

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2012): Lineare Algebra und analytische Geometrie 3 — Lösungsvorschlag —

3.1 Mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen sowie der Tatsache, daß sich die Determinante einer Dreiecksmatrix als Produkt ihrer Hauptdiagonalelemente errechnet, ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{2 aus II, 3 aus III, 4 aus IV, 5 aus V} \\ \\ \\ \end{array} \\
 &= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{II-I, III-I, IV-I, V-I} \\ \\ \\ \end{array} \\
 &= 120 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{(((I+II)+III)+IV)+V} \\ \\ \end{array} \\
 &= 120 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Dreiecks-} \\ \text{matrix} \\ \\ \end{array} \\
 &= 120 \cdot 4 \cdot (-1)^4 = 480.
 \end{aligned}$$

3.2 a) Es ist

- $A_1 = (-1)$, also $\det(A_1) = -1$,
- $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, also $\det(A_2) = 1 - 1 = 0$, sowie
- $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, also $\det(A_3) = -1 + 0 + 0 - (0 - 1 - 1) = 1$.

b) Für $n \geq 4$ erhalten wir mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes

$$\begin{aligned}
 \det(A_n) &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & A_{n-2} & \\ \vdots & \vdots & & & \end{vmatrix} \stackrel{\text{1. Zeile}}{=} \\
 &= (-1)^{1+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & & & \\ 0 & & A_{n-2} & \\ \vdots & & & \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & & & \\ 0 & & A_{n-2} & \\ \vdots & & & \end{vmatrix} = \\
 &= -\det(A_{n-1}) - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & & & \\ 0 & & A_{n-2} & \\ \vdots & & & \end{vmatrix} \stackrel{\text{1. Spalte}}{=} -\det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2}).
 \end{aligned}$$

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt

$$\det(A_n) = -\det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2})$$

und analog

$$\det(A_{n-1}) = -\det(A_{n-2}) - \det(A_{n-3}),$$

woraus $\det(A_n) = \det(A_{n-3})$ folgt. Damit ergibt sich für alle $k \in \mathbb{N}$

- $\det(A_{3k+1}) = \det(A_1) = -1$,
- $\det(A_{3k+2}) = \det(A_2) = 0$ sowie
- $\det(A_{3k+3}) = \det(A_3) = 1$.

3.3 a) Für die gegebene Matrix

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

erhalten wir für $n > 2$ mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes

$$\det(T_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & \vdots & \vdots \\ & & & \vdots & \vdots \\ & T_{n-2} & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{\substack{n\text{-te} \\ \text{Zeile}}}{=} & (-1)^{n+(n-1)} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} & & \vdots \\ & T_{n-2} & \vdots \\ & & 0 \\ \dots & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} + \\
& & + (-1)^{n+n} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} & & \vdots \\ & T_{n-2} & \vdots \\ & & 1 \\ \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
= & (-1)^{2n-1} \cdot \begin{vmatrix} & & \vdots \\ & T_{n-2} & \vdots \\ & & 0 \\ \dots & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2n} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} & & \vdots \\ & T_{n-2} & \vdots \\ & & 1 \\ \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
= & - \begin{vmatrix} & & \vdots \\ & T_{n-2} & \vdots \\ & & 0 \\ \dots & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \det(T_{n-1}) \\
& \stackrel{\substack{(n-1)\text{-te} \\ \text{Spalte}}}{=} & -(-1)^{(n-1)+(n-1)} \cdot 1 \cdot \det(T_{n-2}) + 2 \cdot \det(T_{n-1}) \\
= & -(-1)^{2n-2} \cdot \det(T_{n-2}) + 2 \cdot \det(T_{n-1}) \\
= & 2 \cdot \det(T_{n-1}) - \det(T_{n-2}).
\end{aligned}$$

b) Für den Induktionsanfang ergibt sich bei „ $n = 1$ “

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \quad \text{und damit} \quad \det(T_1) = 1,$$

und für „ $n = 2$ “

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und damit} \quad \det(T_2) = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1;$$

für den Induktionsschritt „ $n - 1 \rightarrow n$ “ erhält man unter Verwendung von a)

$$\det(T_n) = 2 \cdot \det(T_{n-1}) - \det(T_{n-2}) = 2 \cdot 1 - 1 = 1.$$

3.4 Für die in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \alpha \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
(M_\alpha \mid E_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
&\stackrel{\sim}{\underset{\text{I} \leftrightarrow \text{II}}{=}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
&\stackrel{\sim}{\underset{\text{III} - 2\text{I}}{=}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \\
&\stackrel{\sim}{\underset{\text{II} - \alpha \text{III}}{=}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \\
&\stackrel{\sim}{\underset{\text{I} + 2\text{II}}{=}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 2 & 1 + 4\alpha & -2\alpha \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \\
&\stackrel{\sim}{\underset{\substack{(-1) \cdot \text{I} \\ (-1) \cdot \text{II}}}{=}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 - 4\alpha & 2\alpha \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) = (E_3 \mid M'_\alpha);
\end{aligned}$$

damit ist M_α invertierbar, und für ihre Inverse gilt

$$M_\alpha^{-1} = M'_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & -1 - 4\alpha & 2\alpha \\ -1 & -2\alpha & \alpha \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Alternativ läßt sich die Invertierbarkeit der Matrix M_α mit Hilfe ihrer Determinante nachweisen und ihre Inverse M_α^{-1} über die zu M_α komplementäre Matrix $\widetilde{M}_\alpha$ berechnen: wegen

$$\det(M_\alpha) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & \alpha \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Sarrus}}{=} (0 + 0 - 4\alpha) - (-4\alpha + 0 + 1) = -1 \neq 0$$

ist die Matrix M_α für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ invertierbar, und es gilt

$$\begin{aligned}
M_\alpha^{-1} &= \frac{1}{\det(M_\alpha)} \cdot \widetilde{M}_\alpha = \\
&= \frac{1}{\det(M_\alpha)} \cdot \begin{pmatrix} +\det(M'_{11}) & -\det(M'_{21}) & +\det(M'_{31}) \\ -\det(M'_{12}) & +\det(M'_{22}) & -\det(M'_{32}) \\ +\det(M'_{13}) & -\det(M'_{23}) & +\det(M'_{33}) \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 + 4\alpha & -2\alpha \\ 1 & 2\alpha & -\alpha \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 - 4\alpha & 2\alpha \\ -1 & -2\alpha & \alpha \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3.5 Für die in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
 (M_\alpha \mid E_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 &\stackrel{\text{II-I}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 &\stackrel{\text{III-II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Damit enthält die zur gegebenen Matrix M_α zeilenäquivalente Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

für $\alpha = 0$ in der ersten Zeile eine Nullzeile sowie für $\alpha = 1$ in der zweiten und dritten Zeile jeweils eine Nullzeile und ist damit in diesen Fällen insbesondere nicht invertierbar; folglich ist aber auch M_α für $\alpha \in \{0, 1\}$ nicht invertierbar.

Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ergibt sich ferner

$$\begin{aligned}
 (M_\alpha \mid E_3) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \\
 &\stackrel{\frac{1}{\alpha} \cdot \text{I}, \frac{1}{1-\alpha} \cdot \text{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{\alpha-1} & -\frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{array} \right) \\
 &\stackrel{\frac{1}{\alpha-1} \cdot \text{III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{\alpha-1} & -\frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{array} \right) \\
 &\stackrel{\text{I-II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\alpha-1} & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{array} \right) \\
 &\stackrel{\text{II-III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\alpha-1} & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{array} \right) = (E_3 \mid M'_\alpha);
 \end{aligned}$$

damit ist M_α invertierbar, und für ihre Inverse gilt

$$M_\alpha^{-1} = M'_\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ \frac{1}{\alpha-1} & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Alternativ läßt sich die Invertierbarkeit der Matrix M_α mit Hilfe ihrer Determinante überprüfen und gegebenenfalls ihre Inverse M_α^{-1} über die zu M_α komplementäre Matrix $\widetilde{M}_\alpha$ berechnen: wegen

$$\begin{aligned}
 \det(M_\alpha) &= \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \end{vmatrix} \stackrel{\text{Sarrus}}{=} (\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2) - (\alpha^2 + \alpha + \alpha^3) = \\
 &= 2\alpha^2 - \alpha - \alpha^3 = -\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1) = -\alpha(\alpha - 1)^2
 \end{aligned}$$

ist die Matrix M_α genau dann invertierbar, wenn

$$\det(M_\alpha) = -\alpha(\alpha-1)^2 \neq 0, \quad \text{also} \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\},$$

gilt, und in diesem Fall ergibt sich

$$\begin{aligned} M_\alpha^{-1} &= \frac{1}{\det(M_\alpha)} \cdot \widetilde{M}_\alpha \\ &= \frac{1}{\det(M_\alpha)} \cdot \begin{pmatrix} +\det(M'_{11}) & -\det(M'_{21}) & +\det(M'_{31}) \\ -\det(M'_{12}) & +\det(M'_{22}) & -\det(M'_{32}) \\ +\det(M'_{13}) & -\det(M'_{23}) & +\det(M'_{33}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-\alpha(\alpha-1)^2} \cdot \begin{pmatrix} \alpha-1 & -\alpha(\alpha-1) & 0 \\ -\alpha(\alpha-1) & 0 & \alpha(\alpha-1) \\ 0 & \alpha(\alpha-1) & -\alpha(\alpha-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ \frac{1}{\alpha-1} & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- 3.6 a) Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (hier für $n = 3$) ist genau dann invertierbar, wenn für ihre Determinante $\det(M) \neq 0$ gilt. Wegen

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & s \\ 0 & 1-s & 0 \\ s & s & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{2. Zeile}}{=} (1-s) \cdot \begin{vmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (1-s) \cdot (1-s^2) = (1-s)^2 \cdot (1+s) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \det(B) &= \begin{vmatrix} -s & s & -1 \\ 0 & -1 & s \\ s^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\text{3. Zeile}}{=} s^2 \cdot \begin{vmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{vmatrix} = \\ &= s^2 \cdot (s^2 - 1) = s^2 \cdot (s-1) \cdot (s+1) \end{aligned}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ ist

- die Matrix A genau dann invertierbar, wenn $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ gilt, sowie
 - die Matrix B genau dann invertierbar, wenn $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ gilt.
- b) Für $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ sind gemäß a) die beiden Matrizen A und B invertierbar; folglich ist auch ihr Matrixprodukt $A \cdot B$ invertierbar und besitzt damit vollen Rang. In diesem Fall ist also $\text{Rang}(A \cdot B) = 3$, und für die verbleibenden Fälle ergibt sich:

- Für $s = -1$ ist

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2} \cdot \text{I}]{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} - 2\text{I}]{\text{II} + 2\text{I}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit $\text{Rang}(A \cdot B) = 1$.

- Für $s = 0$ ist

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II} \rightarrow \text{I}]{} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-1) \cdot \text{I}]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit $\text{Rang}(A \cdot B) = 2$.

- Für $s = 1$ ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit $\text{Rang}(A \cdot B) = 0$.

3.7 Es ist

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & -a \\ a+b & a+b & 2a \end{vmatrix} \stackrel{\text{III} \rightarrow \text{I}}{=} \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & -a \\ b & a & 2a-b \end{vmatrix} \stackrel{\text{III} \rightarrow \text{II}}{=} \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & -a \\ 0 & 0 & 3a-b \end{vmatrix} \stackrel{\text{3. Zeile}}{=} \\ &= (-1)^{3+3} \cdot (3a-b) \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = (3a-b) \cdot (a \cdot a - b \cdot b) = (a^2 - b^2)(3a-b); \end{aligned}$$

die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ besitzt nun genau dann den vollen Rang 3, wenn sie invertierbar ist, also genau im Falle $\det(A) \neq 0$, und es gilt

$$\begin{aligned} \det(A) \neq 0 &\iff (a^2 - b^2)(3a-b) \neq 0 \iff \\ &\iff a^2 - b^2 \neq 0 \quad \text{und} \quad 3a-b \neq 0 \iff a^2 \neq b^2 \quad \text{und} \quad b \neq 3a. \end{aligned}$$

3.8 a) Die in Abhängigkeit von $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ gegebene Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

besitzt unter der Voraussetzung $a + b + c = 0$ die Determinante

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} \stackrel{(\text{III}+\text{I})+\text{II}}{=} \begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} = \\ &\stackrel{a+b+c \text{ aus III}}{=} \underbrace{(a+b+c)}_{=0} \cdot \begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

und ist folglich nicht invertierbar.

b) Für $a = 0$ ergibt sich mit Hilfe der Regel von Sarrus

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ b & 0 & c \\ c & b & 0 \end{vmatrix} = (0 + c^3 + b^3) - (0 + 0 + 0) = b^3 + c^3;$$

da A als nicht invertierbar vorausgesetzt ist, gilt $\det(A) = 0$, also $b^3 + c^3 = 0$, woraus sich $b^3 = -c^3 = (-c)^3$ und damit $b = -c$, also $b + c = 0$ ergibt. Mit $a = 0$ ist demnach $a + b + c = 0$.

c) Für $a = b = c = 1$ ergibt sich die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

die wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (1 + 1 + 1) - (1 + 1 + 1) = 0$$

nicht invertierbar ist; es ist aber $a + b + c = 3 \neq 0$. Damit kann in b) auf die Voraussetzung $a = 0$ nicht verzichtet werden.

3.9 Wir bearbeiten zunächst die beiden Teilaufgaben a) und b) unter Verwendung der Determinante $\det(M)$ von M und der zu M komplementären Matrix $\widetilde{M}$:

a) Für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \det(M) &= \begin{vmatrix} 1 & s & s^2 \\ s^2 & 1 & s \\ s & s^2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} \\ &= ((1^3 + s^3 + (s^2)^3) - (s^2 \cdot 1 \cdot s + 1 \cdot s \cdot s^2 + s \cdot s^2 \cdot 1)) = \\ &= 1 + s^3 + s^6 - 3s^3 = 1 - 2s^3 + (s^3)^2 = (1 - s^3)^2. \end{aligned}$$

Die Matrix M ist genau dann invertierbar, wenn $\det(M) \neq 0$ ist; dies ist wegen

$$\det(M) = 0 \iff (1 - s^3)^2 = 0 \iff s^3 = 1 \iff s = 1$$

genau für $s \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ der Fall.

b) Für alle $s \in \mathbb{R}$ ergibt sich für die zu M komplementäre Matrix

$$\begin{aligned} \widetilde{M} &= \begin{pmatrix} +\det(M'_{11}) & -\det(M'_{21}) & +\det(M'_{31}) \\ -\det(M'_{12}) & +\det(M'_{22}) & -\det(M'_{32}) \\ +\det(M'_{13}) & -\det(M'_{23}) & +\det(M'_{33}) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 - s^3 & -s(1 - s^3) & 0 \\ 0 & 1 - s^3 & -s(1 - s^3) \\ -s(1 - s^3) & 0 & 1 - s^3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

so daß wir für alle $s \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ die zu M inverse Matrix

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \frac{1}{\det(M)} \cdot \widetilde{M} = \\ &= \frac{1}{(1-s^3)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1-s^3 & -s(1-s^3) & 0 \\ 0 & 1-s^3 & -s(1-s^3) \\ -s(1-s^3) & 0 & 1-s^3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{1-s^3} \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ 0 & 1 & -s \\ -s & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

erhalten.

Alternativ lassen sich die Teilaufgaben a) und b) auch mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen lösen: Es ist

$$(M|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & s & s^2 & 1 & 0 & 0 \\ s^2 & 1 & s & 0 & 1 & 0 \\ s & s^2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{II} - s^2 \cdot \text{I} \\ \text{III} - s \cdot \text{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & s & s^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-s^3 & s-s^4 & -s^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-s^3 & -s & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Damit ist für $s = 1$ die Matrix M zur Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ zeilenäquivalent und folglich nicht invertierbar. Für $s \neq 1$ ist $1-s^3 \neq 0$, und man erhält

$$\begin{aligned} (M|E_3) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & s & s^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-s^3 & s(1-s^3) & -s^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-s^3 & -s & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{II} \cdot \frac{1}{1-s^3} \\ \text{IV} \cdot \frac{1}{1-s^3} \end{array} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & s & s^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s & -\frac{s^2}{1-s^3} & \frac{1}{1-s^3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{s}{1-s^3} & 0 & \frac{1}{1-s^3} \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \text{I} - s \cdot \text{II} \end{array} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-s^3} & -\frac{s}{1-s^3} & 0 \\ 0 & 1 & s & -\frac{s^2}{1-s^3} & \frac{1}{1-s^3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{s}{1-s^3} & 0 & \frac{1}{1-s^3} \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \text{II} - s \cdot \text{III} \end{array} \\ &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-s^3} & -\frac{s}{1-s^3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-s^3} & -\frac{s}{1-s^3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{s}{1-s^3} & 0 & \frac{1}{1-s^3} \end{array} \right) = (E_3|M') \end{aligned}$$

Damit ist M invertierbar mit

$$M^{-1} = M' = \frac{1}{1-s^3} \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ 0 & 1 & -s \\ -s & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Bearbeitung für die Teilaufgabe c) ist unabhängig von dem für die beiden Teilaufgaben a) und b) gewählten Lösungsweg.

- c) Für $s \neq 1$ ist M nach a) invertierbar; damit besitzt das lineare Gleichungssystem $M \cdot x = b$ mit $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ genau eine Lösung, nämlich

$$\begin{aligned} x = M^{-1} \cdot b &= \frac{1}{1-s^3} \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ 0 & 1 & -s \\ -s & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{1-s^3} \begin{pmatrix} 1-s \\ 1-s \\ 1-s \end{pmatrix} = \frac{1-s}{1-s^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+s+s^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für $s = 1$ gilt

$$(M|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Damit ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1-\lambda-\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge des durch $(M|b)$ gegebenen linearen Gleichungssystems.

- 3.10 a) Für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \det(M) &= \begin{vmatrix} 1 & s & s^2 \\ s & 1 & s \\ s^2 & s & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} \\ &= ((1^3 + s \cdot s \cdot s^2 + s^2 \cdot s \cdot s) - (s^2 \cdot 1 \cdot s^2 + 1 \cdot s \cdot s + s \cdot s \cdot 1)) = \\ &= (1 + s^4 + s^4) - (s^4 + s^2 + s^2) = 1 - 2s^2 + s^4 = (1 - s^2)^2. \end{aligned}$$

- b) Die Matrix M_s ist genau dann invertierbar, wenn $\det(M) \neq 0$ ist; dies ist wegen

$$\det(M) = 0 \iff (1 - s^2)^2 = 0 \iff s^2 = 1 \iff s = \pm 1$$

genau für $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ der Fall. Für alle $s \in \mathbb{R}$ ergibt sich für die zu M_s komplementäre Matrix

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_s &= \begin{pmatrix} +\det(M'_{11}) & -\det(M'_{21}) & +\det(M'_{31}) \\ -\det(M'_{12}) & +\det(M'_{22}) & -\det(M'_{32}) \\ +\det(M'_{13}) & -\det(M'_{23}) & +\det(M'_{33}) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1-s^2 & -s(1-s^2) & 0 \\ -s(1-s^2) & 1-s^4 & -s(1-s^2) \\ 0 & -s(1-s^2) & 1-s^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

so daß wir für alle $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ die zu M_s inverse Matrix

$$\begin{aligned} M_s^{-1} &= \frac{1}{\det(M_s)} \cdot \widetilde{M}_s = \\ &= \frac{1}{(1-s^2)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1-s^2 & -s(1-s^2) & 0 \\ -s(1-s^2) & 1-s^4 & -s(1-s^2) \\ 0 & -s(1-s^2) & 1-s^2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{1-s^2} \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ -s & 1+s^2 & -s \\ 0 & -s & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

erhalten.

- c) Nach dem Kriterium von Hurwitz ist die symmetrische Matrix M_s genau dann positiv definit, wenn ihre drei Hauptminoren

$$\det(1) = 1, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{pmatrix} = 1-s^2 \quad \text{und} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 \\ s & 1 & s \\ s^2 & s & 1 \end{pmatrix} = (1-s^2)^2$$

positiv sind; dies ist aber genau im Falle $1-s^2 > 0$, also für $s \in]-1; 1[$.

- 3.11 a) Es ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} D \cdot E_2 - S \cdot A + A^2 &= \\ &= (ad-bc) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - (a+d) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} ad-bc-a^2-ad+a^2+bc & -ab-bd+ab+bd \\ -ac-cd+ac+cd & ad-bc-ad-d^2+bc+d^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

- b) Für „ $\Leftarrow$ “ gilt im Falle $S = 0$ und $D = -1$ mit Hilfe von a)

$$0 = D \cdot E_2 - S \cdot A + A^2 = -E_2 + A^2, \quad \text{also} \quad A^2 = E_2,$$

und im Falle $b = c = 0$ und $a^2 = d^2 = 1$ gemäß der Rechnung von a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2.$$

Für „ $\Rightarrow$ “ wird $A^2 = E_2$ vorausgesetzt; im Falle $S = 0$ ergibt sich mit Hilfe von a)

$$0 = D \cdot E_2 - S \cdot A + A^2 = D \cdot E_2 + E_2 = (D+1) \cdot E_2, \quad \text{also} \quad D = -1,$$

und im Falle $S = a + d \neq 0$ erhält man gemäß der Rechnung von a)

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also zunächst $b = c = 0$ in der Nebendiagonale und danach $a^2 = d^2 = 1$ in der Hauptdiagonale.

- 3.12 a) Aufgrund ihrer Symmetrie ist die Matrix $B \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ orthogonal diagonalisierbar. Wegen

$$B - (-1)E_4 = B + E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\text{Rang}(B + E_4) = 1$; damit ist $\lambda_1 = -1$ ein Eigenwert von B der Vielfachheit 3, und die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis von $E = \text{Eig}(B; \lambda_1)$.

- b) Wegen $E = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ ist $E^\perp = \mathbb{R} \cdot n$ mit $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wegen

$$B \cdot n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot n$$

ist n ein Eigenvektor von B zum Eigenwert $\lambda_2 = 3$. Insgesamt besitzt also B den dreifachen Eigenwert $\lambda_1 = -1$ sowie den einfachen Eigenwert $\lambda_2 = 3$, so daß sich für das charakteristische Polynom

$$\chi_B(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^3 (\lambda - \lambda_2) = (\lambda + 1)^3 (\lambda - 3)$$

ergibt.

- c) Für $b = 0$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a^4;$$

und für $b \neq 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} &= b^4 \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{a}{b} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{a}{b} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{a}{b} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \frac{a}{b} \end{pmatrix} = b^4 \cdot \chi_B \left(-\frac{a}{b} \right) = \\ &= b^4 \left(-\frac{a}{b} + 1 \right)^3 \left(-\frac{a}{b} - 3 \right) = (-a + b)^3 (-a - 3b) = (a - b)^3 (a + 3b). \end{aligned}$$

Damit gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$

$$\det \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} = (a - b)^3 (a + 3b).$$

3.13 Eine Matrix $A = (s_1, s_2, s_3, s_4) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ist genau dann orthogonal, wenn ihre Spalten s_1, s_2, s_3, s_4 eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$ bezüglich des Standardskalarprodukts $\circ$ bilden; folglich sind die Matrizen A_1 und A_2 orthogonal, die Matrizen A_3 und A_4 wegen $s_1 \circ s_2 = 1 \neq 0$ aber nicht.

Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \chi_{A_1}(\lambda) = \det(A_1 - \lambda E_4) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{1. Zeile}}{=} \\ &= (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\text{3. Zeile}}{=} \\ &= (-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (\lambda^2 + 1) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 + 1) \cdot ((-\lambda)^2 - (-1)) = (\lambda^2 + 1)^2 > 0; \end{aligned}$$

damit besitzt A_1 keinen reellen Eigenwert und ist damit insbesondere nicht reell diagonalisierbar; dagegen ist A_2 als symmetrische Matrix (orthogonal) diagonalisierbar. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \chi_{A_3}(\lambda) = \det(A_3 - \lambda E_4) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{Dreiecksmatrix}}{=} \\ &= (1 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) \cdot (3 - \lambda) \cdot (4 - \lambda); \end{aligned}$$

damit besitzt A_3 die vier verschiedenen reellen Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ und $\lambda_4 = 4$ und ist daher als 4×4 -Matrix reell diagonalisierbar. Schließlich gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\chi_{A_4}(\lambda) = \det(A_4 - \lambda E_4) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{Dreiecksmatrix}}{=} (1 - \lambda)^4;$$

damit ist $\lambda_0 = 1$ der einzige Eigenwert der Matrix A_4 ; er besitzt die algebraische Vielfachheit $\alpha_0 = 4$, wegen

$$A_4 - \lambda_0 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aber nur die geometrische Vielfachheit

$$\gamma = 4 - \text{Rang}(A_4 - \lambda_0 \cdot E_4) = 4 - 3 = 1,$$

weswegen A_4 nicht reell diagonalisierbar ist.

3.14 Wir nehmen zum Widerspruch an, es gebe zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

eine invertierbare Matrix $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, so daß

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

eine obere Dreiecksmatrix ist. Damit sind aber die Matrizen A und B zueinander ähnlich und besitzen gemäß

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) &= \det(B - \lambda E_3) = \det(C^{-1}AC - \lambda E_3) = \\ &= \det(C^{-1}AC - C^{-1}(\lambda E_3)C) = \det(C^{-1}(A - \lambda E_3)C) = \\ &= \det(C)^{-1} \cdot \det(A - \lambda E_3) \cdot \det(C) = \det(A - \lambda E_3) = \chi_A(\lambda) \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ dasselbe charakteristische Polynom; dies steht allerdings im Widerspruch dazu, daß

$$\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} - \lambda & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{Dreiecks-}}{\underset{\text{matrix}}{=}} (b_{11} - \lambda) \cdot (b_{22} - \lambda) \cdot (b_{33} - \lambda)$$

in die drei reellen Linearfaktoren $b_{11} - \lambda$, $b_{22} - \lambda$ und $b_{33} - \lambda$ zerfällt, während

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{3. Zeile}}{=} (3 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (3 - \lambda) \cdot ((-\lambda)^2 - (-1)) = (3 - \lambda) \cdot (\lambda^2 + 1) \end{aligned}$$

neben dem reellen Linearfaktor $3 - \lambda$ auch den quadratischen Faktor $\lambda^2 + 1$ ohne reelle Nullstelle beinhaltet. Folglich kann es keine invertierbare Matrix $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ geben, so daß $B = C^{-1}AC$ eine obere Dreiecksgestalt besitzt.

3.15 Nach Voraussetzung gibt es für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Orthonormalbasis $b_1, \dots, b_n$ des euklidischen $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A ; seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die zugehörigen Eigenwerte. Damit ist $P = (b_1, \dots, b_n) \in O_n(\mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix, und mit der Diagonalmatrix $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$P^\top \cdot A \cdot P = D \quad \text{bzw.} \quad A = P \cdot D \cdot P^\top,$$

wobei $P^{-1} = P^\top$ verwendet wird. Damit ergibt sich wegen $D^\top = D$ dann

$$A^\top = (P \cdot D \cdot P^\top)^\top = (P^\top)^\top \cdot D^\top \cdot P^\top = P \cdot D \cdot P^\top = A;$$

folglich ist die Matrix A symmetrisch.

3.16 Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann symmetrisch, wenn $M^\top = M$ gilt, und genau dann orthogonal, wenn $M^\top \cdot M = E_n$ (oder gleichwertig $M \cdot M^\top = E_n$) ist.

a) Die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

sind (wegen $\det(A) = -1$ und $\det(B) = -1$) invertierbar und symmetrisch, ihr Produkt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist allerdings nicht symmetrisch.

b) Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ besitzt die Gestalt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ mit Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$, und für die zu A inverse Matrix gilt dann

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix};$$

folglich ist auch A^{-1} symmetrisch.

c) Es ist

$$(C^\top A C)^\top = C^\top A^\top (C^\top)^\top \underset{A^\top = A}{=} C^\top A C;$$

folglich ist $C^\top A C$ eine symmetrische Matrix.

d) Es ist

$$\begin{aligned} (A \cdot B)^\top \cdot (A \cdot B) &= (B^\top \cdot A^\top) \cdot (A \cdot B) = B^\top \cdot (A^\top \cdot A) \cdot B \underset{A^\top \cdot A = E_2}{=} \\ &= B^\top \cdot E_2 \cdot B = B^\top \cdot B = E_2; \end{aligned}$$

damit ist auch $A \cdot B$ eine orthogonale Matrix.

e) Es ist

$$(A^{-1})^\top \cdot A^{-1} \underset{A^{-1} = A^\top}{=} (A^{-1})^\top \cdot A^\top = (A \cdot A^{-1})^\top = E_2^\top = E_2;$$

damit ist auch A^{-1} eine orthogonale Matrix.

f) Die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

sind (wegen $\det(A) = 1$ und $\det(C) = 2$) invertierbar; darüber hinaus ist A (als Einheitsmatrix) sogar orthogonal, aber die Matrix

$$C^T A C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ist etwa wegen $\det(C^T A C) = 4$, also $\det(C^T A C) \neq \pm 1$, nicht orthogonal.

Damit sind die Aussagen a) und f) falsch, die Aussagen b) bis e) dagegen richtig.

3.17 Sind die beiden Matrizen A und $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ähnlich, gibt es also eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $B = T^{-1} A T$, so besitzen sie gemäß

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) &= \det(B - \lambda E_n) = \det(T^{-1} A T - \lambda E_n) = \\ &= \det(T^{-1} A T - T^{-1}(\lambda E_n) T) = \det(T^{-1} (A - \lambda E_n) T) = \\ &= \det(T)^{-1} \cdot \det(A - \lambda E_n) \cdot \det(T) = \det(A - \lambda E_n) = \chi_A(\lambda) \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ insbesondere dasselbe charakteristische Polynom.

Zur Widerlegung der falschen Aussagen wählen wir für $n = 2$ speziell

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

sowie

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad T_0^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$B_0 = T_0^{-1} A_0 T_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

insbesondere sind also die Matrizen A_0 und B_0 zueinander ähnlich.

a) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A , so ist $\chi_A(\lambda) = 0$; folglich ist auch $\chi_B(\lambda) = 0$, so daß λ auch ein Eigenwert B ist.

b) Für den Vektor $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gilt $v \neq 0$ mit

$$A_0 \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$B_0 \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

damit ist v zwar ein Eigenvektor von A_0 , aber nicht von B_0 .

- c) Ist A invertierbar, so ist $\lambda = 0$ kein Eigenwert von A ; gemäß a) ist dann $\lambda = 0$ auch kein Eigenwert von B , weswegen B invertierbar ist.
- d) Die Matrix A_0 ist eine Diagonalmatrix, die Matrix B_0 nicht.
- e) Ist $A = E_n$ die Einheitsmatrix, so gilt

$$B = T^{-1}E_nT = T^{-1}T = E_n.$$

- f) Es ist

$$\det(A) = \chi_A(0) = \chi_B(0) = \det(B).$$

Damit sind die Aussagen a), c), e) und f) richtig, die Aussagen b) und d) dagegen falsch.

- 3.18 a) Nach dem Determinantenmultiplikationssatz gilt $\det(A B) = \det(A) \cdot \det(B)$; da nun ein Produkt zweier reeller Zahlen genau dann 0 ist, wenn mindestens einer der beiden Faktoren selbst 0 ist, erhält man damit in

$$\det(AB) = 0 \iff \det(A) \cdot \det(B) = 0 \iff \det(A) = 0 \text{ oder } \det(B) = 0$$

die Behauptung.

- b) Die Aussage ist falsch, denn für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gilt zwar $A \neq 0$ und $B \neq 0$, aber dennoch $AB = 0$.
- c) Zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ der Matrix A gibt es einen Eigenvektor $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = \lambda x$. Damit gilt

$$A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda(\lambda x) = \lambda^2x;$$

damit ist $x \neq 0$ Eigenvektor von A^2 zum Eigenwert λ^2 . Weiter gilt

$$A^3x = (AA^2)x = A(A^2x) = A(\lambda^2x) = \lambda^2(Ax) = \lambda^2(\lambda x) = \lambda^3x;$$

damit ist $x \neq 0$ Eigenvektor von A^3 zum Eigenwert λ^3 . Führt man diese Überlegungen induktiv fort, so erhält man, daß $x \neq 0$ Eigenvektor von A^k zum Eigenwert λ^k für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist.

- d) Die Aussage ist falsch, denn für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gilt zwar $A \neq E$ und $A \neq -E$, aber dennoch $A^2 = E$.

Damit sind die Aussagen a) und c) richtig, die Aussagen b) und d) dagegen falsch.

- 3.19 a) Die Aussage ist richtig: so ist etwa

$$v_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 23 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -17 \\ 23 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wegen

$$\det(v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{vmatrix} 12 & 10 & 0 & 0 \\ -1 & -17 & 0 & 0 \\ 23 & 23 & 1 & 0 \\ 5 & 11 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Laplace}}{=} \underbrace{(-1)^{4+4} \cdot 1}_{=1} \cdot \begin{vmatrix} 12 & 10 & 0 \\ -1 & -17 & 0 \\ 23 & 23 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\stackrel{\text{Laplace}}{=} \underbrace{(-1)^{3+3} \cdot 1}_{=1} \cdot \begin{vmatrix} 12 & 10 \\ -1 & -17 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-17) - (-1) \cdot 10 = -194 \neq 0$$

eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

- b) Die Aussage ist falsch: so ist etwa die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

gemäß $A^\top = A$ symmetrisch und damit insbesondere diagonalisierbar, wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$$

allerdings nicht invertierbar.

- c) Die Aussage ist falsch: so ist etwa die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 1 \neq 0$$

invertierbar; wegen

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 - 1 \cdot (-1) = \lambda^2 + 1 > 0$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist allerdings A ohne Eigenwert und damit insbesondere nicht diagonalisierbar.

- d) Die Aussage ist richtig: sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A^3 = A$. Für einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ von A gibt es einen Vektor $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ mit $A \cdot x = \lambda \cdot x$, und es folgt

$$\begin{aligned} A^2 \cdot x &= (A \cdot A) \cdot x = A \cdot (A \cdot x) = A \cdot (\lambda \cdot x) = \\ &= \lambda \cdot (A \cdot x) = \lambda \cdot (\lambda \cdot x) = (\lambda \cdot \lambda) \cdot x = \lambda^2 \cdot x \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} A^3 \cdot x &= (A \cdot A^2) \cdot x = A \cdot (A^2 \cdot x) = A \cdot (\lambda^2 \cdot x) = \\ &= \lambda^2 \cdot (A \cdot x) = \lambda \cdot (\lambda^2 \cdot x) = (\lambda \cdot \lambda^2) \cdot x = \lambda^3 \cdot x, \end{aligned}$$

woraus sich wegen $A^3 = A$ zunächst

$$\lambda^3 \cdot x = A^3 \cdot x = A \cdot x = \lambda \cdot x,$$

also

$$(\lambda^3 - \lambda) \cdot x = \lambda^3 \cdot x - \lambda \cdot x = 0,$$

ergibt; wegen $x \neq 0$ folgt

$$0 = \lambda^3 - \lambda = \lambda \cdot (\lambda^2 - 1) = \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 1)$$

und damit $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$.