

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2012): Lineare Algebra und analytische Geometrie 1 — Lösungsvorschlag —

1.1 Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 9x_4 &= 20 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 12x_4 &= 27 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 14x_4 &= 31 \end{aligned}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$. Es ist

$$\begin{aligned} (A|b) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 9 & 20 \\ 2 & 5 & 7 & 12 & 27 \\ 3 & 6 & 9 & 14 & 31 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II} \sim \text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 9 & 20 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 7 \\ 3 & 6 & 9 & 14 & 31 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} \sim \frac{3}{2} \cdot \text{I}} \\ &\quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 9 & 20 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} \cdot 2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 9 & 20 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II} \sim 3 \cdot \text{III}} \\ &\quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 9 & 20 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I} \sim 4 \cdot \text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 9 & 16 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I} \sim 9 \cdot \text{III}} \\ &\quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} \cdot \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Damit ist das lineare Gleichungssystem lösbar; genauer ist x_3 eine freie Variable, und mit $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig erhalten wir für die drei gebundenen Variablen x_1 , x_2 und x_4 dann

- $x_1 + x_3 = -1$, also $x_1 = -1 - \lambda$,
- $x_2 + x_3 = 1$, also $x_2 = 1 - \lambda$, und
- $x_4 = 2$;

folglich ist also

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -1 - \lambda \\ 1 - \lambda \\ \lambda \\ 2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die Lösungsmenge des gegebenen linearen Gleichungssystems.

1.2 Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} 3x_1 & - & 2x_2 & - & 6x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$. Es ist

$$\begin{aligned} (A|b) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & -6 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{IV}} \\ &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -4 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -6 & 4 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II}+\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -6 & 4 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}-2\cdot\text{I}} \\ &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -6 & 4 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{IV}-3\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \\ &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I}+\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Damit ist das lineare Gleichungssystem lösbar; genauer sind x_3 und x_4 freie Variablen, und mit $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ und $x_4 = \mu \in \mathbb{R}$ beliebig erhalten wir für die beiden gebundenen Variablen x_1 und x_2 dann

- $x_1 - 2x_3 = 1$, also $x_1 = 1 + 2\lambda$, und
- $x_2 - 2x_4 = -1$, also $x_2 = -1 + 2\mu$;

folglich ist also

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1+2\lambda \\ -1+2\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

die Lösungsmenge des gegebenen linearen Gleichungssystems.

1.3 Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$. Es ist

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{III}-2\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{IV}-\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{II}+3\cdot\text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{I}-2\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Damit ist das lineare Gleichungssystem lösbar; genauer ist x_3 eine freie Variable, und mit $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig erhalten wir für die drei gebundenen Variablen x_1 , x_2 und x_4 dann

- $x_1 - 5x_3 = -5$, also $x_1 = -5 + 5x_3 = -5 + 5\lambda$,
- $x_2 + 2x_3 = 3$, also $x_2 = 3 - 2x_3 = 3 - 2\lambda$, und
- $x_4 = 1$;

folglich ist also

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -5 + 5\lambda \\ 3 - 2\lambda \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

die Lösungsmenge des gegebenen linearen Gleichungssystems.

1.4 a) Für das gegebene homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrr} 2x_1 & + & 9x_2 & - & 5x_3 & + & 12x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 & & & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & + & 6x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix und erhalten

$$(A|0) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 9 & -5 & 12 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 6 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{I} \leftrightarrow \text{II}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & -5 & 12 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 6 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{II}-2\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 6 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{IV}-\text{I}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} \text{III-II} \\ \rightsquigarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) & \begin{array}{c} \text{IV-II} \\ \rightsquigarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right) & \\
\begin{array}{c} \text{III} \leftrightarrow \text{IV} \\ \rightsquigarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \begin{array}{c} \text{III} \cdot (-1) \\ \rightsquigarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \\
\begin{array}{c} \text{I-5-IV} \\ \rightsquigarrow \\ \text{III-2-IV} \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -2 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \begin{array}{c} \text{I-4-II} \\ \rightsquigarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & .
\end{array}$$

Da es genau zwei freie Unbestimmte, nämlich x_3 und x_5 , gibt, besitzt der Lösungsraum L_0 des homogenen linearen Gleichungssystems die Dimension $\dim L_0 = 2$. Eine Basis u_1, u_2 von L_0 läßt sich etwa dadurch bestimmen, daß man für u_1 zum einen $x_3 = 1$ und $x_5 = 0$ und für u_2 zum anderen $x_3 = 0$ und $x_5 = 1$ wählt; dadurch ergibt sich

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Für das gegebene inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rclclclcl}
2x_1 & + & 9x_2 & - & 5x_3 & + & 12x_4 & + & x_5 & = & 3 \\
x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 & & & = & 0 \\
& & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 3 \\
x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & + & 6x_4 & - & x_5 & = & 3
\end{array}$$

ist der Vektor $x \in \mathbb{R}^5$ mit $x_1 = -12$, $x_2 = 3$ und $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ wegen

$$\begin{array}{rclclclclcl}
2 \cdot (-12) & + & 9 \cdot 3 & - & 5 \cdot 0 & + & 12 \cdot 0 & + & 0 & = & -24 + 27 = 3 \\
(-12) & + & 4 \cdot 3 & - & 2 \cdot 0 & + & 5 \cdot 0 & & & = & -12 + 12 = 0 \\
& & 3 & - & 0 & + & 2 \cdot 0 & + & 0 & = & 3 = 3 \\
(-12) & + & 5 \cdot 3 & - & 3 \cdot 0 & + & 6 \cdot 0 & - & 0 & = & -12 + 15 = 3
\end{array}$$

eine spezielle (partikuläre) Lösung.

c) Die Lösungsmenge L eines inhomogenen linearen Gleichungssystems setzt sich additiv aus einer speziellen (partikulären) Lösung dieses Systems und dem Lösungsraum L_0 des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems zusammen; damit ergibt sich hier

$$L = x + L_0 = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.5 Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccl} x_1 & + & x_2 & & & + & \lambda x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & - & \lambda x_3 & + & \lambda x_4 & = & 0 \\ -x_1 & & & + & \lambda x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & & & + & \lambda^2 x_4 & = & 1 \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_\lambda|b)$. Es ist

$$\begin{aligned} (A_\lambda|b) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda^2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}+\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda^2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \\ &\xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda^2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{IV}-\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda^2 - \lambda & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2} \cdot \text{III}} \\ &\xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda^2 - \lambda & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{IV}-\text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda - 1) & 0 \end{array} \right), \end{aligned}$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ist $\lambda \neq 0$ und $\lambda(\lambda - 1) \neq 0$, und wir erhalten
 - $\lambda(\lambda - 1)x_4 = 0$, also $x_4 = 0$,
 - $\lambda x_3 = 1$, also $x_3 = \frac{1}{\lambda}$,
 - $x_2 - \lambda x_3 + \lambda x_4 = 0$, also $x_2 = 1$, und
 - $x_1 + x_2 + \lambda x_4 = 2$, also $x_1 = 1$.

Damit besitzt sich für jedes $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ das gegebene lineare Gleichungs-

system die einelementige Lösungsmenge $L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

- Für $\lambda = 0$ gilt

$$(A_0|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

wegen des Widerspruchs in der dritten Zeile ist das für $\lambda = 0$ gegebene lineare Gleichungssystem unlösbar.

- Für $\lambda = 1$ gilt

$$(A_1|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

damit ist x_4 eine freie Variable, und mit $x_4 = \alpha \in \mathbb{R}$ beliebig ergibt sich $x_3 = 1$ sowie $x_2 - x_3 + x_4 = 0$, also $x_2 = 1 - \alpha$, und $x_1 + x_2 + x_4 = 2$, also $x_1 = 1$. Somit ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \alpha \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Lösungsmenge des durch $(A_1|b)$ gegebenen Gleichungssystems.

1.6 Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & x_2 & + & s x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & - & 2 x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & 2 x_2 & + & s x_3 & - & 2 s x_4 & = & -1 \\ x_1 & & & + & 2(s-1) x_3 & + & 3 x_4 & = & 2 \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_s|b)$. Es ist

$$\begin{aligned} (A_s|b) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & s & -2s & -1 \\ 1 & 0 & 2(s-1) & 3 & 2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\text{III}-\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2s-1 & -2 \\ 1 & 0 & 2(s-1) & 3 & 2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\text{IV}-\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2s-1 & -2 \\ 0 & 1 & s-2 & 2 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\text{III}+\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2s & -2 \\ 0 & 1 & s-2 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{IV}-\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2s & -2 \\ 0 & 0 & s & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{-\frac{1}{2} \cdot \text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & 1 \\ 0 & 0 & s & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{IV}-s \cdot \text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-s^2 & 1-s \end{array} \right) \end{aligned}$$

Dies legt die Fallunterscheidung $1-s^2 = 0$, also $s = 1$ oder $s = -1$, und $1-s^2 \neq 0$, also $s \notin \{-1, 1\}$ nahe:

Für $s = 1$ gilt

$$(A_1|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

mit $x_4 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig erhält man

- $x_3 + x_4 = 1$, also $x_3 = 1 - x_4 = 1 - \lambda$,
- $x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$, also $x_2 = 2x_3 - x_4 = 2(1 - \lambda) - \lambda = 2 - 3\lambda$, und
- $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1$, also $x_1 = 1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 + (2 - 3\lambda) - (1 - \lambda) - \lambda = 2 - 3\lambda$;

damit ist $L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 - 3\lambda \\ 2 - 3\lambda \\ 1 - \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ die Lösungsmenge für $s = 1$.

Für $s = -1$ gilt

$$(A_{-1}|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right);$$

damit ist das Gleichungssystem für $s = -1$ nicht lösbar; es ist $L_{-1} = \emptyset$.

Für $s \notin \{-1, 1\}$ ist $1 - s^2 \neq 0$, und wir erhalten

- $(1 - s^2)x_4 = 1 - s$, also $x_4 = \frac{1-s}{1-s^2} = \frac{1}{1+s}$,
- $x_3 + sx_4 = 1$, also $x_3 = 1 - sx_4 = 1 - s \cdot \frac{1}{1+s} = \frac{1}{1+s}$,
- $x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$, also $x_2 = 2x_3 - x_4 = 2 \cdot \frac{1}{1+s} - \frac{1}{1+s} = \frac{1}{1+s}$, und
- $x_1 - x_2 + sx_3 + x_4 = 1$, also $x_1 = 1 + x_2 - sx_3 - x_4 = 1 + \frac{1}{1+s} - s \cdot \frac{1}{1+s} - \frac{1}{1+s} = \frac{1}{1+s}$;

damit ist $L_s = \left\{ \frac{1}{1+s} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die Lösungsmenge für $s \notin \{-1, 1\}$.

1.7 a) Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & s x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & s x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ s x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_s|b)$. Es ist

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & s & 2 \\ 1 & s & 1 & -1 \\ s & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) &\xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & s & 2 \\ 0 & s-1 & 1-s & -3 \\ s & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}-s \cdot \text{I}} \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & s & 2 \\ 0 & s-1 & 1-s & -3 \\ 0 & 1-s & 1-s^2 & -1-2s \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}+\text{II}} \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & s & 2 \\ 0 & s-1 & 1-s & -3 \\ 0 & 0 & 2-s-s^2 & -4-2s \end{array} \right); \end{aligned}$$

wegen

$$s - 1 = 0 \iff s = 1$$

und

$$2 - s - s^2 = (2 + s)(1 - s) = 0 \iff s = -2 \text{ oder } s = 1$$

legt dies die folgende Fallunterscheidung nahe:

- Für $s \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ ist $s - 1 \neq 0$ und $2 - s - s^2 = (2 + s)(1 - s) \neq 0$, und wir erhalten
 - $(2 - s - s^2)x_3 = -4 - 2s$, also $x_3 = \frac{-4-2s}{2-s-s^2} = \frac{-2(2+s)}{(2+s)(1-s)} = \frac{2}{s-1}$,
 - $(s-1)x_2 + (1-s)x_3 = -3$, also $x_2 = \frac{1}{s-1}(-3 - (1-s) \cdot \frac{2}{s-1}) = -\frac{1}{s-1}$ und
 - $x_1 + x_2 + s x_3 = 2$, also $x_1 = 2 - (-\frac{1}{s-1}) - s \cdot \frac{2}{s-1} = -\frac{1}{s-1}$.

Damit ist

$$L = \left\{ \frac{1}{s-1} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

die Lösungsmenge des durch $(A_s|b)$ für ein $s \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ gegebenen Gleichungssystems.

- Für $s = -2$ gilt

$$(A_{-2}|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

damit ist x_3 eine freie Variable, und mit $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig ergibt sich $-3x_2 + 3x_3 = -3$, also $x_2 = \lambda + 1$, sowie $x_1 + x_2 - 2x_3 = 2$, also $x_1 = \lambda + 1$, es ist also

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda + 1 \\ \lambda + 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge des durch $(A_{-2}|b)$ gegebenen Gleichungssystems.

- Für $s = 1$ gilt

$$(A_1|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right);$$

aufgrund des Widerspruchs in der zweiten (oder dritten) Zeile ist das durch $(A_1|b)$ gegebene Gleichungssystem nicht lösbar, es ist also $L = \emptyset$.

- b) Ist $r = \text{Rang}(A)$ der Rang der Koeffizientenmatrix A , so ist $d = 3 - r$ die Dimension des Lösungsraumes des homogenen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$. Da sich gemäß den Berechnungen unter a)

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & s \\ 0 & s-1 & 1-s \\ 0 & 0 & 2-s-s^2 \end{pmatrix}$$

ergibt, treffen wir erneut die folgende Fallunterscheidung:

- Für $s \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ ist $s - 1 \neq 0$ und $2 - s - s^2 \neq 0$, woraus sich $r = 3$ und damit $d = 0$ ergibt.

- Für $s = -2$ erhält man

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

woraus sich $r = 2$ und damit $d = 1$ ergibt.

- Für $s = 1$ erhält man

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

woraus sich $r = 1$ und damit $d = 2$ ergibt.

1.8 Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccl} x_1 & + & (\lambda + 1)x_2 & + & 2\lambda x_3 & + & 2\lambda x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & \lambda x_3 & + & \lambda x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & 2\lambda x_3 & + & 2\lambda x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & \lambda x_3 & + & 2\lambda x_4 & = & 1 \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_\lambda|b_\lambda)$. Es ist

$$\begin{aligned} (A_\lambda|b_\lambda) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda+1 & 2\lambda & 2\lambda & 2 \\ 1 & \lambda & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 2\lambda & 2\lambda & 2 \\ 1 & \lambda & \lambda & 2\lambda & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{I} \leftrightarrow \text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda+1 & 2\lambda & 2\lambda & 2 \\ 1 & \lambda & 2\lambda & 2\lambda & 2 \\ 1 & \lambda & \lambda & 2\lambda & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[\text{III}-\text{I}, \text{IV}-\text{I}]{\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{II}-\text{IV}, \text{III}-\text{IV}]{\text{I}-\text{IV}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[\text{II}-\text{III}]{\text{I}-\text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{I}-\lambda \cdot \text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $\lambda = 0$ ist

$$(A_0|b_0) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

und damit

$$\text{Rang}(A_0) = 2 < 3 = \text{Rang}(A_0|b_0),$$

folglich ist das lineare Gleichungssystem unlösbar.

- Für $\lambda \neq 0$ ist das lineare Gleichungssystem wegen

$$\text{Rang}(A_\lambda) = 4 = \text{Rang}(A_\lambda|b_\lambda)$$

lösbar, wobei für die Lösungsmenge L_λ dann

$$\dim(L_\lambda) = 4 - \text{Rang}(A_\lambda|b_\lambda) = 4 - 4 = 0$$

gilt; die eindeutige Lösung bestimmt sich zu

$$x_\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.9 Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrrcl} x_1 & + & & & 2x_3 & - & x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & & & = & -3 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & + & & & ax_4 & = & 8 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & b \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_a|b_b)$. Es ist

$$\begin{aligned} (A_a|b_b) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 0 & a & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & b \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{II}-2\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & a & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & b \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[\sim]{\text{III}+3\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & a-3 & 2 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & b \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{IV}-\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & a-3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & b+2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[\sim]{\text{III}-2\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-7 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & b+2 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{IV}-2\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{array} \right) \end{aligned}$$

Damit ist das lineare Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn $b = 0$ gilt; dabei ergibt sich

- für $a = 7$ wegen

$$(A_7|b_0) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{die Lösungsmenge } L = \left\{ \begin{pmatrix} -2 - 2\lambda + \mu \\ 1 - 3\lambda - 2\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \text{ sowie}$$

- für $a \neq 7$ wegen

$$(A_a|b_0) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{III} \cdot \frac{1}{a-7}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{die Lösungsmenge } L = \left\{ \begin{pmatrix} -2 - 2\lambda \\ 1 - 3\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

1.10 Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccl} 2x_1 & + & x_2 & & & & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & \alpha x_4 & = & \beta \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_\alpha|b_\beta)$. Es ist

$$\begin{aligned} (A_\alpha|b_\beta) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{II} - \frac{1}{2} \cdot \text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{III} - \frac{2}{3} \cdot \text{II}} \\ &\xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{IV} - \frac{3}{4} \cdot \text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - \frac{3}{4} & \beta \end{array} \right) \end{aligned}$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $\alpha \neq \frac{3}{4}$ ist $\alpha - \frac{3}{4} \neq 0$ und damit

$$\text{Rang}(A_\alpha) = 4 = \text{Rang}(A_\alpha|b_\beta),$$

weswegen das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung besitzt.

- Für $\alpha = \frac{3}{4}$ und $\beta \neq 0$ ist

$$\text{Rang}(A_\alpha) = 3 < 4 = \text{Rang}(A_\alpha|b_\beta),$$

weswegen das lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

- Für $\alpha = \frac{3}{4}$ und $\beta = 0$ ist

$$\text{Rang}(A_{\frac{3}{4}}) = 3 = \text{Rang}(A_{\frac{3}{4}}|b_0),$$

weswegen das (wegen $b_0 = 0$ sogar homogene) lineare Gleichungssystem einen Lösungsraum L der Dimension $\dim(L) = 4 - 3 = 1$ besitzt; wegen

$$(A_{\frac{3}{4}}|b_0) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ist x_4 eine freie Variable, und einen Basisvektor von L erhält man etwa durch die Wahl $x_4 = 4$ mit $\frac{4}{3}x_3 + x_4 = 0$, also $x_3 = -3$, sowie $\frac{3}{2}x_2 + x_3 = 0$, also $x_2 = 2$, und $2x_1 + x_2 = 0$, also $x_1 = -1$, und folglich ist

$$L = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- 1.11 a) Für das gegebene homogene lineare Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 & -6 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|0)$; dabei ergibt sich

$$\begin{aligned} (A|0) &= \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 4 & -6 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}+3\text{I}, \text{IV}+4\text{I}]{\text{II}+2\text{I}} \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & -16 & 0 \\ 0 & 18 & 18 & -18 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{7}\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & -16 & 0 \\ 0 & 18 & 18 & -18 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \\ &\xrightarrow[\text{III}-16\cdot\text{II}, \text{IV}-18\cdot\text{II}]{\text{I}-5\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Damit sind die beiden Variablen x_3 und x_4 frei, so daß man den Lösungsraum

$$L_0 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erhält.

- b) Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist genau dann das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ für jede rechte Seite $b \in \mathbb{R}^m$ lösbar, wenn $\text{Rang}(A) = m$ erfüllt ist; da hier

$$\text{Rang}(A) = 2 < 4 = m$$

gilt, gibt es Vektoren $b \in \mathbb{R}^4$, für die das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ unlösbar ist. So ergibt sich etwa für $b = e_3$ mit den obigen Umformungen

$$\begin{aligned} (A|b) &= \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 4 & -6 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 6 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & -16 & 1 \\ 0 & 18 & 18 & -18 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & -16 & 1 \\ 0 & 18 & 18 & -18 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right); \end{aligned}$$

wegen $\text{Rang}(A|b) = 3 > 2 = \text{Rang}(A)$ ist also das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ für $b = e_3$ unlösbar.

1.12 Für jeden Spaltenvektor $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ gilt

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & b_1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & b_2 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & b_3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & b_4 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II}+\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & b_2 + b_1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & b_3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & b_4 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}-\text{I}} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3 - b_1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & b_4 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{IV}+\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3 - b_1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & b_4 + b_1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{IV}-\text{II}} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_4 - b_2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{IV}-\text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 - b_2 - b_3 + b_1 \end{array} \right).$$

a) Damit besitzt das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ genau dann keine

Lösung, wenn $b_4 - b_2 - b_3 + b_1 \neq 0$ gilt; somit ist $L = \emptyset$ für $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

b) Das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ besitzt genau dann (mindestens) eine Lösung, wenn $b_4 - b_2 - b_3 + b_1 = 0$ gilt. In diesem Fall erhält man aber

$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

damit ist x_4 eine freie Variable, und das lineare Gleichungssystem besitzt schon unendlich viele Lösungen. Folglich kann es kein $b \in \mathbb{R}^4$ gegen, so daß das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ genau eine Lösung besitzt.

c) Es ist

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

mit $x_4 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig erhält man

- $x_3 = -2x_4 = -2\lambda$,
- $2x_2 = 2 - x_3 = 2 + 2\lambda$, also $x_2 = 1 + \lambda$, und
- $x_1 = 1 - 4x_2 - x_3 = 1 - 4(1 + \lambda) + 2\lambda = -3 - 2\lambda$.

Damit ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -3 - 2\lambda \\ 1 + \lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Lösungsmenge des gegebenen linearen Gleichungssystems.

1.13 Für das gegebene lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -a & 1 & 2 \\ -2 & 2 & a \end{pmatrix} \text{ für } a \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_a|b)$. Es ist

$$\begin{aligned} (A_a|b) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -a & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & a & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}+2 \cdot \text{II}]{\text{II}+a \cdot \text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 2+a & 2+a \\ 0 & 4 & 2+a & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III} \leftrightarrow \text{II}]{\sim} \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2+a & 5 \\ 0 & 1+a & 2+a & 2+a \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III} \cdot 4]{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2+a & 5 \\ 0 & 4(1+a) & 4(2+a) & 4(2+a) \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[\text{III}-(1+a) \cdot \text{II}]{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2+a & 5 \\ 0 & 0 & (3-a)(2+a) & 3-a \end{array} \right), \end{aligned}$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$ ist $3-a \neq 0$ und $2+a \neq 0$, und wir erhalten
 - $(3-a)(2+a)x_3 = (3-a)$, also $x_3 = \frac{1}{2+a}$,
 - $4x_2 + \frac{2+a}{2+a} = 5$, also $x_2 = 1$,
 - $x_1 + 1 + \frac{1}{2+a} = 1$, also $x_1 = -\frac{1}{2+a}$.

Damit besitzt das gegebene lineare Gleichungssystem genau eine Lösung mit

$$L_a = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2+a} \\ 1 \\ \frac{1}{2+a} \end{pmatrix} \right\}.$$

- Für $a = -2$ gilt

$$(A_{-2}|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right);$$

wegen des Widerspruchs in der dritten Zeile ist das gegebene lineare Gleichungssystem für $a = -2$ unlösbar.

- Für $a = 3$ gilt

$$(A_3|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

damit ist x_3 eine freie Variable, und mit $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig ergibt sich $4x_2 + 5\lambda = 5$, also $x_2 = \frac{5}{4} - \frac{5}{4}\lambda$ sowie $x_1 + \frac{5}{4} - \frac{5}{4}\lambda + \lambda = 1$, also $x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\lambda$. Somit ist

$$L_3 = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\lambda \\ \frac{5}{4} - \frac{5}{4}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

die Lösungsmenge des durch $(A_3|b)$ gegebenen Gleichungssystems.

1.14 Für das gegebene lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & t & 7 \\ 3 & t+2 & t+4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$; dabei ergibt sich

$$\begin{aligned} (A|b) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & t & 7 & 3 \\ 3 & t+2 & t+4 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \xrightarrow{\text{II}-2\cdot\text{I}} \\ \xrightarrow{\text{III}-3\cdot\text{I}} \end{array} \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & t-4 & 1 & 1 \\ 0 & t-4 & t-5 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & t-4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & t-6 & 0 \end{array} \right), \end{aligned}$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $t \in \mathbb{R} \setminus \{4, 6\}$ ist $t-4 \neq 0$ sowie $t-6 \neq 0$ und damit

$$\text{Rang}(A|b) = 3 = \text{Rang}(A),$$

weshalb das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ lösbar ist; da keine der Variablen frei ist, ist das System eindeutig lösbar.

- Für $t = 4$ ist

$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}+2\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right),$$

und wegen

$$\text{Rang}(A|b) = 3 > 2 = \text{Rang}(A)$$

ist das lineare Gleichungssystem unlösbar.

- Für $t = 6$ ist

$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I}-\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

und wegen

$$\text{Rang}(A|b) = 2 = \text{Rang}(A)$$

ist das lineare Gleichungssystem lösbar; da für die Lösungsmenge L dann

$$\dim L = 3 - \text{Rang}(A) = 3 - 2 = 1$$

gilt, ist das System mehrdeutig lösbar, und es gilt

$$L = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.15 Für das gegebene lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 8 \\ -1 & 3 & \alpha - 3 & -12 \\ 2 & \alpha & 6 & \alpha^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$; dabei ergibt sich

$$\begin{aligned} (A|b) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 8 & 1 \\ -1 & 3 & \alpha - 3 & -12 & 0 \\ 2 & \alpha & 6 & \alpha^2 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III} - 2 \cdot \text{I}]{\text{II} + \text{I}} \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & -4 & 1 \\ 0 & \alpha + 4 & 0 & \alpha^2 - 16 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III} - (\alpha + 4) \cdot \text{II}]{\text{I} + 2 \cdot \text{II}} \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 + 2\alpha & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \alpha & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha(\alpha + 4) & \alpha(\alpha + 4) & -\alpha \end{array} \right) \end{aligned}$$

a) Für $\alpha = -3$ ergibt sich ferner

$$\begin{aligned} (A|b) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{II} + \text{III}]{\text{I} + \text{III}} \\ &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} \cdot \frac{1}{3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right), \end{aligned}$$

so daß

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 6 + 3\lambda \\ 4 + 7\lambda \\ 1 + \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge des Gleichungssystems darstellt.

b) Wir treffen die folgende Fallunterscheidung:

- Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\}$ gilt $-\alpha(\alpha + 4) \neq 0$ und damit

$$\text{Rang}(A|b) = 3 = \text{Rang}(A);$$

folglich ist das Gleichungssystem lösbar, und für die Dimension des Lösungsraums ergibt sich $4 - \text{Rang}(A) = 1$.

- Für $\alpha = -4$ ergibt sich

$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right);$$

wegen $\text{Rang}(A|b) = 3 \neq 2 = \text{Rang}(A)$ ist das Gleichungssystem nicht lösbar.

- Für $\alpha = 0$ ergibt sich

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

wegen $\text{Rang}(A|b) = 2 = \text{Rang}(A)$ ist das Gleichungssystem lösbar, und für die Dimension des Lösungsraumes ergibt sich $4 - \text{Rang}(A) = 2$.

1.16 Das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit der Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und der rechten Seite $b \in \mathbb{R}^m$ ist genau dann lösbar, wenn

$$\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b)$$

gilt; in diesem Fall gilt für die Dimension d des Lösungsraumes

$$d = n - \text{Rang}(A).$$

Hier ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \alpha \\ 2 & 6 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 + \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Wegen

$$\begin{aligned} (A|b) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & \alpha & 1 \\ 2 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & \alpha & \alpha^2 & 3 + \beta \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}-3 \cdot \text{I}]{\text{II}-2 \cdot \text{I}} \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2\alpha & -2 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha^2 - 3\alpha & \beta \end{array} \right) \end{aligned}$$

treffen wir die folgende Fallunterscheidung:

- Im Fall $\alpha \neq 0$ ist

$$\text{Rang}(A) = 3 = \text{Rang}(A|b);$$

damit ist das Gleichungssystem (unabhängig von β) lösbar, und es gilt $d = 4 - 3 = 1$.

- Im Fall $\alpha = 0$ ist

$$\text{Rang}(A) = 2 \quad \text{und} \quad \text{Rang}(A|b) = \begin{cases} 2, & \text{falls } \beta = 0, \\ 3, & \text{falls } \beta \neq 0; \end{cases}$$

damit ist das Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn $\beta = 0$ ist, und es gilt $d = 4 - 2 = 2$.

b) Im Fall $\alpha = \beta = 0$ ergibt sich

$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I}-\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

damit sind x_3 und x_4 die freien Unbestimmten, und man erhält die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 3 - 2\lambda \\ \lambda - 1 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Im Fall $\alpha = \beta = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} (A|b) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II}+2\cdot\text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I}-\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right); \end{aligned}$$

damit ist x_4 die freie Unbestimmte, und man erhält die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - 7\lambda \\ 3\lambda \\ 1 + 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

- 1.17 a) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$ ist; wegen

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & 2 & t \\ 1 & t & 3 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Regel von Sarrus}}{=} (6 + t^2 + t^4) - (2t^2 + t^2 + 3t^2) = \\ &= t^4 - 5t^2 + 6 \stackrel{\text{Satz von Vieta}}{=} (t^2 - 2)(t^2 - 3) \end{aligned}$$

ist dies genau dann der Fall, wenn $t^2 \neq 2$ und $t^2 \neq 3$ ist, also genau für $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}\}$.

- b) Für das gegebene lineare Gleichungssystem betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix und erhalten

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & t^2 & 1 \\ t & 2 & t & 2 \\ 1 & t & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}-t\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & t^2 & 1 \\ 0 & 2-t^2 & t-t^3 & 2-t \\ 0 & 0 & 3-t^2 & 0 \end{array} \right),$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}\}$ ist die Koeffizientenmatrix $A \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ invertierbar und damit das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar; wegen $2 - t^2 \neq 0$ und $3 - t^2 \neq 0$ ergibt sich
 - zunächst $(3 - t^2)x_3 = 0$, also $x_3 = 0$,
 - dann $(2 - t^2)x_2 + (t - t^3)x_3 = 2 - t$, also $x_2 = \frac{2 - t}{2 - t^2}$, und
 - schließlich $x_1 + tx_2 + t^2x_3 = 1$, also

$$x_1 = 1 - t \cdot \frac{2 - t}{2 - t^2} = \frac{(2 - t^2) - t(2 - t)}{2 - t^2} = \frac{2 - 2t}{2 - t^2},$$

zusammen also

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2-2t}{2-t^2} \\ \frac{2-t}{2-t^2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Für $t = \pm\sqrt{3}$ ist $t^2 = 3$ und damit

$$\begin{aligned} (A \mid b) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2t & 2-t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I}+t \cdot \text{II}} \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3-2t^2 & 1+2t-t^2 \\ 0 & -1 & -2t & 2-t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1) \cdot \text{II}} \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2t-2 \\ 0 & 1 & 2t & t-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right); \end{aligned}$$

wegen $\text{Rang}(A) = 2 = \text{Rang}(A \mid b)$ ist das lineare Gleichungssystem lösbar, und für die Lösungsmenge L mit $\dim L = 3 - \text{Rang}(A) = 1$ ergibt sich

$$L = \begin{pmatrix} 2t-2 \\ t-2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Für $t = \pm\sqrt{2}$ ist $t^2 = 2$ und damit

$$\begin{aligned} (A \mid b) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -t & 2-t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II} \leftrightarrow \text{III}} \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 2-t \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}+t \cdot \text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-t \end{array} \right); \end{aligned}$$

wegen $2-t \neq 0$ ist $\text{Rang}(A) = 2 < 3 = \text{Rang}(A \mid b)$, und damit ist das lineare Gleichungssystem unlösbar.

1.18 Es ist $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ genau dann ein gemeinsamer Punkt der drei Ebenen

$$\begin{aligned} E_1 &: x - \frac{1}{4}y - 2z + 1 = 0 \\ E_2 &: 2x - \frac{5}{2}y - 5z - \lambda = 0 \\ E_3 &: 4x + \lambda y - 6z - \mu = 0 \end{aligned}$$

wenn seine Koordinaten den drei Ebenengleichungen genügen, er also Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{4}y - 2z &= -1 \\ 2x - \frac{5}{2}y - 5z &= \lambda \\ 4x + \lambda y - 6z &= \mu \end{aligned}$$

mit der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -2 \\ 2 & -\frac{5}{2} & -5 \\ 4 & \lambda & -6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

ist. Mit der Regel von Sarrus ergibt sich

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -2 \\ 2 & -\frac{5}{2} & -5 \\ 4 & \lambda & -6 \end{vmatrix} = (15 + 5 - 4\lambda) - (20 - 5\lambda + 3) = \lambda - 3,$$

so daß für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ die Matrix A wegen $\det(A) \neq 0$ invertierbar ist; folglich ist in diesem Fall das durch $(A|b)$ gegebene lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar, die drei Ebenen E_1 , E_2 und E_3 schneiden sich also in genau einem Punkt.

Für die hier zu betrachtenden Fälle muß also $\lambda = 3$ gelten, und dabei gilt

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{4} & -2 & -1 \\ 2 & -\frac{5}{2} & -5 & 3 \\ 4 & 3 & -6 & \mu \end{array} \right) \xrightarrow[2 \cdot \text{II}]{4 \cdot \text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -8 & -4 \\ 4 & -5 & -10 & 6 \\ 4 & 3 & -6 & \mu \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -8 & -4 \\ 0 & -4 & -2 & 10 \\ 0 & 4 & 2 & \mu+4 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}+\text{IV}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -8 & -4 \\ 0 & -4 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & \mu+14 \end{array} \right),$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{-14\}$ ist $\mu + 14 \neq 0$ und damit

$$\text{Rang}(A) = 2 < 3 = \text{Rang}(A|b);$$

folglich ist das durch $(A|b)$ gegebene lineare Gleichungssystem unlösbar, und die drei Ebenen E_1 , E_2 und E_3 haben keinen gemeinsamen Punkt.

- Für $\mu = -14$ ergibt sich

$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -8 & -4 \\ 0 & -4 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

so daß das durch $(A|b)$ gegebene lineare Gleichungssystem wegen

$$\text{Rang}(A) = 2 = \text{Rang}(A|b)$$

lösbar ist und die Lösungsmenge L die Dimension $3 - \text{Rang}(A) = 1$ besitzt. Folglich schneiden sich die drei Ebenen E_1 , E_2 und E_3 in der Geraden

$$L = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

- 1.19 a) Wir betrachten für das durch die beiden Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccl} x_1 & + & (2-b)x_2 & - & 2x_3 & & = & 1-b \\ & & & & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & a-1 \\ 2x_1 & - & & 2bx_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3-a-2b \end{array}$$

die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix und erhalten

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2-b & -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & -2 & 1 & a-1 \\ 2 & -2b & 1 & -1 & 3-a-2b \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}-2\cdot\text{I}]{\rightsquigarrow} \\ & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2-b & -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & -2 & 1 & a-1 \\ 0 & -4 & 5 & -1 & 1-a \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}+4\cdot\text{II}]{\rightsquigarrow} \\ & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2-b & -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & -2 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 3a-3 \end{array} \right) \xrightarrow[(-\frac{1}{3})\cdot\text{III}]{\rightsquigarrow} \\ & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2-b & -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & -2 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1-a \end{array} \right). \end{aligned}$$

Damit ist das lineare Gleichungssystem lösbar, und besitzt in x_4 genau eine freie Variable; folglich ist die Lösungsmenge L eine (affine) Gerade. Für eine partikuläre Lösung x_p des inhomogenen Gleichungssystems (also einen Trägerpunkt von L) ergibt sich für $x_4 = a$ dann

- $x_3 - x_4 = 1 - a$, also $x_3 = (1 - a) + x_4 = 1$,
- $x_2 - 2x_3 + x_4 = a - 1$, also $x_2 = (a - 1) + 2x_3 - x_4 = 1$,
- $x_1 + (2 - b)x_2 - 2x_3 = 1 - b$, also $x_1 = (1 - b) - (2 - b)x_2 + 2x_3 = 1$,

insgesamt damit

$$x_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}^\top;$$

für einen Basisvektor u des Lösungsraums des homogenen Gleichungssystems (also einen Richtungsvektor von L) ergibt sich für $x_4 = 1$ dann

- $x_3 - x_4 = 0$, also $x_3 = x_4 = 1$,
- $x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$, also $x_2 = 2x_3 - x_4 = 1$,
- $x_1 + (2 - b)x_2 - 2x_3 = 0$, also $x_1 = -(2 - b)x_2 + 2x_3 = b$,

insgesamt damit

$$u = \begin{pmatrix} b & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top.$$

Folglich erhält man

$$L = x_p + \mathbb{R} \cdot u = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Der Punkt

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda b \\ 1 + \lambda \\ 1 + \lambda \\ a + \lambda \end{pmatrix} \in L$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ liegt genau dann in der Hyperebene H des $\mathbb{R}^4$ mit der Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

wenn

$$(1 + \lambda b) + (1 + \lambda) + (1 + \lambda) + (a + \lambda) = 0,$$

also

$$(b + 3) \lambda + (3 + a) = 0 \quad \text{bzw.} \quad (*) \quad (b + 3) \lambda = -(3 + a)$$

gilt; dies motiviert die folgende Fallunterscheidung:

- Für $b \neq -3$ besitzt $(*)$ genau eine Lösung, nämlich $\lambda = -\frac{3+a}{b+3}$; folglich ist $L \cap H$ ein Punkt.
- Für $b = -3$ besitzt $(*)$ die Gestalt $0 = -(3 + a)$ und damit
 - für $a \neq -3$ keine Lösung, weswegen dann $L \cap H$ leer ist, sowie
 - für $a = -3$ die Lösungsmenge $\mathbb{R}$, weswegen dann $L \subseteq H$ gilt.

1.20 a) Wir betrachten für das durch ein Parameterpaar $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & s^2 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & st \\ 3x_1 & - & 3x_2 & & & = & t^2 \end{array}$$

die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix; wegen

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & s^2 \\ 2 & 1 & -3 & st \\ 3 & -3 & 0 & t^2 \end{array} \right) &\xrightarrow{\text{II}-2\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & s^2 \\ 0 & -1 & 1 & st - 2s^2 \\ 3 & -3 & 0 & t^2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}-3\cdot\text{I}} \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & s^2 \\ 0 & -1 & 1 & st - 2s^2 \\ 0 & -6 & 6 & t^2 - 3s^2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}-6\cdot\text{II}} \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & s^2 \\ 0 & -1 & 1 & st - 2s^2 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 - 6st + 9s^2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

ist das Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn

$$t^2 - 6st + 9s^2 = (t - 3s)^2 = 0$$

gilt, also im Falle $t = 3s$. Damit ist aber die Menge

$$\ell = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t = 3s\} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

eine Gerade in $\mathbb{R}^2$; es handelt sich im s - t -Diagramm um die Ursprungsgerade mit der Steigung 3.

b) Sei nun $(s, t) \in \ell$, also $t = 3s$; wegen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \left| & s^2 \\ 2 & 1 & -3 & \left| & st \\ 3 & -3 & 0 & \left| & t^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{a)}]{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \left| & s^2 \\ 0 & -1 & 1 & \left| & s^2 \\ 0 & 0 & 0 & \left| & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I}+\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \left| & 2s^2 \\ 0 & -1 & 1 & \left| & s^2 \\ 0 & 0 & 0 & \left| & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1) \cdot \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \left| & 2s^2 \\ 0 & 1 & -1 & \left| & -s^2 \\ 0 & 0 & 0 & \left| & 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir als Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$L_{(s,t)} = \begin{pmatrix} 2s^2 \\ -s^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.21 Wir betrachten für das durch die drei Parameter $r, s, t \in \mathbb{R}$ gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccl} x_1 & + & 2x_2 & & & + & 2x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & rx_3 & & & = & 1 \\ sx_1 & & & + & x_3 & + & tx_4 & = & 1 \end{array}$$

die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & r & 0 & 1 \\ s & 0 & 1 & t & 1 \end{array} \right);$$

ist nun das Gleichungssystem lösbar, so gibt die Anzahl der freien Variablen die Dimension der Lösungsmenge an.

a) Wegen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & \left| & 4 \\ 2 & 4 & r & 0 & \left| & 1 \\ s & 0 & 1 & t & \left| & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}-2 \cdot \text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & \left| & 4 \\ 0 & 0 & r & -4 & \left| & -7 \\ s & 0 & 1 & t & \left| & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-s \cdot \text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & \left| & 4 \\ 0 & 0 & r & -4 & \left| & -7 \\ 0 & -2s & 1 & t-2s & \left| & 1-4s \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} \leftrightarrow \text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & \left| & 4 \\ 0 & -2s & 1 & t-2s & \left| & 1-4s \\ 0 & 0 & r & -4 & \left| & -7 \end{pmatrix}$$

treffen wir die folgende Fallunterscheidung:

- Fall 1: $s \neq 0$. Damit sind
 - im Falle $r \neq 0$ die Variablen x_1, x_2, x_3 gebunden sowie x_4 frei sowie
 - im Falle $r = 0$ die Variablen x_1, x_2, x_4 gebunden sowie x_3 frei;
 auf jeden Fall ist das Gleichungssystem lösbar mit einer affinen Geraden als Lösungsmenge.

- Fall 2: $s = 0$. Wegen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & | & 4 \\ 2 & 4 & r & 0 & | & 1 \\ s & 0 & 1 & t & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{s.o.}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & t & | & 1 \\ 0 & 0 & r & -4 & | & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} - r \cdot \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & t & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 - rt & | & -7 - r \end{pmatrix}$$

sind auf jeden Fall x_1 und x_3 gebunden sowie x_2 frei, so daß das Gleichungssystem genau dann eine affine Gerade als Lösungsmenge besitzt, wenn x_4 ebenfalls gebunden ist, also genau im Falle $-4 - rt \neq 0$ bzw. $rt \neq -4$.

- b) Gemäß a) ist die Menge C aller Parametertripel $(r, s, t) \in \mathbb{R}^3$, für welche die Lösungsmenge des gegebenen Gleichungssystems keine affine Gerade ist, genau

$$C = \{(r, s, t) \in \mathbb{R}^3 \mid s = 0 \text{ und } rt = -4\}.$$

Damit liegt C in der Ebene $s = 0$, also in der (r, t) -Koordinatenebene; es handelt sich dabei um den Graphen der Funktion $r \mapsto t = -\frac{4}{r}$, also um eine Hyperbel. Zu demselben Ergebnis gelangt man über die Betrachtung der entsprechenden Normalform.

- c) Das gegebene Gleichungssystem kann höchstens für diejenigen Parametertripel $(r, s, t) \in C$ eine affine Ebene als Lösungsmenge besitzen, gemäß b) also nur im Fall $s = 0$ und $rt = -4$. Wegen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & | & 4 \\ 2 & 4 & r & 0 & | & 1 \\ s & 0 & 1 & t & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{a)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & t & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -7 - r \end{pmatrix}$$

ist das Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn $-7 - r = 0$ gilt; damit muß $r = -7$ und wegen $rt = -4$ auch $t = \frac{4}{7}$ gelten. Für diese Wahl der Parameter ergibt sich als Lösungsmenge

$$L = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix},$$

also eine affine Ebene.