

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2012): Lineare Algebra und analytische Geometrie 2 — Lösungsvorschlag —

2.1 a) Es ist

$$A - \lambda \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}+\text{I}]{\text{II}+\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\text{Rang}(A - \lambda \cdot E_3) = 1 < 3;$$

damit ist $\lambda = 3$ ein Eigenwert von A , und für den Eigenraum ergibt sich

$$\text{Eig}(A; \lambda) = \mathbb{R} \cdot u_1 + \mathbb{R} \cdot u_2 \quad \text{mit} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Es ist $x \neq 0$ mit

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

damit ist $x \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\mu = 7$.

c) Gemäß a) sind u_1 und u_2 linear unabhängige Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda = 3$, und gemäß b) ist x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\mu = 7$; damit sind u_1, u_2, x linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^3$, wegen $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ also schon eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren der Matrix A . Folglich ist A reell diagonalisierbar, und mit der invertierbaren Matrix

$$P = (u_1, u_2, x) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \text{diag}(\lambda, \lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

ergibt sich die Beziehung $P^{-1}AP = D$.

2.2 a) Mit Hilfe der Regel von Sarrus ergibt sich

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-4 - 6 - 2) - (-4 - 4 - 3) = -1.$$

b) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) &= \det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -3 & 2 \\ 1 & -2 - \lambda & 2 \\ 1 & -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{I}-\text{II}}{=} \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 + \lambda & 0 \\ 1 & -2 - \lambda & 2 \\ 0 & 1 + \lambda & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &\stackrel{(\lambda-1) \text{ aus I}}{=} \stackrel{(\lambda+1) \text{ aus III}}{=} (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 - \lambda & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{Regel von Sarrus}}{=} (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 1) \cdot [(-2 - \lambda) - ((-2) + (-1))] \\ &= -(\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda + 1); \end{aligned}$$

wegen

$$\chi_B(\lambda) = 0 \iff -(\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda + 1) = 0 \iff (\lambda = 1 \text{ oder } \lambda = -1)$$

besitzt die Matrix B genau die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$.

c) Wegen

$$B - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{II} \leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\text{Eig}(B; \lambda_1)$ der Matrix B zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, und wegen

$$B - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{I} \leftrightarrow \text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{II}-3 \cdot \text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\text{Eig}(B; \lambda_2)$ der Matrix B zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$.

d) Gemäß b) besitzt die Matrix B nur zwei Eigenwerte, und gemäß c) ist jeder der beiden Eigenräume von B eindimensional; damit gibt es höchstens zwei linear unabhängige Eigenvektoren von B , insbesondere also keine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von B , so daß die Matrix B nicht diagonalisierbar ist.

Alternativ lässt sich auch unter Verwendung des Hauptsatzes über diagonalisierbare Matrizen wie folgt argumentieren: Da $\lambda_1 = 1$ eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_B(\lambda)$ ist, ergibt sich für den Eigenwert $\lambda_1 = 1$ die algebraische Vielfachheit $\alpha_1 = 2$, und wegen $\text{Rang}(B - \lambda_1 E) = 2$ ist die geometrische Vielfachheit $\gamma_1 = 3 - 2 = 1$; wegen $\gamma_1 < \alpha_1$ ist die Matrix B nicht diagonalisierbar.

2.3 a) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\chi_M(\lambda) &= \det(M - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{2. \text{ Spalte}}{=} \\ &= (2 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) \cdot [(1 - \lambda) \cdot (3 - \lambda) - 1 \cdot (-1)] = \\ &= (2 - \lambda) \cdot (3 - 4\lambda + \lambda^2 + 1) = (2 - \lambda) \cdot (4 - 4\lambda + \lambda^2) = (2 - \lambda)^3;\end{aligned}$$

wegen

$$\chi_M(\lambda) = 0 \iff (2 - \lambda)^3 = 0 \iff \lambda = 2$$

ist $\lambda = 2$ der einzige Eigenwert der Matrix M . Wegen

$$M - \lambda E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\text{Eig}(M; \lambda)$ der Matrix M zum Eigenwert $\lambda = 2$; die Eigenvektoren sind damit alle vom Nullvektor verschiedenen Linearkombinationen von v_1 und v_2 , also alle Vektoren

$$v = \mu_1 \cdot v_1 + \mu_2 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad (\mu_1, \mu_2) \neq (0, 0).$$

b) Gemäß a) sind höchstens zwei Eigenvektoren der Matrix M linear unabhängig; damit existiert keine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von M , und folglich ist die Matrix M nicht diagonalisierbar, also nicht ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

Alternativ lässt sich auch unter Verwendung des Hauptsatzes über diagonalisierbare Matrizen wie folgt argumentieren: Da $\lambda = 2$ eine dreifache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_M(\lambda)$ ist, ergibt sich für den Eigenwert $\lambda = 2$ die algebraische Vielfachheit $\alpha = 3$, und wegen $\text{Rang}(M - \lambda E) = 1$ ist die geometrische Vielfachheit $\gamma = 3 - 1 = 2$; wegen $\gamma < \alpha$ ist die Matrix M nicht diagonalisierbar, also nicht ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

2.4 Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\chi_M(\lambda) &= \det(M - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{1. Zeile}}{=} \\ &= (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot [(1-\lambda)^2 - 1^2] = \\ &= (1-\lambda) \cdot [-\lambda \cdot (2-\lambda)] = -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda);\end{aligned}$$

wegen

$$\chi_M(\lambda) = 0 \iff \lambda = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda = 1 \quad \text{oder} \quad \lambda = 2$$

besitzt M genau die drei einfachen Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$. Wegen

$$M - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\text{Eig}(M; \lambda_1)$ der Matrix M zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$, wegen

$$M - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\text{Eig}(M; \lambda_2)$ der Matrix M zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, und wegen

$$M - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\text{Eig}(M; \lambda_3)$ der Matrix M zum Eigenwert

$\lambda_3 = 2$. Damit ist v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren der Matrix M zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, so daß sich mit der invertierbaren Matrix

$$T = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

die Beziehung $D = T^{-1}MT$ ergibt.

2.5 a) Wegen

$$\begin{aligned}
 \chi_M(\lambda) &= \det(M - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 5 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & -4 & -5-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{III}+\text{I}}{=} \\
 &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 5 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -\lambda & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \stackrel{(-\lambda) \text{ aus III}}{=} (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 5 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Sarrus}}{=} \\
 &= -\lambda \cdot [((2-\lambda)(1-\lambda) + 4 + 0) - (5(1-\lambda) + 0 + 0)] = \\
 &= -\lambda [\lambda^2 - 3\lambda + 2 + 4 - 5 + 5\lambda] = -\lambda (\lambda^2 + 2\lambda + 1);
 \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$\chi_M(\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda$$

das charakteristische Polynom der gegebenen Matrix M .

b) Wegen

$$\chi_M(\lambda) = -\lambda (\lambda^2 + 2\lambda + 1) = -\lambda (\lambda + 1)^2$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt die Matrix M die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -1$.

- Da $\lambda_1 = 0$ die algebraische Vielfachheit $\alpha_1 = 1$ besitzt, ist auch die geometrische Vielfachheit $\gamma_1 = 1$ und damit der Eigenraum $\text{Eig}(M, \lambda_1)$ eindimensional.
- Da $\lambda_2 = -1$ die algebraische Vielfachheit $\alpha_2 = 2$ besitzt, kommt für die geometrische Vielfachheit $\gamma_2 = 1$ oder $\gamma_2 = 2$ in Frage; wegen

$$M - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} + \frac{2}{3}\text{I}} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} + \frac{2}{3}\text{I}} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$\gamma_2 = 3 - \text{Rang}(M - \lambda_2 E_3) = 3 - 2 = 1;$$

damit ist auch der Eigenraum $\text{Eig}(M, \lambda_2)$ eindimensional.

Folglich sind höchstens zwei Eigenvektoren der Matrix M , nämlich ein Eigenvektor v_1 zum Eigenwert λ_1 und ein Eigenvektor v_2 zum Eigenwert λ_2 , linear unabhängig; damit existiert keine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von M , und folglich ist die Matrix M nicht diagonalisierbar.

Alternativ läßt sich auch unter Verwendung des Hauptsatzes über diagonalisierbare Matrizen wie folgt argumentieren: Da für den Eigenwert $\lambda_2 = -1$ die algebraische Vielfachheit $\alpha_2 = 2$ nicht mit der geometrischen Vielfachheit $\gamma_2 = 1$ übereinstimmt, ist die Matrix M nicht diagonalisierbar.

2.6 a) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{1. Zeile}}{=} \\ &= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{1. Spalte}}{=} \\ &= (2-\lambda)(1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \cdot (2-\lambda)^2;\end{aligned}$$

wegen

$$\chi_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 1 \quad \text{oder} \quad \lambda = 2$$

besitzt A genau die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. Wegen

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bildet $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\text{Eig}(A; \lambda_1)$, und wegen

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bildet $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\text{Eig}(A; \lambda_2)$. Da höchstens zwei

Eigenvektoren der Matrix A linear unabhängig sind, existiert keine Basis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A ; folglich ist die Matrix A nicht diagonalisierbar.

b) Wegen $\det(A) = \chi_A(0) = 4 \neq 0$ ist die Matrix A invertierbar.

c) Da gemäß a) höchstens zwei Eigenvektoren der Matrix A linear unabhängig sind, kann eine Basis des $\mathbb{R}^4$ auch nur höchstens zwei Eigenvektoren von A , etwa v_1 und v_2 enthalten. Mit $B = (e_1, v_1, e_3, v_2) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ gilt

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Dreiecksmatrix}}{=} 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \neq 0;$$

damit bilden e_1, v_1, e_3, v_2 eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

2.7 a) Wegen

$$\begin{aligned}
 A - 1 \cdot E_4 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}+3\text{I}]{\text{II}-\text{I}, \text{III}-\text{I}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \\
 &\xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} \leftrightarrow \text{IV}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

ist

$$\text{Rang}(A - 1 \cdot E_4) = 3 < 4;$$

folglich ist $\lambda_1 = 1$ ein Eigenwert der Matrix A mit der geometrischen Vielfachheit

$$\gamma_1 = 4 - \text{Rang}(A - 1 \cdot E_4) = 1.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
 A - (-1) \cdot E_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-3\text{I}]{\text{II}+\text{I}, \text{III}+\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} \leftrightarrow \text{III}} \\
 &\xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-3\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV}-\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

ist

$$\text{Rang}(A - (-1) \cdot E_4) = 3 < 4;$$

folglich ist $\lambda_2 = -1$ ein Eigenwert der Matrix A mit der geometrischen Vielfachheit

$$\gamma_2 = 4 - \text{Rang}(A - (-1) \cdot E_4) = 1.$$

b) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
 \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 3 & 0 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\text{III}-\text{II}}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{(\lambda-1) \text{ aus III}}{=} (\lambda-1) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\text{Spalte II}+\text{III}}{=} (\lambda-1) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\text{3. Zeile}}{=} (\lambda-1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 3 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\text{II}-\text{I}}{=} -(\lambda-1) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{(\lambda-1) \text{ aus II}}{=} -(\lambda-1) \cdot (\lambda-1) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\text{Sarrus}}{=} -(\lambda-1)^2 \cdot [(\lambda(-2-\lambda) + 0 - 4) - (-3 + 0 + 0)] \\
 &= (\lambda-1)^2 \cdot (\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (\lambda-1)^2 \cdot (\lambda+1)^2.
 \end{aligned}$$

c) Die Matrix A besitzt gemäß b) wegen

$$\chi_A(\lambda) = 0 \iff (\lambda-1)^2 \cdot (\lambda+1)^2 = 0 \iff \lambda = 1 \text{ oder } \lambda = -1$$

genau die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$, welche gemäß a) jeweils die geometrische Vielfachheit $\gamma_1 = 1$ und $\gamma_2 = 1$ besitzen. Damit gibt es höchstens zwei linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix A , insbesondere also keine Basis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A ; damit ist A nicht diagonalisierbar.

Alternativ könnte man auch mit dem Hauptsatz über diagonalisierbare Matrizen argumentieren: gemäß b) besitzen die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ jeweils die algebraische Vielfachheit $\alpha_1 = 2$ und $\alpha_2 = 2$, welche damit nicht mit der in a) bestimmten geometrischen Vielfachheit $\gamma_1 = 1$ und $\gamma_2 = 1$ übereinstimmen; $\gamma_1 < \alpha_1$ wie $\gamma_2 < \alpha_2$ zeigt, daß A nicht diagonalisierbar ist.

2.8 Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{1. Zeile}}{=} \\ &= (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{1. Spalte}}{=} \\ &= (1-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 \cdot (2-\lambda);\end{aligned}$$

wegen

$$\chi_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 1 \quad \text{oder} \quad \lambda = 2$$

besitzt A genau die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. Wegen

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\text{Eig}(A; \lambda_1)$ von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, und wegen

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\text{Eig}(A; \lambda_2)$ von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$;

damit bilden v_1, v_2, v_3, v_4 eine Basis von $\mathbb{R}^4$. Mit der invertierbaren Matrix

$$S = (v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

gilt dann $S^{-1}AS = D$.

2.9 Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ besitzt genau dann die (vom Nullvektor verschiedenen) Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ als Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, wenn

$$A \cdot v_1 = \lambda_1 \cdot v_1, \quad A \cdot v_2 = \lambda_2 \cdot v_2, \quad A \cdot v_3 = \lambda_3 \cdot v_3,$$

zusammengefaßt

$$A \cdot (v_1, v_2, v_3) = (A \cdot v_1, A \cdot v_2, A \cdot v_3) = (\lambda_1 \cdot v_1, \lambda_2 \cdot v_2, \lambda_3 \cdot v_3),$$

also

$$(*) \quad A \cdot B = C$$

mit $B = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $C = (\lambda_1 \cdot v_1, \lambda_2 \cdot v_2, \lambda_3 \cdot v_3) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, gilt; für die hier gegebenen Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und Zahlen $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -1$ ergibt sich also

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} (B \mid E_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III} + \text{I}]{\text{II} - 2 \cdot \text{I}} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-\frac{1}{5}) \cdot \text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III} - 2 \cdot \text{II}]{\text{I} - 2 \cdot \text{II}} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 6 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{6} \cdot \text{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{15} & \frac{1}{30} & \frac{1}{6} \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I} - \text{III}} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{15} & \frac{1}{30} & \frac{1}{6} \end{array} \right) = (E_3 \mid B') \end{aligned}$$

ist die Matrix $B \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ invertierbar, und es gilt

$$B^{-1} = B' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{15} & \frac{1}{30} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 10 & 5 & -5 \\ -6 & 12 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Folglich erhält man

$$(*) \quad A \cdot B = C \iff A = C \cdot B^{-1},$$

also

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 10 & 5 & -5 \\ -6 & 12 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 2 & -14 & -10 \\ -14 & 23 & -5 \\ -10 & -5 & -25 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

2.10 Die gegebene Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch und damit orthogonal diagonalisierbar; insbesondere stehen damit Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten aufeinander senkrecht. Für das charakteristische Polynom χ_M von M ergibt sich für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \chi_M(\lambda) &= \det(M - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{Sarrus}}{=} \\ &= [-\lambda(1-\lambda)^2 + 0 + 0] - [0 + 4(1-\lambda) + 4(1-\lambda)] = \\ &= (1-\lambda) \cdot [-\lambda(1-\lambda) - 4 - 4] = -(\lambda-1) \cdot (\lambda^2 - \lambda - 8); \end{aligned}$$

wegen

$$\begin{aligned} \chi_M(\lambda) = 0 &\iff \lambda = 1 \quad \text{oder} \quad \lambda^2 - \lambda - 8 = 0 \\ &\iff \lambda = 1 \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2} \end{aligned}$$

besitzt M die drei Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{33})$ und $\lambda_3 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{33})$. Wegen

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} + \frac{1}{2} \cdot \text{I}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} \cdot \text{I} \leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

III-I

ist $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, und wegen

$$\begin{aligned} M - \lambda_2 E &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \sqrt{33}) & 2 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{33}) & 2 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2}(1 - \sqrt{33}) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I und III} \cdot \frac{1}{2}(1 + \sqrt{33})} \\ &\quad \xrightarrow{\text{II} \cdot 4} \begin{pmatrix} -8 & 1 + \sqrt{33} & 0 \\ 8 & -2(1 + \sqrt{33}) & 8 \\ 0 & 1 + \sqrt{33} & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} + \text{I}} \begin{pmatrix} -8 & 1 + \sqrt{33} & 0 \\ 0 & -(1 + \sqrt{33}) & 8 \\ 0 & 1 + \sqrt{33} & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} + \text{II}} \\ &\quad \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} -8 & 1 + \sqrt{33} & 0 \\ 0 & -(1 + \sqrt{33}) & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I} + \text{II}} \begin{pmatrix} -8 & 0 & 8 \\ 0 & -(1 + \sqrt{33}) & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{33} \\ 8 \\ 1 + \sqrt{33} \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{33})$;

für jeden Eigenvektor v_3 der Matrix M zum Eigenwert $\lambda_3 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{33})$ gilt nun aufgrund ihrer Symmetrie $v_3 \perp v_1$ und $v_3 \perp v_2$, so daß

$$v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{33} \\ 8 \\ 1 + \sqrt{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2(1 + \sqrt{33}) \\ -8 \end{pmatrix}$$

gewählt werden kann. Damit bilden v_1, v_2, v_3 eine (Orthogonal-)Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von M .

2.11 a) Für das charakteristische Polynom χ_A von A ergibt sich für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{(I+II)+III}{=} \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda & 3-\lambda \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{(3-\lambda) \text{ aus I}}{=} (3-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{Sarrus}}{=} \\ &= -(\lambda-3) \cdot [((2-\lambda)(1-\lambda) + 0 + 0) - (2(2-\lambda) + 0 + (1-\lambda))] = \\ &= -(\lambda-3) \cdot (\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 4 + 2\lambda - 1 + \lambda) = -(\lambda-3)(\lambda^2 - 3).\end{aligned}$$

b) Die Eigenwerte der Matrix A entsprechen genau den Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_A ; wegen

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) = 0 &\iff \lambda = 3 \quad \text{oder} \quad \lambda^2 = 3 \\ &\iff \lambda = 3 \quad \text{oder} \quad \lambda = \sqrt{3} \quad \text{oder} \quad \lambda = -\sqrt{3}\end{aligned}$$

besitzt A genau die drei Eigenwerte $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \sqrt{3}$ und $\lambda_3 = -\sqrt{3}$.

c) Wegen

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{I+3 \cdot II \\ III-2 \cdot II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{III+I \\ -\frac{1}{2} \cdot I \leftrightarrow II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$ mit dem Eigenraum $\text{Eig}(A; \lambda_1) = \mathbb{R} \cdot v_1$, und wegen

$$\begin{aligned}A - \lambda_2 E &= \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & 2 \\ 1 & 2-\sqrt{3} & 0 \\ 2 & 0 & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix} \stackrel{\substack{(2+\sqrt{3}) \cdot II \\ (1+\sqrt{3}) \cdot III}}{\rightsquigarrow} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & 2 \\ 2+\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 2+2\sqrt{3} & 0 & -2 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{II+I \\ III+2 \cdot I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{III-II \\ I \leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot II}}{\rightsquigarrow} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{3} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{II+\sqrt{3} \cdot I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+\sqrt{3} & 2+\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = \sqrt{3}$ mit dem Eigenraum $\text{Eig}(A; \lambda_2) = \mathbb{R} \cdot v_2$; für jeden Eigenvektor v_3 der Matrix

A zum Eigenwert $\lambda_3 = -\sqrt{3}$ gilt nun aufgrund ihrer Symmetrie $v_3 \perp v_1$ und $v_3 \perp v_2$, so daß

$$v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 - \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ -3 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

gewählt werden kann und sich der Eigenraum $\text{Eig}(A; \lambda_3) = \mathbb{R} \cdot v_3$ ergibt.

2.12 Die gegebene Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

ist symmetrisch und damit orthogonal diagonalisierbar; für das charakteristische Polynom χ_A von A gilt

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ -1 & -\lambda & -2 \\ -2 & -2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{II} \leftrightarrow \text{I}}{=} \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ -1 + \lambda & 1 - \lambda & 0 \\ -2 & -2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{\substack{(-1) \text{ aus I, III} \\ (1-\lambda) \text{ aus II}}}{=} (1 - \lambda) \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 + \lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{Sarrus}}{=} \\ &= (1 - \lambda)[(\lambda(3 + \lambda) + 0 - 4) - (4 + 0 - (3 + \lambda))] = \\ &= -(\lambda - 1)[3\lambda + \lambda^2 - 4 - 4 + 3 + \lambda] = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda - 5) = \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda + 5)(\lambda - 1) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 5) \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Damit besitzt die Matrix A den doppelten Eigenwert $\lambda_1 = 1$ sowie den einfachen Eigenwert $\lambda_2 = -5$, so daß der Eigenraum $\text{Eig}(A; \lambda_1)$ eine (Ursprungs-)Ebene mit dem Eigenraum $\text{Eig}(A; \lambda_2)$ als Lotgerade (durch den Ursprung) ist. Dies eröffnet die folgenden Bestimmungsmöglichkeiten für eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A :

- Wegen

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\text{II} \leftrightarrow \text{I} \\ \text{III} \leftrightarrow 2\text{I}}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{II} \cdot (-1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bilden $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\text{Eig}(A; \lambda_1)$.

Damit ist aber

$$v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Eigenraums $\text{Eig}(A; \lambda_2)$, so daß

$$v'_2 = v_1 \times v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

wegen $v'_2 \perp v_3$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1 mit $v_1 \perp v'_2$ ist. Folglich ist

$$\frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{v'_2}{\|v'_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ aus Eigenvektoren von A , so daß sich mit der orthogonalen Matrix

$$S = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v'_2}{\|v'_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

dann $S^T A S = D$ ergibt.

- Wegen

$$\begin{aligned} A - \lambda_2 E &= \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow (-\frac{1}{2}) \cdot III} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} - 5I]{\text{II} + I} \\ &\xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} + \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} \cdot \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\text{Eig}(A; \lambda_2)$, so daß $w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wegen $w_1 \circ w_2 = 0$ auf w_1 senkrecht steht und damit ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1 ist; des weiteren ist

$$w_3 = w_1 \times w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

wegen $w_3 \perp w_1$ ebenfalls ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1 mit $w_2 \perp w_3$. Folglich ist

$$\frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ aus Eigenvektoren von A , so daß sich mit der orthogonalen Matrix

$$S = \left(\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \frac{w_3}{\|w_3\|} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \text{diag}(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_1) = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

dann $S^T A S = D$ ergibt.

2.13 a) Die gegebene Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

ist als symmetrische Matrix orthogonal diagonalisierbar und besitzt wegen

$$\begin{aligned} \chi_S(\lambda) = \det(S - \lambda E_3) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{Sarrus}}{=} \\ &= (-\lambda(1-\lambda)^2 + 0 + 0) - (0 + (1-\lambda) + (1-\lambda)) = \\ &= (1-\lambda) \cdot (-\lambda + \lambda^2 - 2) = -(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2) \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die drei einfachen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 2$.

b) Wegen

$$S - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}+\text{I}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von S zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, wegen

$$S - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II}-\frac{1}{2}\text{I}]{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-2\text{II}]{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von S zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$, und wegen

$$S - \lambda_3 E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II}+\text{I}]{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}+\text{II}]{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von S zum Eigenwert $\lambda_3 = 2$; für die orthogonale Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \in \text{O}_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

gilt dann $P^\top SP = D$.

2.14 Die gegebene Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

ist symmetrisch und damit orthogonal diagonalisierbar; dabei ist zunächst wegen

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad S \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot v_1$$

v_1 ein Eigenvektor der Matrix S zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$. Ferner gilt

$$\begin{aligned} \chi_S(\lambda) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & 8-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\substack{\text{I}-2\text{II} \\ \text{III}-2\text{II}}}{=} \begin{vmatrix} 9-\lambda & 2\lambda-18 & 0 \\ -2 & 8-\lambda & -2 \\ 0 & 2\lambda-18 & 9-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} -(\lambda-9) & 2(\lambda-9) & 0 \\ -2 & 8-\lambda & -2 \\ 0 & 2(\lambda-9) & -(\lambda-9) \end{vmatrix} \stackrel{\substack{(\lambda-9) \text{ aus I} \\ (\lambda-9) \text{ aus III}}}{=} (\lambda-9)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 8-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ &\stackrel{\text{Sarrus}}{=} (\lambda-9)^2 \cdot [((8-\lambda) + 0 + 0) - (0 + 4 + 4)] = -\lambda \cdot (\lambda-9)^2 \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt die Matrix S neben dem (bereits bestimmten) einfachen Eigenwert $\lambda_1 = 0$ den doppelten Eigenwert $\lambda_2 = 9$. Wegen

$$S - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2} \cdot \text{I}]{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}+2\text{I}]{\substack{\text{II}+\text{I} \\ \rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Eigenraums $\text{Eig}(S, 9) = \text{Eig}(S, 0)^\perp$; damit ist aber

$$v'_2 = v_1 \times v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wegen $v'_2 \perp v_1$ ein Eigenvektor von S zum Eigenwert $\lambda_2 = 9$ mit $v'_2 \perp v_3$. Folglich ist v_1, v'_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus paarweise orthogonalen Eigenvektoren der Matrix S , so daß sich mit der orthogonalen Matrix

$$T = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v'_2}{\|v'_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|} \right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

gilt dann $T^\top ST = D$.

2.15 Die gegebene Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

ist symmetrisch und damit orthogonal diagonalisierbar; für das charakteristische Polynom χ_A von A gilt

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\substack{\text{I}-\text{II} \\ \text{III}-\text{II}}}{=} \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\substack{(\lambda-1) \text{ aus I} \\ (\lambda-1) \text{ aus III}}}{=} (\lambda-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{(\text{II}+\text{I})+\text{III}}{=} \\ &= (\lambda-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{= \\ \text{2. Zeile}}}{=} \\ &= (\lambda-1)^2 \cdot (4-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2 (\lambda-4) \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Damit besitzt die Matrix A den doppelten Eigenwert $\lambda_1 = 1$ sowie den einfachen Eigenwert $\lambda_2 = 4$, so daß der Eigenraum $\text{Eig}(A; \lambda_1)$ eine (Ursprungs-)Ebene mit dem Eigenraum $\text{Eig}(A; \lambda_2)$ als Lotgerade (durch den Ursprung) ist. Dies eröffnet die folgenden Bestimmungsmöglichkeiten für eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A :

- Wegen

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\text{II}-\text{I} \\ \text{III}-\text{I}}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bilden $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\text{Eig}(A; \lambda_1)$.

Damit ist aber

$$v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Eigenraums $\text{Eig}(A; \lambda_2)$, so daß

$$v'_2 = v_1 \times v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

wegen $v'_2 \perp v_3$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1 mit $v_1 \perp v'_2$ ist. Folglich ist

$$\frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{v'_2}{\|v'_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ aus Eigenvektoren von A ; da nach Definition des Vektorprodukts $v_1, v_3, v'_2 = v_1 \times v_3$ und damit auch die normierten Vektoren

$$\frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{v'_2}{\|v'_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ein Rechtssystem in $\mathbb{R}^3$ bilden, ist die orthogonale Matrix

$$R = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|}, \frac{v'_2}{\|v'_2\|} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R})$$

wegen $\det(R) = 1$ eine Drehmatrix, und mit der Diagonalmatrix

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

dann $R^T A R = D$ ergibt.

- Wegen

$$\begin{aligned} A - \lambda_2 E &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I} \leftrightarrow \text{III}]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} + 2\text{I}]{\text{II} - \text{I}} \\ &\xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} + \text{II}]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II} \cdot (-\frac{1}{3})]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\text{Eig}(A; \lambda_2)$, so daß $w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

wegen $w_1 \circ w_2 = 0$ auf w_1 senkrecht steht und damit ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1 ist; des weiteren ist

$$w_3 = w_1 \times w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

wegen $w_3 \perp w_1$ ebenfalls ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1 mit $w_2 \perp w_3$. Folglich ist

$$\frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ aus Eigenvektoren von A , so daß sich mit der orthogonalen Matrix

$$R = \left(\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \frac{w_3}{\|w_3\|} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \text{diag}(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

dann $R^T A R = D$ ergibt. Gemäß der Definition des Vektorprodukts bilden nun $w_1, w_2, w_3 = w_1 \times w_2$ und damit auch die normierten Vektoren

$$\frac{w_1}{\|w_1\|}, \quad \frac{w_2}{\|w_2\|}, \quad \frac{w_3}{\|w_3\|}$$

ein Rechtssystem in $\mathbb{R}^3$, so daß die daraus gebildete Matrix $R \in O_3(\mathbb{R})$ die Determinante $\det(R) = 1$ besitzt und folglich eine Drehmatrix ist.

2.16 Die gegebene 4×4 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

ist gemäß $A^T = A$ symmetrisch und damit orthogonal diagonalisierbar.

a) Für $\lambda_1 = -2$ ist

$$A - \lambda_1 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III-I, IV-I}]{\text{II-I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\text{Rang}(A - \lambda_1 \cdot E_4) = 1 < 4;$$

damit ist $\lambda_1 = -2$ ein Eigenwert von A , und

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Basis des Eigenraums $\text{Eig}(A; \lambda_1)$. Für $\lambda_2 = 2$ ist

$$\begin{aligned}
 A - \lambda_2 \cdot E_4 &= \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I} \leftrightarrow \text{IV}]{} \\
 &\xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV} + 3 \cdot \text{I}]{\text{II} - \text{I}, \text{III} - \text{I}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -8 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV} + 2 \cdot \text{II}]{\text{III} - \text{II}} \\
 &\xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV} + \text{III}]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

also

$$\text{Rang}(A - \lambda_2 \cdot E_4) = 3 < 4;$$

damit ist $\lambda_2 = 2$ ein Eigenwert von A , und

$$u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Basis des Eigenraums $\text{Eig}(A; \lambda_2)$. Damit ist u_1, u_2, u_3, u_4 bereits eine Basis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A , so daß A keinen weiteren Eigenwert besitzen kann; dieser würde ja einen weiteren linear unabhängigen Eigenvektor beisteuern.

- b) Wir konstruieren für jeden der beiden Eigenräume jeweils eine Orthonormalbasis (bezüglich des Standardskalarprodukts)

Für den Eigenraum $\text{Eig}(A, \lambda_1)$ unterwerfen wir die in a) ermittelte Basis dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren und erhalten

$$a_1 = u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = \sqrt{2}, \quad \text{also} \quad b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

damit

$$a_2 = u_2 - (u_2 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \frac{1}{2}\sqrt{6}, \quad \text{also} \quad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und damit

$$\begin{aligned} a_3 &= u_3 - (u_3 \circ b_1) \cdot b_1 - (u_3 \circ b_2) \cdot b_2 = \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\|a_3\| = \sqrt{12}, \quad \text{also} \quad b_3 = \frac{1}{\|a_3\|} \cdot a_3 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix};$$

damit ist b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von $\text{Eig}(A; \lambda_1)$. Der Basisvektor u_4 von $\text{Eig}(A; \lambda_2)$ ist dagegen nur zu normieren mit

$$\|u_4\| = 2, \quad \text{also} \quad b_4 = \frac{1}{\|u_4\|} \cdot u_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist b_1, b_2, b_3, b_4 eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren der Matrix A , und mit der orthogonalen Matrix

$$M = (b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in O_4(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

ergibt sich dann $M^\top A M = D$.

2.17 a) Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 3 \\ 0 & 4 - \lambda & 5 \\ 0 & 0 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(4 - \lambda)(6 - \lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt A die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ und $\lambda_3 = 6$ und ist folglich als 3×3 -Matrix diagonalisierbar.

Für $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gilt

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt B den Eigenwert $\lambda = 1$ mit der algebraischen Vielfachheit $\alpha = 3$. Wegen

$$B - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\text{Rang}(B - \lambda E) = 2$ und damit die geometrische Vielfachheit $\gamma = 1$; wegen $\gamma < \alpha$ ist B nicht diagonalisierbar.

Die Matrix $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist symmetrisch und daher (sogar orthogonal) diagonalisierbar.

- b) Wir zeigen, daß eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, die der Bedingung $A^2 + A + E = 0$ genügt, keinen reellen Eigenwert besitzen kann und damit insbesondere nicht reell diagonalisierbar ist. Zu einem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt es nämlich einen Eigenvektor $0 \neq v \in \mathbb{R}^3$ mit $A \cdot v = \lambda \cdot v$, und wegen

$$A^2 \cdot v = A \cdot (A \cdot v) = A \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (A \cdot v) = \lambda \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda^2 \cdot v$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= (A^2 + A + E) \cdot v = A^2 \cdot v + A \cdot v + E \cdot v = \\ &= \lambda^2 \cdot v + \lambda \cdot v + 1 \cdot v = (\lambda^2 + \lambda + 1) \cdot v, \end{aligned}$$

woraus wegen $v \neq 0$

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

folgt; diese quadratische Gleichung besitzt jedoch eine negative Diskriminante und folglich keine reelle Lösung.

- 2.18 a) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist symmetrisch und daher (sogar orthogonal) diagonalisierbar.

Für $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gilt

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt B die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$ und ist folglich als 3×3 -Matrix diagonalisierbar.

Für $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gilt

$$\chi_C(\lambda) = \det(C - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^3$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt C den Eigenwert $\lambda = 1$ mit der algebraischen Vielfachheit $\alpha = 3$. Wegen

$$C - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\text{Rang}(C - \lambda E) = 2$ und damit die geometrische Vielfachheit $\gamma = 1$; wegen $\gamma < \alpha$ ist C nicht diagonalisierbar.

b) Die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

sind als symmetrische Matrix bzw. Diagonalmatrix insbesondere reell diagonalisierbar, ihr Produkt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

als Drehmatrix D_φ mit $\varphi = \frac{\pi}{2}$ jedoch nicht; die Aussage ist demnach im allgemeinen falsch.

2.19 Für die vier gegebenen Matrizen erhält man:

- Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \chi_{M_1}(\lambda) = \det(M_1 - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 4 & 7 & 11 \\ 0 & 3 - \lambda & 5 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 6 - \lambda & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 10 - \lambda & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= \underset{\text{Dreiecksmatrix}}{(1 - \lambda)(3 - \lambda)(6 - \lambda)(10 - \lambda)(15 - \lambda)}; \end{aligned}$$

damit besitzt M_1 die fünf verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$, $\lambda_4 = 10$ und $\lambda_5 = 15$, und ist demnach als 5×5 -Matrix diagonalisierbar.

- Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \chi_{M_2}(\lambda) = \det(M_2 - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= \underset{\text{Dreiecksmatrix}}{(1 - \lambda)(1 - \lambda)(1 - \lambda)(1 - \lambda)(1 - \lambda)} = (1 - \lambda)^5; \end{aligned}$$

damit besitzt M_2 den einzigen Eigenwert $\lambda = 1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha = 5$. Wegen

$$M_2 - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\text{Rang}(M_2 - \lambda E) = 4$, weswegen der Eigenwert λ die geometrische Vielfachheit $\gamma = 5 - 4 = 1$ besitzt; wegen $\gamma \neq \alpha$ ist die Matrix M_2 nicht diagonalisierbar.

- Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \chi_{M_3}(\lambda) = \det(M_3 - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{=}{=} \text{1. Spalte} \\ &= (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{=}{=} \text{1. Spalte} \\ &= (1-\lambda)(3-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{=}{=} \text{Sarrus} \\ &= (1-\lambda)(3-\lambda) \cdot ((1-\lambda)^3 + 1 + 1 - (1-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda)) = \\ &= (1-\lambda)(3-\lambda) \cdot (1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 - 1 + 3\lambda) = \\ &= (1-\lambda)(3-\lambda) \cdot (3\lambda^2 - \lambda^3) = (1-\lambda)(3-\lambda)^2 \lambda^2; \end{aligned}$$

damit besitzt M_3 den Eigenwert $\lambda_1 = 1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 1$ (und damit auch der geometrischen Vielfachheit $\gamma_1 = 1$) sowie die beiden Eigenwerte $\lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = 0$ jeweils der algebraischen Vielfachheit $\alpha_2 = \alpha_3 = 2$. Wegen

$$\begin{aligned} M_3 - \lambda_2 E &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{III}+\text{2IV}}{\rightsquigarrow} \text{V-IV} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \stackrel{\text{V}+\text{III}}{\rightsquigarrow} \text{II} \leftrightarrow \text{IV} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist $\text{Rang}(M_3 - \lambda_2 E) = 3$, die geometrische Vielfachheit von $\lambda_2 = 3$ also

$\gamma_2 = 5 - 3 = 2 = \alpha_2$, und wegen

$$M_3 - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{V-III}]{\text{IV-III}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\text{Rang}(M_3 - \lambda_3 E) = 3$, die geometrische Vielfachheit von $\lambda_3 = 0$ also $\gamma_3 = 5 - 3 = 2 = \alpha_3$; folglich ist M_3 diagonalisierbar.

- Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \chi_{M_4}(\lambda) = \det(M_4 - \lambda E) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \stackrel{=}{=} \Pi + \lambda \cdot I \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 - \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \stackrel{=}{=} \text{2. Zeile} \\ &= -(-1 - \lambda^2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \stackrel{=}{=} \text{1. Zeile} (1 + \lambda^2) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

damit beinhaltet das charakteristische Polynom $\chi_{M_4}(\lambda)$ den quadratischen Faktor $\lambda^2 + 1$ ohne reelle Nullstelle und zerfällt damit nicht vollständig in Linearfaktoren; folglich ist die Matrix M_4 nicht diagonalisierbar.

2.20 Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} (2-a) - \lambda & a \\ -a & (2+a) - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} (2-\lambda) - a & a \\ -a & (2-\lambda) + a \end{vmatrix} = ((2-\lambda) - a) \cdot ((2-\lambda) + a) - a \cdot (-a) = \\ &= ((2-\lambda)^2 - a^2) - (-a^2) = (2-\lambda)^2 - a^2 + a^2 = (2-\lambda)^2; \end{aligned}$$

damit besitzt A nur einen Eigenwert, nämlich $\lambda_0 = 2$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_0 = 2$, und wegen

$$A - \lambda_0 E = \begin{pmatrix} (2-a) - 2 & a \\ -a & (2+a) - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a \\ -a & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\Pi-1} \begin{pmatrix} -a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt dieser die geometrische Vielfachheit

$$\gamma_0 = 2 - \text{Rang}(A - \lambda_0 E) = \begin{cases} 2 - 1 = 1, & \text{falls } a \neq 0, \\ 2 - 0 = 2, & \text{falls } a = 0. \end{cases}$$

Nach dem Hauptsatz über diagonalisierbare Matrizen ist nun A genau dann diagonalisierbar, wenn $\alpha_0 = \gamma_0$ gilt, also im Falle $a = 0$.

2.21 a) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\chi_t(\lambda) = \det(A_t - \lambda E) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ t & t+1-\lambda & 0 \\ t+1 & t+1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{3. Spalte}}{=} \\ &= -(\lambda+1) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ t & t+1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(-\lambda(t+1-\lambda)+t) = \\ &= -(\lambda+1)(\lambda^2 - t\lambda - \lambda + t) \stackrel{\text{Vieta}}{=} -(\lambda+1)(\lambda-t)(\lambda-1).\end{aligned}$$

b) Die in a) gezeigte Zerlegung von χ_t in Linearfaktoren legt die folgende Fallunterscheidung nahe:

Fall 1: $t \notin \{-1, 1\}$. Die Matrix A_t besitzt die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = t$ und $\lambda_3 = 1$ und ist folglich als 3×3 -Matrix diagonalisierbar.

Fall 2: $t = -1$. Die Matrix

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch und damit als reellwertige Matrix auch diagonalisierbar.

Fall 3: $t = 1$. Die Matrix A_1 besitzt die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 1$ mit den algebraischen Vielfachheiten $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = 2$. Wegen

$$A_1 - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $r_2 = \text{Rang}(A_1 - \lambda_2 E) = 2$. Für die geometrische Vielfachheit γ_2 von λ_2 gilt damit $\gamma_2 = 3 - r_2 = 1 < \alpha_2$; folglich ist A_1 nicht diagonalisierbar.

c) Gemäß a) besitzt die Matrix A_0 die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 1$. Wegen

$$A_0 - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$, wegen

$$A_0 - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 0$, und wegen

$$A_0 - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 1$. Mit

$$P = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$$

und

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt damit $P^{-1}A_0P = D$.

2.22 Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ergibt sich für das charakteristische Polynom χ_t der gegebenen Matrix $C_t \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$\begin{aligned} \chi_t(\lambda) = \det(C_t - \lambda \cdot E_3) &= \begin{vmatrix} -\lambda & t & t-2 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{3. Zeile}}{=} \\ &= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & t \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot (\lambda^2 - t); \end{aligned}$$

dadurch wird die folgende Fallunterscheidung motiviert:

- Für $t < 0$ ist q mit $q(\lambda) = \lambda^2 - t > 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ eine quadratische Funktion ohne reelle Nullstelle; damit zerfällt χ_t nicht vollständig in Linearfaktoren, so daß C_t nicht diagonalisierbar ist.
- Für $t = 0$ ist $\chi_t(\lambda) = (2-\lambda) \cdot \lambda^2$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß $\lambda_2 = 0$ ein Eigenwert von C_0 der algebraischen Vielfachheit $\alpha_2 = 2$ ist; wegen

$$C_0 - \lambda_2 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\text{Rang}(C_0 - \lambda_2 \cdot E_3) = 2$, so daß $\lambda_2 = 0$ die geometrische Vielfachheit $\gamma_2 = 3 - 2 = 1$ besitzt. Wegen $\alpha_2 \neq \gamma_2$ ist C_0 nicht diagonalisierbar.

- Für $t > 0$ ist

$$\chi_t(\lambda) = (2-\lambda) \cdot (\lambda^2 - (\sqrt{t})^2) = (2-\lambda) (\lambda + \sqrt{t}) (\lambda - \sqrt{t});$$

damit besitzt χ_t die Nullstellen

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{sowie} \quad \lambda_2 = -\sqrt{t} < 0 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = \sqrt{t} > 0.$$

Demnach besitzt die Matrix C_t für

$$\lambda_1 \neq \lambda_3 \iff 2 \neq \sqrt{t} \iff 4 \neq t$$

drei verschiedene reelle Eigenwerte und ist demnach als 3×3 -Matrix reell diagonalisierbar. Für $t = 4$ besitzt die Matrix C_4 den Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_3 = 2$

der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 2$ sowie den Eigenwert $\lambda_2 = -2$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_2 = 1$ (und damit auch der geometrischen Vielfachheit $\gamma_2 = 1$); wegen

$$C_4 - \lambda_1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\text{Rang}(C_4 - \lambda_1 \cdot E_3) = 1$, so daß $\lambda_1 = 2$ auch geometrische Vielfachheit $\gamma_1 = 3 - 1 = 2$ besitzt. Damit ist die Matrix C_4 reell diagonalisierbar.

2.23 a) Für das charakteristische Polynom χ_A der Matrix A ergibt sich

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \alpha \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & \alpha \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2 - \lambda) \cdot (\lambda^2 - \alpha) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \alpha\lambda - 2\alpha \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Da die Eigenwerte von A genau die Nullstellen von χ_A sind, legt die faktorisierte Darstellung $\chi_A(\lambda) = (2 - \lambda) \cdot (\lambda^2 - \alpha)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die folgende Fallunterscheidung nahe:

Für $\alpha < 0$ ist q mit $q(\lambda) = \lambda^2 - \alpha > 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ eine quadratische Funktion ohne (reelle) Nullstellen; damit ist $\lambda_1 = 2$ der einzige Eigenwert von A .

Für $\alpha = 0$ ist $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 2) \cdot \lambda^2$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 0$.

Für $\alpha > 0$ schließlich ist

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - \sqrt{\alpha})(\lambda + \sqrt{\alpha})$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt A im Falle $\alpha \neq 4$ die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \sqrt{\alpha}$ und $\lambda_3 = -\sqrt{\alpha}$ sowie im Falle $\alpha = 4$ die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -2$.

b) Für $\alpha < 0$ zerfällt das charakteristische Polynom χ_A nicht in Linearfaktoren; damit ist A nicht diagonalisierbar. Für $0 < \alpha \neq 4$ besitzt A drei verschiedene Eigenwerte und ist daher als 3×3 -Matrix diagonalisierbar.

Für $\alpha = 0$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ mit $\alpha_1 = 1$ (und damit auch $\gamma_1 = 1$) sowie $\lambda_2 = 0$ mit $\alpha_2 = 2$; wegen

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\text{Rang}(A - \lambda_2 E) = 2$ und damit $\gamma_2 = 1$. Damit ist A für $\alpha = 0$ nicht diagonalisierbar.

Für $\alpha = 4$ schließlich besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ mit $\alpha_1 = 2$ sowie $\lambda_2 = -2$ mit $\alpha_2 = 1$ (und damit auch $\gamma_2 = 1$); wegen

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\text{Rang}(A - \lambda_1 E) = 1$ und damit $\gamma_1 = 2$. Damit ist A für $\alpha = 4$ diagonalisierbar.

Zusammenfassend ist also A genau dann zu einer reellen Diagonalmatrix ähnlich, wenn $\alpha > 0$ ist.

2.24 Nach dem Hauptsatz über diagonalisierbare Matrizen ist eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ genau dann (reell) diagonalisierbar, wenn

- ihr charakteristisches Polynom χ_A in (reelle) Linearfaktoren zerfällt und
- für jeden ihrer Eigenwerte λ die algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen;

insbesondere ist also eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit n verschiedenen (reellen) Eigenwerten (reell) diagonalisierbar.

Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\chi_A(x) = \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} a - \lambda & b & 0 \\ 2 & -a - \lambda & b \\ 0 & 2 & a - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{Sarrus}}{=} \\ &= ((a - \lambda)^2 (-a - \lambda) + 0 + 0) - (0 + 2b(a - \lambda) + 2b(a - \lambda)) = \\ &= (a - \lambda) ((a - \lambda)(-a - \lambda) - 4b) = (a - \lambda) (-a^2 + \lambda^2 - 4b) = \\ &= (a - \lambda) (\lambda^2 - a^2 - 4b) = (a - \lambda) (\lambda^2 - (a^2 + 4b));\end{aligned}$$

dies legt die folgende Fallunterscheidung nahe:

- Im Falle $a^2 < -4b$ ist $a^2 + 4b < 0$, und χ_A enthält den quadratischen Faktor $\lambda^2 - (a^2 + 4b)$ ohne reelle Nullstelle; damit zerfällt aber χ_A nicht in (reelle) Linearfaktoren, und die Matrix A ist nicht (reell) diagonalisierbar.
- Im Falle $a^2 \geq -4b$ ist $a^2 + 4b \geq 0$, und man erhält die Faktorisierung

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda - a) \left(\lambda - \sqrt{a^2 + 4b} \right) \left(\lambda + \sqrt{a^2 + 4b} \right)$$

und damit die Nullstellen

$$\lambda_1 = a \quad \text{sowie} \quad \lambda_2 = \sqrt{a^2 + 4b} \quad \text{und} \quad \lambda_3 = -\sqrt{a^2 + 4b};$$

dies legt die folgende Betrachtungsweise nahe:

- Sei zunächst $b \neq 0$ und $a^2 > -4b$: wegen $b \neq 0$ ist $a^2 + 4b \neq a^2$ und damit $\lambda_1 \neq \lambda_{2,3}$, und wegen $a^2 > -4b$ ist $a^2 + 4b > 0$ und damit auch $\lambda_2 \neq \lambda_3$; folglich besitzt M drei verschiedene (reelle) Eigenwerte und ist damit als 3×3 -Matrix (reell) diagonalisierbar.
- Für $b = 0$ gilt $\lambda_1 = \lambda_2$ oder $\lambda_1 = \lambda_3$, so daß die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda_1 = a$ mindestens $\alpha = 2$ (für $a = 0$ sogar $\alpha = 3$) beträgt; da die Matrix

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 2 & -2a & b \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -2a & b \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

den Rang $r = 2$ besitzt, ist die geometrische Vielfachheit von $\lambda_1 = a$ nur $\gamma = 3 - r = 1$, und folglich ist M nicht diagonalisierbar.

- Für $a^2 = -4b$ ist $a^2 + 4b = 0$, so daß $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ein Eigenwert von A der algebraischen Vielfachheit $\alpha_2 \geq 2$ ist; da die Matrix

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 2 & -a & b \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -a & b \\ 0 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -a & b \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

den Rang $r = 2$ besitzt, ist die geometrische Vielfachheit von $\lambda_2 = 0$ nur $\gamma = 3 - r = 1$, und folglich ist M nicht diagonalisierbar.

Zusammenfassend ist also die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ genau dann reell diagonalisierbar, wenn $b \neq 0$ und $a^2 > -4b$ gilt.

2.25 Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \chi_Y(\lambda) &= \det(Y - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & -1 - \lambda & -2 \\ 0 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{1. \text{ Spalte}}{=} \\ &= (1 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -2 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \cdot [(-1 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) - (-2) \cdot 1] = \\ &= (1 - \lambda) \cdot (-2 - \lambda + \lambda^2 + 2) = (1 - \lambda) \cdot \lambda \cdot (\lambda - 1) = -\lambda \cdot (\lambda - 1)^2; \end{aligned}$$

damit besitzt Y die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ mit $\alpha_1 = 1$ und damit $\gamma_1 = 1$ sowie $\lambda_2 = 1$ mit $\alpha_2 = 2$, und wegen

$$Y - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\text{Rang}(Y - \lambda_2 E) = 1$ und damit $\gamma_2 = 3 - 1 = 2$. Folglich ist Y diagonalisierbar, es gibt also eine invertierbare Matrix $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ mit

$$P^{-1}YP = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $Y = PDP^{-1}$, und wegen $D^2 = D$ erhält man

$$Y^2 = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} = PDP^{-1} = Y;$$

folglich können wir $S = Y$ wählen.

2.26 a) Die gegebene Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

ist symmetrisch und damit orthogonal diagonalisierbar. Wegen

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} 9 - \lambda & 2 \\ 2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (9 - \lambda)(6 - \lambda) - 2 \cdot 2 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = (\lambda - 5)(\lambda - 10) \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A genau die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = 10$; wegen

$$A - \lambda_1 E_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 5$, und wegen

$$A - \lambda_2 E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 10$. Folglich ist

$$w_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \frac{1}{\|v_2\|} \cdot v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^2, \circ)$ aus Eigenvektoren für A .

b) Gemäß a) ergibt sich für die orthogonale Matrix

$$T = (w_1, w_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$$

und die Diagonalmatrix

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

die Beziehung $T^{-1} \cdot A \cdot T = D$.

c) Mit Hilfe der Beziehung aus b) ergibt sich zunächst

$$A = (T \cdot T^{-1}) \cdot A \cdot (T \cdot T^{-1}) = T \cdot (T^{-1} \cdot A \cdot T) \cdot T^{-1} = T \cdot D \cdot T^{-1};$$

wir zeigen nun $A^n = T \cdot D^n \cdot T^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:
„ $n = 1$ “:

$$A^1 = A = T \cdot D \cdot T^{-1} = T \cdot D^1 \cdot T^{-1}.$$

„ $n \rightarrow n + 1$ “:

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \cdot A = (T \cdot D^n \cdot T^{-1}) \cdot (T \cdot D \cdot T^{-1}) = \\ &= T \cdot D^n \cdot (T^{-1} \cdot T) \cdot D \cdot T^{-1} = T \cdot D^n \cdot D \cdot T^{-1} = T \cdot D^{n+1} \cdot T^{-1}. \end{aligned}$$

d) Wegen

$$D^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 10^n \end{pmatrix} = 5^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

und

$$T^{-1} = T^\top = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich mit Hilfe von c)

$$\begin{aligned} A^n &= T \cdot D^n \cdot T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot 5^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{5^n}{5} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} -1 & 2^{n+1} \\ 2 & 2^n \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 5^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 2^{n+2} + 1 & 2^{n+1} - 2 \\ 2^{n+1} - 2 & 2^n + 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.27 a) Für den Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt $v \neq 0$ und

$$A_s \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & s \\ s & 1 & 2 \\ 2 & s & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+3 \\ s+3 \\ s+3 \end{pmatrix} = (s+3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_s \cdot v;$$

damit ist v ein Eigenvektor der Matrix A_s zum Eigenwert $\lambda_s = s+3$ mit

$$\lambda_s = 0 \iff s+3=0 \iff s=-3.$$

b) Die Matrix $A_s \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ besitzt genau dann den (vollen) Rang $(A_s) = 3$, wenn sie invertierbar ist; wegen

$$\begin{aligned} \det(A_s) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & s \\ s & 1 & 2 \\ 2 & s & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{III}+\text{I}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & s \\ s & 1 & 2 \\ 3 & s+2 & s+1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{III}+\text{II}}{=} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & s \\ s & 1 & 2 \\ s+3 & s+3 & s+3 \end{vmatrix} \stackrel{(s+3) \text{ aus III}}{=} (s+3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & s \\ s & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Sarrus}}{=} \\ &= (s+3) \cdot ((1+4+s^2) - (s+2+2s)) = (s+3) \cdot (s^2 - 3s + 3) \end{aligned}$$

mit

$$s^2 - 3s + 3 = \left(s - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ ist dies genau für

$$\det(A_s) \neq 0 \iff s+3 \neq 0 \iff s \neq -3$$

der Fall. Für den verbleibenden Fall $s = -3$ erhält man wegen

$$A_{-3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{II}+3\text{I}}{\rightsquigarrow} \stackrel{\text{III}-2\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & -7 & 7 \end{pmatrix} \stackrel{\text{III}+\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

schließlich $\text{Rang}(A_{-3}) = 2$.

- c) Im Falle $s \neq -3$ ist die Matrix A_s gemäß b) invertierbar, so daß das lineare Gleichungssystem $A_s \cdot x = v$ eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt; gemäß a) gilt $A_s \cdot v = \lambda_s \cdot v$, also

$$A_s \cdot \left(\frac{1}{\lambda_s} \cdot v \right) = \frac{1}{\lambda_s} \cdot (A_s \cdot v) = \frac{1}{\lambda_s} \cdot (\lambda_s \cdot v) = \left(\frac{1}{\lambda_s} \cdot \lambda_s \right) \cdot v = 1 \cdot v = v,$$

so daß in diesem Fall

$$L = \left\{ \frac{1}{\lambda_s} \cdot v \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{s+3} \\ \frac{1}{s+3} \\ \frac{1}{s+3} \end{pmatrix} \right\}$$

die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A_s \cdot x = v$ ist. Im Falle $s = -3$ ergibt sich wegen

$$\begin{aligned} (A_{-3}|v) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}-2\text{I}]{\text{II}+3\text{I}} \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & 4 \\ 0 & -7 & 7 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}+\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

ein Widerspruch in der dritten Zeile, so daß in diesem Fall die Lösungsmenge $L = \emptyset$ leer ist.

- 2.28 a) Sei $v_1 \in \mathbb{R}^2$ bzw. $v_2 \in \mathbb{R}^2$ ein Eigenvektor der Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ zum Eigenwert $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ bzw. $\lambda_2 \in \mathbb{R}$; wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sind v_1 und v_2 linear unabhängig, so daß die Matrix $S = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ invertierbar ist. Mit

$$T = S^{-1} \in \text{GL}_2(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

gilt dann

$$A \cdot S = A \cdot (v_1, v_2) = (A \cdot v_1, A \cdot v_2) = (\lambda_1 \cdot v_1, \lambda_2 \cdot v_2) = S \cdot D,$$

also $A = T^{-1}DT$; damit ist A reell diagonalisierbar.

- b) Für das charakteristische Polynom χ_A der Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gilt

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{Spur}(A) \cdot \lambda + \det(A);$$

wegen $\det(A) < 0$ ergibt sich für die Diskriminante Δ dieses quadratischen Polynoms

$$\Delta = (-\text{Spur}(A))^2 - 4 \cdot \det(A) = \underbrace{(\text{Spur}(A))^2}_{\geq 0} + 4 \cdot \underbrace{(-\det(A))}_{> 0} > 0,$$

so daß χ_A zwei verschiedene reelle Nullstellen und damit die Matrix A zwei verschiedene reelle Eigenwerte besitzt, weswegen $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ dann gemäß a) reell diagonalisierbar ist.

c) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und damit den doppelten reellen Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; da aber die Matrix

$$A - \lambda_1 E = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

den Rang $r = 1$ und damit der Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ nur die geometrische Vielfachheit $\gamma = 2 - r = 1$ besitzt, während die algebraische Vielfachheit $\alpha = 2$ beträgt, ist die Matrix A nicht reell diagonalisierbar.

d) Für die in c) betrachtete Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

damit ist A^2 reell diagonalisierbar, während A selbst nicht reell diagonalisierbar ist.

- 2.29 a) Es ist $\lambda = 0$ genau dann ein Eigenwert der Matrix A , wenn $\lambda = 0$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E_n)$ ist, also für $\det(A) = 0$. Folglich ist $\lambda = 0$ genau dann kein Eigenwert von A , wenn $\det(A) \neq 0$ gilt, was jedoch zur Invertierbarkeit von A gleichwertig ist.
- b) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so gibt es einen Eigenvektor $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = \lambda x$; damit ergibt sich

$$A^2 x = (A A) x = A (A x) = A (\lambda x) \underset{\lambda \in \mathbb{R}}{=} \lambda (A x) = \lambda (\lambda x) = \lambda^2 x,$$

so daß $x \neq 0$ auch ein Eigenvektor der Matrix A^2 zum Eigenwert λ^2 ist. Ist zudem A invertierbar, so ist gemäß a) der Eigenwert $\lambda \neq 0$, und wir erhalten

$$x = E_n x = (A^{-1} A) x = A^{-1} (A x) = A^{-1} (\lambda x) \underset{\lambda \in \mathbb{R}}{=} \lambda (A^{-1} x),$$

wegen $\lambda \neq 0$ also

$$A^{-1} x = \lambda^{-1} x;$$

damit ist $x \neq 0$ auch ein Eigenvektor der Matrix A^{-1} zum Eigenwert λ^{-1} .

- c) Der Nachweis, daß mit der Matrix A auch ihr Quadrat A^2 reell diagonalisierbar ist, läßt sich etwa durch eine der folgenden Überlegungen erbringen:
- Ist A reell diagonalisierbar, so gibt es eine Basis $b_1, \dots, b_n$ von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A ; seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die zugehörigen Eigenwerte. Gemäß b) sind $b_1, \dots, b_n$ auch Eigenvektoren von A^2 zu den Eigenwerten $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$, es ist also $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A^2 ; damit ist A^2 reell diagonalisierbar.

- Ist A reell diagonalisierbar, also ähnlich zu einer reellen Diagonalmatrix, so gibt es eine invertierbare Matrix $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $D = P^{-1}AP$. Damit gilt

$$D^2 = (P^{-1}AP)^2 = P^{-1}A \underbrace{P \cdot P^{-1}}_{=E_n} AP = P^{-1}A^2P,$$

so daß A^2 ähnlich zur Diagonalmatrix $D^2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist; folglich ist A^2 reell diagonalisierbar.

d) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

besitzt wegen

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \neq 0$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ keinen reellen Eigenwert, ist also insbesondere nicht reell diagonalisierbar; dagegen ist ihr Quadrat

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

bereits eine Diagonalmatrix, insbesondere also reell diagonalisierbar.

- 2.30 a) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert der Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so gibt es einen Eigenvektor $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ mit $Bv = \lambda v$; mit der Voraussetzung $B^2 = E_n$ folgt

$$v = E_n v = B^2 v = B(Bv) = B(\lambda v) \underset{\lambda \in \mathbb{R}}{=} \lambda(Bv) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v,$$

und damit

$$\lambda^2 v - v = 0, \quad \text{also} \quad (\lambda^2 - 1)v = 0,$$

woraus sich wegen $v \neq 0$ dann

$$\lambda^2 - 1 = 0, \quad \text{also} \quad \lambda^2 = 1$$

und damit

$$\lambda = 1 \quad \text{oder} \quad \lambda = -1$$

ergibt.

- b) Ist $\lambda = 1$ der einzige Eigenwert der Matrix B , so ist insbesondere $\lambda = -1$ kein Eigenwert von B . Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt für $v = x - Bx \in \mathbb{R}^n$ dann

$$\begin{aligned} Bv &= B(x - Bx) = Bx - B(Bx) = Bx - B^2x = \\ &= Bx - E_n x = Bx - x = -(x - Bx) = -v = (-1)v, \end{aligned}$$

also $v = 0$ und damit $Bx = x$; ansonsten wäre $v \neq 0$ und $\lambda = -1$ ein Eigenwert von B im Widerspruch zur Voraussetzung. Es ergibt sich

$$B = BE_n = B(e_1, \dots, e_n) = (Be_1, \dots, Be_n) = (e_1, \dots, e_n) = E_n.$$

2.31 a) Zu betrachten ist die affine Abbildung

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f(x) = A \cdot x + b,$$

mit der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und dem Vektor $b \in \mathbb{R}^n$. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} x \in \text{Fix}(f) &\iff f(x) = x \iff A \cdot x + b = x \iff \\ &\iff A \cdot x - x = -b \iff_{x=E_n \cdot x} (A - E_n) \cdot x = -b; \end{aligned}$$

damit stimmt die Menge $\text{Fix}(f)$ der Fixpunkte von f mit der Lösungsmenge L des linearen Gleichungssystems

$$(A - E_n) \cdot x = -b \quad (*)$$

mit der Koeffizientenmatrix $A - E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und der rechten Seite $-b \in \mathbb{R}^n$ überein; dies motiviert die folgende Fallunterscheidung:

- Im Falle

$$\text{Rang}(A - E_n) < \text{Rang}(A - E_n \mid -b)$$

ist das lineare Gleichungssystem $(*)$ unlösbar; folglich ist L und damit $\text{Fix}(f)$ leer.

- Im Falle

$$r = \text{Rang}(A - E_n) = \text{Rang}(A - E_n \mid -b)$$

ist das lineare Gleichungssystem $(*)$ lösbar, und mit einer partikulären Lösung x_p von $(*)$ ist dann

$$L = x_p + L_0,$$

wobei L_0 den $(n-r)$ -dimensionalen linearen Lösungsraum des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems

$$(A - E_n) \cdot x = 0$$

bezeichnet; folglich ist L und damit $\text{Fix}(f)$ eine affine Teilmenge (ein affiner Unterraum) von $\mathbb{R}^n$.

b) Es ist $\lambda = 1$ genau dann ein Eigenwert der Matrix A , wenn

$$\chi_A(1) = \det(A - 1 \cdot E_n) = 0$$

ist; so ist $\lambda = 1$ genau dann kein Eigenwert von A , wenn $\det(A - E_n) \neq 0$ ist, die Matrix $A - E_n$ also invertierbar ist. Damit ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$x \in \text{Fix}(f) \iff_{a)} (A - E_n) \cdot x = -b \iff x = -(A - E_n)^{-1} \cdot b,$$

so daß in diesem Fall f genau den einen Fixpunkt $-(A - E_n)^{-1} \cdot b$ besitzt.

2.32 a) Die Aussage ist richtig: ist nämlich $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von B , so gilt $\det(B - \lambda \cdot E_n) = 0$; damit ist aber auch $\det((B - \lambda \cdot E_n)^\top) = 0$. Wegen

$$(B - \lambda \cdot E_n)^\top = B^\top - (\lambda \cdot E_n)^\top = B^\top - \lambda \cdot E_n$$

folgt daraus $\det(B^\top - \lambda \cdot E_n) = 0$, somit ist λ auch ein Eigenwert von $B^\top$.

b) Die Aussage ist falsch: als Gegenbeispiel betrachten wir etwa die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2};$$

es ist zwar $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ wegen

$$B \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \cdot x$$

ein Eigenvektor von B , wegen

$$B^\top \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R} \cdot x$$

aber kein Eigenvektor von $B^\top$.

c) Die Aussage ist richtig: ist nämlich B diagonalisierbar, so gibt es eine invertierbare Matrix $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $D = P^{-1}BP$; damit ergibt sich aber

$$D^\top = (P^{-1}BP)^\top = P^\top B^\top (P^{-1})^\top = P^\top B^\top (P^\top)^{-1}$$

mit der invertierbaren Matrix $Q = P^\top \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ und der Diagonalmatrix $D^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, somit ist auch $B^\top$ diagonalisierbar.