Linearkombination von $p(u_1), p(u_2), p(u_3)$, es ergibt sich also $p(x) \notin \langle p(u_1), p(u_2), p(u_3) \rangle$ und damit auch $x \notin \langle u_1, u_2, u_3 \rangle = U$.

- b) Der Vektor $v \in V$ genau dann im Durchschnitt $U \cap W$, wenn es $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot u_3}_{v \in U} = v = \underbrace{\mu_1 \cdot w_1 + \mu_2 \cdot w_2}_{v \in W},$$

also

$$\lambda_1 \cdot p(u_1) + \lambda_2 \cdot p(u_2) + \lambda_3 \cdot p(u_3) = p(v) = \mu_1 \cdot p(w_1) + \mu_2 \cdot p(w_2),$$

was auf das homogene lineare Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ mit der Koeffizientenmatrix $A = (p(u_1), p(u_2), p(u_3), -p(w_1), -p(w_2))$, also

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$$

führt. Wegen

$$\begin{aligned} (A|0) &= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}+\text{I}, \text{IV}+\text{I}]{\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[\frac{1}{2} \cdot \text{II}]{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}-3\text{II}]{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[-\frac{1}{4} \cdot \text{III}]{\sim} \\ &\xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{II}-\text{III}, \text{IV}-3\text{III}]{\text{I}+\text{III}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[2 \cdot \text{IV}]{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{II}+\frac{1}{2}\text{IV}, \text{III}+\frac{1}{2}\text{IV}]{\text{I}+\frac{1}{2}\text{IV}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

ergeben sich die Lösungen

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ 3\alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \quad \text{für ein } \alpha \in \mathbb{R};$$

damit erhält man

$$3\alpha \cdot p(u_1) + \alpha \cdot p(u_2) + \alpha \cdot p(u_3) = p(v) = 3\alpha \cdot p(w_1) + (-\alpha) \cdot p(w_2),$$

durch Einsetzen der Koordinatenvektoren also

$$p(v) = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und folglich $v = \alpha \cdot (2v_1 + 6v_2 + v_4)$. Es ergibt sich also

$$U \cap W = \mathbb{R} \cdot (2v_1 + 6v_2 + v_4),$$

und wegen $2v_1 + 6v_2 + v_4 \neq 0$ bildet $2v_1 + 6v_2 + v_4$ eine Basis von $U \cap W$.

- 4.22 a) Sei $U = \langle a, b, c \rangle \subseteq V$ der von den drei (nicht notwendigerweise linear unabhängigen) Vektoren a, b, c aufgespannte Unterraum des reellen Vektorraums V . Damit ist $U = \{0\}$ der Nullraum, oder es läßt sich nach dem Basisauswahlsatz aus dem Erzeugendensystem a, b, c von U eine Basis von U auswählen; auf jeden Fall gilt aber

$$d := \dim(U) \leq 3.$$

Da nun höchstens d Vektoren aus U linear unabhängig sein können, sind die vier Vektoren

$$\begin{aligned} v_1 &= a + b + c, & v_2 &= a + 2b + 3c, \\ v_3 &= 2a + 3b + c & \text{und} & & v_4 &= 3a + b + 2c, \end{aligned}$$

die als Linearkombinationen von a, b, c in U liegen, sicher linear abhängig.

- b) Sei $p : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ die bijektive Abbildung, die jedem Vektor $v \in V$ seinen Koordinatenvektor $p(v) \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis a, b, c von V zuordnet; damit ist

$$p(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad p(v_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit $A = (p(v_1), p(v_2), p(v_3)) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gilt

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (2 + 3 + 6) - (4 + 9 + 1) = -3 \neq 0;$$

damit sind die Koordinatenvektoren $p(v_1), p(v_2), p(v_3) \in \mathbb{R}^3$ und folglich auch die Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in V$ linear unabhängig.

Alternativ läßt sich die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in V$ auch gemäß der Definition, also ohne Rückgriff auf die Koordinatenvektoren $p(v_1), p(v_2), p(v_3) \in \mathbb{R}^3$ zeigen: seien dazu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0_V,$$

also

$$\lambda_1 \cdot (a + b + c) + \lambda_2 \cdot (a + 2b + 3c) + \lambda_3 \cdot (2a + 3b + c) = 0_V$$

und damit

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) \cdot a + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3) \cdot b + (\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3) \cdot c = 0_V.$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von a, b, c folgt daraus

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

damit $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ und $2\lambda_2 - \lambda_3 = 0$, also $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 0$ und somit auch $\lambda_1 = 0$. Damit sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.

4.23 Wir verwenden das Unterraumkriterium, wonach eine Teilmenge U eines Vektorraums V genau dann ein Untervektorraum (linearer Unterraum) von V ist, wenn die folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

- Es ist $U \neq \emptyset$; insbesondere muß $0_V \in U$ gelten.
- Für alle $u, w \in U$ gilt $u + w \in U$.
- Für alle $u \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda \cdot u \in U$.

Für die gegebenen Teilmengen im Vektorraum V der reellen Polynome gilt:

- Die Teilmenge

$$U_1 = \{P \in V \mid P(x) = ax^2 + bx + c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

aller reellen Polynome P mit $\text{Grad}(P) \leq 2$ enthält das Nullpolynom

$$P_0 \equiv 0, \quad \text{also} \quad P_0(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{mit} \quad a = b = c = 0;$$

ferner gilt für alle P und $Q \in U_1$ mit

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{und} \quad Q(x) = a'x^2 + b'x + c'$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a', b', c' \in \mathbb{R}$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ zum einen

$$\begin{aligned} (P + Q)(x) &= P(x) + Q(x) \\ &= (ax^2 + bx + c) + (a'x^2 + b'x + c') \\ &= (ax^2 + a'x^2) + (bx + b'x) + (c + c') \\ &= (a + a')x^2 + (b + b')x + (c + c') \end{aligned}$$

mit $a + a', b + b', c + c' \in \mathbb{R}$, also $P + Q \in U_1$, und zum anderen

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot P)(x) &= \lambda \cdot P(x) \\ &= \lambda \cdot (ax^2 + bx + c) \\ &= \lambda \cdot (ax^2) + \lambda \cdot (bx) + \lambda \cdot c \\ &= (\lambda \cdot a)x^2 + (\lambda \cdot b)x + (\lambda \cdot c) \end{aligned}$$

mit $\lambda \cdot a, \lambda \cdot b, \lambda \cdot c \in \mathbb{R}$, also $\lambda \cdot P \in U_1$. Damit ist U_1 ein Unterraum von V .

- Die Teilmenge

$$U_2 = \{P \in V \mid P(x) = ax^2 + bx \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}\}$$

aller reellen Polynome P mit $\text{Grad}(P) \leq 2$ und konstantem Glied $c = 0$ enthält das Nullpolynom

$$P_0 \equiv 0, \quad \text{also} \quad P_0(x) = ax^2 + bx \quad \text{mit} \quad a = b = 0;$$

ferner gilt für alle P und $Q \in U_2$ mit

$$P(x) = ax^2 + bx \quad \text{und} \quad Q(x) = a'x^2 + b'x$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a', b' \in \mathbb{R}$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ zum einen

$$\begin{aligned}(P+Q)(x) &= P(x) + Q(x) \\ &= (ax^2 + bx) + (a'x^2 + b'x) \\ &= (ax^2 + a'x^2) + (bx + b'x) \\ &= (a+a')x^2 + (b+b')x\end{aligned}$$

mit $a+a', b+b' \in \mathbb{R}$, also $P+Q \in U_2$, und zum anderen

$$\begin{aligned}(\lambda \cdot P)(x) &= \lambda \cdot P(x) \\ &= \lambda \cdot (ax^2 + bx) \\ &= \lambda \cdot (ax^2) + \lambda \cdot (bx) \\ &= (\lambda \cdot a)x^2 + (\lambda \cdot b)x\end{aligned}$$

mit $\lambda \cdot a, \lambda \cdot b \in \mathbb{R}$, also $\lambda \cdot P \in U_2$. Damit ist U_2 ein Unterraum von V .

- Die Teilmenge

$$U_3 = \{P \in V \mid P(x) \equiv 0 \text{ oder } \text{Grad}(P) \geq 2\}$$

enthält neben dem Nullpolynom $P_0 \equiv 0$ alle reellen Polynome P vom $\text{Grad}(P) \geq 2$, insbesondere also auch die beiden Polynome P_1 und P_2 mit

$$P_1(x) = -x^2 + x \quad \text{und} \quad P_2(x) = x^2 + 1,$$

wegen

$$(P_1 + P_2)(x) = P_1(x) + P_2(x) = (-x^2 + x) + (x^2 + 1) = x + 1$$

mit $\text{Grad}(P_1 + P_2) = 1$ aber nicht deren Summe $P_1 + P_2$. Damit ist U_3 kein Unterraum von V .

- Die Teilmenge

$$U_4 = \{P \in V \mid P(x) = ax^2 + bx + c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ und } c \neq 0\}$$

aller reellen Polynome P mit $\text{Grad}(P) \leq 2$ und konstantem Glied $c \neq 0$ enthält insbesondere nicht das Nullpolynom P_0 mit $P_0 \equiv 0$. Damit ist U_4 kein Unterraum von V .

4.24 Es seien $s_1, \dots, s_n$ die Spalten der gegebenen Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$; damit ist

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid M \cdot x = 0\}$$

sowie

$$S = \langle s_1, \dots, s_n \rangle = \{M \cdot x \mid x \in \mathbb{R}^n\}.$$

- a) Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ erhält man mit $x = v - M \cdot v \in \mathbb{R}^n$ dann

$$\begin{aligned}M \cdot x &= M \cdot (v - M \cdot v) = M \cdot v - M \cdot (M \cdot v) = \\ &= M \cdot v - M^2 \cdot v \stackrel{M^2=M}{=} M \cdot v - M \cdot v = 0\end{aligned}$$

und damit $x = v - M \cdot v \in U$.

b) Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$v = \underbrace{(v - M \cdot v)}_{\in U} + \underbrace{M \cdot v}_{\in S},$$

weswegen $\mathbb{R}^n = U + S$ zunächst die Summe von U und S ist. Damit gilt

$$\dim(U + S) = \dim(\mathbb{R}^n) = n,$$

und wegen

$$\dim U = n - \text{Rang}(M) \quad \text{und} \quad \dim S = \text{Rang}(M)$$

ergibt sich ferner mit Hilfe der Dimensionsformel

$$\begin{aligned} \dim(U \cap S) &= \dim U + \dim S - \dim(U + S) = \\ &= (n - \text{Rang}(M)) + \text{Rang}(M) - n = 0, \end{aligned}$$

also $U \cap S = \{0\}$, weswegen $\mathbb{R}^n = U \oplus S$ sogar die direkte Summe von U und S ist.