



Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2012): Differential- und Integralrechnung 2 — Lösungsvorschlag —

- 2.1 a) Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ handelt es sich bei der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x+3}{(x-3)^k}$ um eine geometrische Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} c q^k \quad \text{mit} \quad c = x+3 \quad \text{und} \quad q = \frac{1}{x-3};$$

diese konvergiert aber genau für $c = 0$ oder $|q| < 1$ und besitzt dann die Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c q^k = \frac{c}{1-q}.$$

Wegen

$$|q| < 1 \iff \frac{1}{|x-3|} < 1 \iff 1 < |x-3| \iff x < 2 \text{ oder } x > 4$$

konvergiert also die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x+3}{(x-3)^k}$ genau für alle

$$x \in]-\infty; 2[\cup]4; \infty[= \mathbb{R} \setminus [2; 4],$$

und für die Summe der Reihe gilt dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x+3}{(x-3)^k} = \frac{x+3}{1 - \frac{1}{x-3}} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3) - 1} = \frac{x^2 - 9}{x-4}.$$

- b) Wir nehmen zum Widerspruch an, die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k} \right)$$

sei konvergent; da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ bekanntlich konvergiert, müßte dann auch die Differenz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k} \right) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

konvergieren; diese ist allerdings als harmonische Reihe divergent.

2.2 a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ ist $n^2 - 3n + 1 = n(n - 3) + 1 > 0$ und damit

$$\frac{n+4}{n^2-3n+1} \geq \frac{n}{n^2-3n+1} \geq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n};$$

damit besitzt die Reihe $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$ die harmonische Reihe $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ als divergente Minorante und ist damit nach dem Minorantenkriterium selbst divergent, weswegen auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$ divergiert.

b) Für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ mit $a_n = \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

- Wegen

$$a_n = \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n} = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\rightarrow e} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge.

- Wegen

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^n \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot (n+1)^{n-1}} = \frac{((n+2)n)^n}{(n+1)^{2n}} = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} \right)^n \leq 1$$

und damit $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton fallend.

Damit ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}$ nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium für alternierende Reihen konvergent.

2.3 Die Reihe $\sum_{k \geq 1} a_k$ mit $a_k = \frac{2^k}{k^{10}}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ lässt sich sowohl mit dem Wurzelkriterium über

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{2^k}{k^{10}}} = \frac{\sqrt[k]{2^k}}{\sqrt[k]{k^{10}}} = \frac{2}{(\sqrt[k]{k})^{10}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{2}{1^{10}} = 2 > 1$$

als auch mit dem Quotientenkriterium über

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{2^{k+1} \cdot k^{10}}{(k+1)^{10} \cdot 2^k} = \frac{2}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^{10}} = \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{10}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{2}{1^{10}} = 2 > 1$$

untersuchen; beide Kriterien liefern sofort deren Divergenz.

Des weiteren gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{3k^2+1}{k^4+1} \leq \frac{3k^2+1}{k^4} \leq \frac{4k^2}{k^4} = \frac{4}{k^2};$$

da mit der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}$ konvergiert, besitzt damit die Reihe $\sum_{k \geq 1} \frac{3k^2 + 1}{k^4 + 1}$ in der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}$ eine konvergente Majorante und ist damit nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent.

2.4 a) Wir verwenden, daß die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c q^n$ genau dann konvergiert, wenn $c = 0$ oder $|q| < 1$ ist. Zunächst gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{2^n}{3^n + 4^n} \right| = \frac{2^n}{3^n + 4^n} \leq \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3} \right)^n ;$$

damit besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + 4^n}$ die konvergente Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n$ und ist folglich nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent. Ferner gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{4^n}{2^n + 3^n} \geq \frac{4^n}{3^n + 3^n} = \frac{4^n}{2 \cdot 3^n} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \right)^n ;$$

damit besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2^n + 3^n}$ die divergente Minorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \right)^n$ und ist folglich nach dem Minorantenkriterium selbst divergent.

b) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(k+2) - k}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) ,$$

weswegen sich für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ für die n -te Partialsumme s_n der gegebenen Reihe

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

ergibt; wegen

$$s_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\rightarrow 0} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

konvergiert die gegebene Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ mit dem Grenzwert $\frac{3}{4}$.

2.5 a) Zu betrachten ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{3^{n^2}}{2^{n^3}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; wegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{3^{n^2}}{2^{n^3}}} = \frac{\sqrt[n]{3^{n^2}}}{\sqrt[n]{2^{n^3}}} = \frac{3^n}{2^{n^2}} = \underbrace{\left(\frac{3}{2^n}\right)^n}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1$$

ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Wurzelkriterium (absolut) konvergent.

b) Zu betrachten ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{(-2)^n}{\sqrt{n^2 + n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; wegen

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(-2)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^2 + (n+1)}} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n}}{(-2)^n} \right| = \\ &= \left| (-2) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n}}{\sqrt{n^2 + 3n + 2}} \right| = 2 \cdot \sqrt{\frac{n^2 + n}{n^2 + 3n + 2}} = \\ &= 2 \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \sqrt{\frac{1 + 0}{1 + 0 + 0}} = 2 > 1 \end{aligned}$$

ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium divergent.

2.6 a) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \quad \text{also} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{n^2}{2^n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

läßt sich wahlweise mit dem Quotientenkriterium oder dem Wurzelkriterium auf Konvergenz untersuchen; sie ist nämlich zum einen wegen

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} \right| = \frac{(n+1)^2}{2 \cdot n^2} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

nach dem Quotientenkriterium sowie wegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

nach dem Wurzelkriterium absolut konvergent.

b) Für die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n, \quad \text{also} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

gilt

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e};$$

damit ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Reihenglieder keine Nullfolge, insbesondere also die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht konvergent.

c) Für die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^4} \right), \quad \text{also} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^4} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

gilt unter Verwendung der Gaußschen Summenformel

$$|a_n| = \left| \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^4} \right| = \frac{1}{n^4} \cdot \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n^4} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{n^3} \cdot \underbrace{\frac{n+1}{2}}_{\leq \frac{n+n}{2} = n} \leq \frac{1}{n^2};$$

damit besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die (bekanntlich konvergente) Majorante

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und ist folglich nach dem Majorantenkriterium absolut konvergent.

2.7 Wir betrachten neben der gegebenen Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{\ln n}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

die sie interpolierende Funktion

$$f : [1; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\ln x}{x};$$

es ist also $a_n = f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Die Funktion f ist (als Quotient des natürlichen Logarithmus und einer linearen Funktion) differenzierbar, und für alle $x \geq 1$ gilt

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Für alle $x > e$ ist $\ln x > \ln e = 1$ und damit $f'(x) < 0$, so daß f auf dem Intervall $]e; \infty[$ streng monoton fällt; damit folgt insbesondere

$$a_n = f(n) > f(n+1) = a_{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{mit } n \geq 3.$$

b) Mit Hilfe der Regel von de l'Hospital erhält man den Funktionengrenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{L'H}}{\underset{„\frac{0}{\infty}“}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

insbesondere ergibt sich der Folgengrenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0;$$

mit der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist auch jede ihrer Teilfolgen $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

- c) Die Folge $(a_n)_{n \geq 3}$ ist gemäß a) (streng) monoton fallend und gemäß b) eine Nullfolge, so daß die alternierende Reihe $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n a_n$ nach dem Leibnizkriterium konvergiert; damit ist aber auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent.
- d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ gilt $\ln n \geq \ln 3 > 1$ und damit

$$\left| (-1)^n \cdot \frac{\ln n}{n} \right| = \left| \frac{\ln n}{n} \right| = \frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n};$$

folglich besitzt die Reihe $\sum_{n=3}^{\infty} \left| (-1)^n \cdot \frac{\ln n}{n} \right|$ die (bekanntlich divergente) Minorante $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ und ist damit nach dem Minorantenkriterium selbst divergent. Da demnach auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \cdot \frac{\ln n}{n} \right|$ divergiert, ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\ln n}{n}$ nicht absolut konvergent.

2.8 Zu betrachten ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{(\ln x)^n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left| \frac{(\ln x)^n}{n} \right|} = \sqrt[n]{\frac{|\ln x|^n}{n}} = \frac{|\ln x|}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |\ln x|$$

ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Wurzelkriterium

- für alle $x \in \mathbb{R}^+$ mit $|\ln x| < 1$ (absolut) konvergent, wegen

$$|\ln x| < 1 \iff -1 < \ln x < 1 \iff e^{-1} < x < e^1$$

also für $x \in]\frac{1}{e}; e[$, sowie

- für alle $x \in \mathbb{R}^+$ mit $|\ln x| > 1$ divergent, wegen

$$|\ln x| > 1 \iff \ln x < -1 \text{ oder } 1 < \ln x \iff x < e^{-1} \text{ oder } e^1 < x$$

also für $x \in]0; \frac{1}{e}[\cup]e; \infty[$.

Es sind noch die Fälle $x = \frac{1}{e}$ und $x = e$ zu untersuchen:

- Für $x = \frac{1}{e}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln \frac{1}{e})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

als alternierende harmonische Reihe konvergent, und

- für $x = e$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln e)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

als harmonische Reihe divergent.

Insgesamt konvergiert also die gegebene Reihe genau für alle $x \in [\frac{1}{e}; e[$.

2.9 Zu betrachten ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x = 0$

gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$; damit ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Für $x \neq 0$ ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, und es gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\ln(n+1) \cdot x^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\ln(n) \cdot x^n} \right| = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \cdot |x|$$

mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(t+1)}{\ln(t)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{t+1}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{t}} = 1$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}} \stackrel{\text{stetig}}{=} \sqrt{\frac{1}{1+0}} = 1,$$

insgesamt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}}_{\rightarrow 1} \cdot |x| \right) = |x|.$$

Damit ist nach dem Quotientenkriterium die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ absolut konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergent, weswegen noch der Fall $|x| = 1$ gesondert zu behandeln ist.

- Im Falle $x = 1$ ist

$$a_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \stackrel{\ln(n) \geq 1}{\geq} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{für alle } n \geq 3;$$

damit besitzt die Reihe $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ die Reihe $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ als divergente Minorante und ist damit nach dem Minorantenkriterium selbst divergent, weswegen auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ divergiert.

- Im Falle $x = -1$ ist

$$a_n = (-1)^n b_n \quad \text{mit} \quad b_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N};$$

wir betrachten daher die Hilfsfunktion

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}.$$

Wegen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{t}} = 0$$

ist $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, und wegen

$$f'(t) = \frac{\sqrt{t} \cdot \frac{1}{t} - \ln(t) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}}{(\sqrt{t})^2} = \frac{2 - \ln(t)}{2(\sqrt{t})^3} < 0 \quad \text{für alle } t > e^2$$

ist $(b_n)_{n \geq 8}$ monoton fallend; damit ist nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium die alternierende Reihe $\sum_{n=8}^{\infty} (-1)^n b_n = \sum_{n=8}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} (-1)^n$ konvergent, weswegen auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} (-1)^n$ konvergiert.

Damit konvergiert die gegebene Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} x^n$ genau für $x \in [-1; 1[$.

2.10 In Abhängigkeit vom Parameter $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{(2x)^n}{1 + x^{2n}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

zu betrachten. Für $x = 0$ ist $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Für $x \neq 0$ ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(2x)^{n+1}}{1 + x^{2(n+1)}} \cdot \frac{1 + x^{2n}}{(2x)^n} \right| = \left| \frac{(2x)^{n+1}}{(2x)^n} \cdot \frac{1 + x^{2n}}{1 + x^{2n+2}} \right| = 2|x| \cdot \frac{1 + x^{2n}}{1 + x^{2n+2}},$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Fall 1: $0 < |x| < 1$. Damit ist $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 0$ sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+2} = 0$, woraus sich

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 2|x| \cdot \frac{1 + x^{2n}}{1 + x^{2n+2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2|x| \cdot \frac{1 + 0}{1 + 0} = 2|x|$$

ergibt; nach dem Quotientenkriterium ist also in diesem Fall die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- für $2|x| < 1$, also für $0 < |x| < \frac{1}{2}$, konvergent sowie
- für $2|x| > 1$, also für $\frac{1}{2} < |x| < 1$, divergent.

Für $2|x| = 1$, also für $|x| = \frac{1}{2}$, ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gemäß

$$|a_n| = \left| \frac{(2x)^n}{1+x^{2n}} \right| = \frac{|2x|^n}{1+x^{2n}} = \frac{(2|x|)^n}{1+(x^2)^n} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+0} = 1$$

keine Nullfolge und damit insbesondere die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

- Fall 2: $|x| = 1$. Damit ist $x^{2n} = 1$ sowie $x^{2n+2} = 1$ und folglich

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 2|x| \cdot \frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1+1}{1+1} = 2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, weswegen die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium divergiert.

- Fall 3: $|x| > 1$. Damit ist $0 < \frac{1}{|x|} < 1$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{|x|}\right)^{2n} = 0$, woraus sich

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= 2|x| \cdot \frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}} = 2|x| \cdot \frac{x^{2n} \left(\frac{1}{x^{2n}} + 1\right)}{x^{2n} \left(\frac{1}{x^{2n}} + x^2\right)} = \\ &= 2|x| \cdot \frac{\frac{1}{x^{2n}} + 1}{\frac{1}{x^{2n}} + x^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2|x| \cdot \frac{0+1}{0+x^2} = 2|x| \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{2|x|}{|x|^2} = \frac{2}{|x|} \end{aligned}$$

ergibt; nach dem Quotientenkriterium ist also in diesem Fall die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- für $\frac{2}{|x|} < 1$, also für $2 < |x|$, konvergent sowie
- für $\frac{2}{|x|} > 1$, also für $1 < |x| < 2$, divergent.

Für $\frac{2}{|x|} = 1$, also für $|x| = 2$, ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gemäß

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{(2x)^n}{1+x^{2n}} \right| = \frac{|2x|^n}{1+x^{2n}} = \frac{(2|x|)^n}{1+(x^2)^n} = \frac{4^n}{1+4^n} = \\ &= \frac{4^n}{4^n \left(\frac{1}{4^n} + 1\right)} = \frac{1}{\frac{1}{4^n} + 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{0+1} = 1 \end{aligned}$$

keine Nullfolge und damit insbesondere die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Insgesamt konvergiert die gegebene Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn

$$|x| < \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad |x| > 2$$

ist, also genau für alle

$$x \in]-\infty; -2[\cup]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[\cup]2; +\infty[.$$

2.11 a) Zu betrachten ist die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{1}{\ln(n^2 - n)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ist

$$\ln(n^2 - n) = \ln(n \cdot (n - 1)) = \ln n + \underbrace{\ln(n - 1)}_{\geq \ln 1 = 0} \geq \ln n \geq \ln 2 > 0$$

mit

$$\underbrace{\ln n}_{\leq \ln(n+1)} + \underbrace{\ln(n-1)}_{\leq \ln n} \leq \ln(n+1) + \ln n$$

und damit

$$a_n = \frac{1}{\ln n + \ln(n-1)} \geq \frac{1}{\ln(n+1) + \ln n} = a_{n+1}$$

sowie

$$\underbrace{\ln n}_{\rightarrow \infty} + \underbrace{\ln(n-1)}_{\rightarrow \infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

und damit

$$a_n = \frac{1}{\ln n + \ln(n-1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0;$$

folglich ist $(a_n)_{n \geq 2}$ eine monoton fallende Nullfolge, so daß die alternierende

Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$ nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium konvergiert.

Das Leibnizkriterium trifft allerdings keine Aussage über die absolute Konvergenz von $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$, also die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} |(-1)^n a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \stackrel{a_n > 0}{=} \sum_{n=2}^{\infty} a_n.$$

Wegen

$$\frac{1}{a_n} = \ln n + \underbrace{\ln(n-1)}_{\leq \ln n} \leq \ln n + \ln n \leq 2 \cdot \ln n \stackrel{(*)}{\leq} n$$

und damit $a_n \geq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ besitzt die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$

die (bekanntlich divergente) harmonische Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ als Minorante und

ist damit nach dem Minorantenkriterium selbst divergent; folglich ist die gegebene alternierende Reihe nicht absolut konvergent. Zum Nachweis von (*) betrachten wir etwa die differenzierbare Funktion

$$f : [2; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x - 2 \ln x;$$

wegen

$$f'(x) = 1 - 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\leq \frac{1}{2}} \geq 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 - 1 = 0$$

für alle $x \geq 2$ ist f auf $[2; \infty[$ monoton wachsend, und es gilt damit

$$f(x) \geq f(2) = 2 - 2 \ln 2 = 2(1 - \ln 2) \geq 0,$$

also

$$0 \leq x - 2 \ln x \quad \text{und folglich} \quad 2 \cdot \ln x \leq x,$$

für alle $x \geq 2$.

b) Zu betrachten ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mit

$$b_n = \frac{1 - n + n^2 - n^3 + n^4 - n^5}{n^7} = \frac{1}{n^7} - \frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^5} - \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Reihe $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^s}$ für alle $s > 1$ konvergiert, konvergieren die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

und damit auch ihre Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^7} + \frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2} \right);$$

folglich stellt diese wegen

$$|b_n| = \left| \frac{1}{n^7} - \frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^5} - \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^7} + \frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ eine konvergente Majorante für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dar, so daß

nach dem Majorantenkriterium $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergiert, insbesondere also konvergiert.

c) Für alle $|x| < \frac{1}{e}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{(n x)^n}{n!} = \frac{n^n \cdot x^n}{n!}$$

zu betrachten. Für $x = 0$ ist $c_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit insbesondere die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut konvergent; für $x \neq 0$ ist $c_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| &= \left| \frac{(n+1)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n \cdot x^n} \right| = \left| \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = \\ &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot |x| = \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot |x| = \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \cdot |x| = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot |x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e \cdot |x| < e \cdot \frac{1}{e} = 1, \end{aligned}$$

so daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ nach dem Quotientenkriterium absolut konvergiert.

Insbesondere ist damit die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ für alle $|x| < \frac{1}{e}$ auch konvergent.

2.12 a) Die zu untersuchende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n = n^3 \left(\frac{\left(\frac{1+n}{n} \right)^n}{3} \right)^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

ist wegen

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|a_n|} &= \sqrt[n]{\left| n^3 \left(\frac{\left(\frac{1+n}{n} \right)^n}{3} \right)^n \right|} = \sqrt[n]{n^3} \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{\left(\frac{1+n}{n} \right)^n}{3} \right)^n} = \\ &= \sqrt[n]{n^3} \cdot \frac{\left(\frac{1+n}{n} \right)^n}{3} = (\sqrt[n]{n})^3 \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}{3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1^3 \cdot \frac{e}{3} = \frac{e}{3} < 1 \end{aligned}$$

nach dem Wurzelkriterium absolut konvergent.

b) In Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{mit} \quad b_n = \frac{n^n}{n!} x^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

zu betrachten. Für $x = 0$ ist $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit insbesondere die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent; für $x \neq 0$ ist $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| &= \left| \frac{(n+1)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n \cdot x^n} \right| = \\ &= \left| \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot |x| = \\ &= \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot |x| = \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \cdot |x| = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot |x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e \cdot |x|, \end{aligned}$$

so daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nach dem Quotientenkriterium

- im Falle $e \cdot |x| < 1$, also für alle $|x| < \frac{1}{e}$, absolut konvergiert und
- im Falle $e \cdot |x| > 1$, also für alle $|x| > \frac{1}{e}$, divergiert.

Folglich besitzt die gegebene Potenzreihe den Konvergenzradius $\frac{1}{e}$.

2.13 In Abhängigkeit von den reellen Parametern $a, b > 0$ mit $b \neq 1$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{a^n}{1-b^n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

zu betrachten; dabei ist

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{a^{n+1}}{1-b^{n+1}} \cdot \frac{1-b^n}{a^n} \right| = \left| \frac{a^{n+1}}{a^n} \cdot \frac{1-b^n}{1-b^{n+1}} \right| \stackrel{a>0}{=} a \cdot \left| \frac{1-b^n}{1-b^{n+1}} \right|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies motiviert die folgende Fallunterscheidung:

- Fall 1: $0 < b < 1$. Damit ist $\lim_{n \rightarrow \infty} b^n = 0$ sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} b^{n+1} = 0$, woraus sich

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = a \cdot \left| \frac{1-b^n}{1-b^{n+1}} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \cdot \left| \frac{1-0}{1-0} \right| = a$$

ergibt; nach dem Quotientenkriterium ist also die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ für $0 < a < 1$ konvergent sowie für $a > 1$ divergent. Für $a = 1$ ist die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gemäß

$$c_n = \frac{a^n}{1-b^n} = \frac{1^n}{1-b^n} = \frac{1}{1-b^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-0} = 1$$

keine Nullfolge und damit insbesondere die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergent.

- Fall 2: $b > 1$. Damit ist $0 < \frac{1}{b} < 1$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b}\right)^n = 0$, woraus sich

$$\begin{aligned} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| &= a \cdot \left| \frac{1-b^n}{1-b^{n+1}} \right| = a \cdot \left| \frac{b^n \cdot \left(\frac{1}{b^n} - 1\right)}{b^n \cdot \left(\frac{1}{b^n} - b\right)} \right| = \\ &= a \cdot \left| \frac{\left(\frac{1}{b}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{b}\right)^n - b} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \cdot \left| \frac{0-1}{0-b} \right| = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

ergibt; nach dem Quotientenkriterium ist also die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ für $\frac{a}{b} < 1$, also für $a < b$, konvergent sowie für $\frac{a}{b} > 1$, also für $a > b$, divergent. Für $\frac{a}{b} = 1$, also für $a = b$ ist die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gemäß

$$c_n = \frac{a^n}{1-b^n} = \frac{b^n}{1-b^n} = \frac{b^n}{b^n \cdot \left(\frac{1}{b^n} - 1\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^n - 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{0-1} = -1$$

keine Nullfolge und damit insbesondere die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergent.

2.14 a) Zu betrachten ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$; wegen

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|a_n|} &= \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n}{n} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n \right|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n} \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n} = \\ &= \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \sqrt[n]{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} \cdot 2 = 2. \end{aligned}$$

ist die Reihe nach dem Wurzelkriterium divergent.

b) Für die zu betrachtende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gilt

$$a_n = \frac{1 + 2^n x^{2n}}{1 + n^2} = \frac{1}{1 + n^2} + \frac{2^n x^{2n}}{1 + n^2},$$

also

$$a_n = b_n + c_n \quad \text{mit} \quad b_n = \frac{1}{1 + n^2} \quad \text{und} \quad c_n = \frac{2^n x^{2n}}{1 + n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$|b_n| = \frac{1}{1 + n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ die konvergente Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und ist daher nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent; folglich konvergiert nun die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert.

Für $x = 0$ ist $c_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent, und für $x \neq 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| &= \left| \frac{2^{n+1} x^{2(n+1)}}{1 + (n+1)^2} \cdot \frac{1 + n^2}{2^n x^{2n}} \right| = \left| \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{x^{2n+2}}{x^{2n}} \cdot \frac{1 + n^2}{1 + (n+1)^2} \right| = \\ &= \left| 2 \cdot x^2 \cdot \frac{\frac{1}{n^2} + 1}{\frac{1}{n^2} + (1 + \frac{1}{n})^2} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 \cdot x^2 \cdot \frac{0 + 1}{0 + (1 + 0)^2} = 2x^2; \end{aligned}$$

damit ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ nach dem Quotientenkriterium

- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $2x^2 < 1$ (absolut) konvergent, wegen

$$2x^2 < 1 \iff x^2 < \frac{1}{2} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{2}} \iff -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

also für alle $x \in \left] -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right[$, sowie

- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $2x^2 > 1$ divergent, wegen

$$2x^2 > 1 \iff x^2 > \frac{1}{2} \iff |x| > \frac{1}{\sqrt{2}} \iff x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ oder } \frac{1}{\sqrt{2}} < x$$

also für alle $x \in]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{2}}; \infty[$.

Für die verbleibenden Fälle $2x^2 = 1$, also $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, ergibt sich

$$c_n = \frac{2^n x^{2n}}{1+n^2} = \frac{(2x^2)^n}{1+n^2} = \frac{1^n}{1+n^2} = \frac{1}{1+n^2} = b_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; damit ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent.

Zusammenfassend ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ und damit die gegebene Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergent, wenn $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ gilt.

- 2.15 a) Zu betrachten ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{1}{n} (x^2 - 1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dabei gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|a_n|} &= \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n} (x^2 - 1)^n \right|} = \sqrt[n]{\frac{|x^2 - 1|^n}{n}} = \frac{\sqrt[n]{|x^2 - 1|^n}}{\sqrt[n]{n}} = \\ &= \frac{|x^2 - 1|}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{|x^2 - 1|}{1} = |x^2 - 1|. \end{aligned}$$

Damit ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Wurzelkriterium

- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x^2 - 1| < 1$ absolut konvergent; wegen

$$\begin{aligned} |x^2 - 1| < 1 &\iff -1 < x^2 - 1 < 1 \iff \\ &\iff 0 < x^2 < 2 \iff 0 < |x| < \sqrt{2} \end{aligned}$$

ist dies genau für alle $x \in]-\sqrt{2}; 0[\cup]0; \sqrt{2}[$ der Fall.

- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x^2 - 1| > 1$ divergent; wegen

$$\begin{aligned} |x^2 - 1| > 1 &\iff x^2 - 1 < -1 \text{ oder } x^2 - 1 > 1 \iff \\ &\iff x^2 < 0 \text{ oder } x^2 > 2 \iff x^2 > 2 \iff |x| > \sqrt{2} \end{aligned}$$

ist dies genau für alle $x \in]-\infty; -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; \infty[$ der Fall.

Es sind noch die Fälle $x = 0$ und $x = \pm\sqrt{2}$ zu untersuchen:

- Für $x = 0$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x^2 - 1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

als alternierende harmonische Reihe konvergent, und

- für $x = \pm\sqrt{2}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x^2 - 1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

als harmonische Reihe divergent.

Insgesamt konvergiert also die gegebene Reihe genau für alle $x \in]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$.

- b) Zu betrachten ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = nx^{(n^2)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dabei gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|n \cdot x^{(n^2)}|} = \sqrt[n]{n \cdot |x|^{(n^2)}} = \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|x|^{(n^2)}} = \sqrt[n]{n} \cdot |x|^n,$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung nahegelegt wird:

- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{|x|^n}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

weswegen die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Wurzelkriterium absolut konvergiert.

- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = 1$ gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{|x|^n}_{\rightarrow 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

womit über das Wurzelkriterium keine Konvergenzaussage möglich ist; da aber die Folge der Reihenglieder wegen

$$|a_n| = |n \cdot x^{(n^2)}| = n \cdot |x|^{(n^2)} = n \cdot 1^{(n^2)} = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

insbesondere keine Nullfolge ist, ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sicher divergent.

- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{|x|^n}_{\rightarrow \infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty;$$

weswegen die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Wurzelkriterium divergiert.

Insgesamt konvergiert also die gegebene Reihe genau für alle $x \in]-1; 1[$.

- 2.16 a) Zu betrachten ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{x^n}{n \cdot \sqrt{n - \frac{1}{2}}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für $x = 0$ gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$; damit ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut

konvergent. Für $x \neq 0$ ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und es gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot \sqrt{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{n \cdot \sqrt{n-\frac{1}{2}}}{x^n} \right| = \frac{n}{n+1} \cdot \sqrt{\frac{n-\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}} \cdot |x| = \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{2n}}} \cdot |x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+0} \cdot \sqrt{\frac{1-0}{1+0}} \cdot |x| = |x|, \end{aligned}$$

wobei hier die Stetigkeit der Quadratwurzel an der Stelle $a = 1$ eingeht; damit ist nach dem Quotientenkriterium die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ absolut konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergent. Für den noch zu untersuchenden Fall $|x| = 1$ gilt

$$|a_n| = \left| \frac{x^n}{n \cdot \sqrt{n-\frac{1}{2}}} \right| = \frac{1}{n \cdot \sqrt{n-\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{n \cdot \sqrt{n-\frac{n}{2}}} = \frac{1}{n \cdot \sqrt{\frac{n}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; da mit der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}$ konvergiert,

besitzt damit die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die konvergente Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}$ und ist damit nach dem Majorantenkriterium selbst absolut konvergent.

- b) Zu betrachten ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{n^{(n^2)}}{(n+1)^{(n^2)}} x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$; wir verwenden im folgenden, daß die Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wächst und den Grenzwert e besitzt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt damit

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|a_n|} &= \sqrt[n]{\left| \frac{n^{(n^2)}}{(n+1)^{(n^2)}} x^n \right|} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1} \right)^{(n^2)} \cdot |x|^n} = \\ &= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^{\frac{n^2}{n}} \cdot \sqrt[n]{|x|^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot |x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \cdot |x| = \frac{|x|}{e}; \end{aligned}$$

damit ist nach dem Wurzelkriterium die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$\frac{|x|}{e} < 1$, also $|x| < e$, absolut konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{|x|}{e} > 1$, also $|x| > e$, divergent. Für den noch zu untersuchenden Fall $|x| = e$ gilt gemäß obiger Rechnung

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \geq \frac{e}{e} = 1, \quad \text{also} \quad |a_n| \geq 1;$$

damit ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Reihenglieder keine Nullfolge, weswegen die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

- 2.17 a) Bekanntlich konvergiert die Exponentialreihe auf ganz $\mathbb{R}$; damit konvergiert aber für alle $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\exp(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n.$$

Zum selben Ergebnis kommt man auch mit Hilfe des Quotientenkriteriums.

- b) Zu betrachten ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{3^n}{n!} x^{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Für $x = 0$

gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$; damit ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Für $x \neq 0$ ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und es gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{3^{n+1} \cdot x^{(n+1)^2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n \cdot x^{n^2}} \right| = \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{|x|^{n^2+2n+1}}{|x|^{n^2}} = \\ &= 3 \cdot \frac{1}{n+1} \cdot |x|^{2n+1} = 3 \cdot \frac{|x|^{2n+1}}{n+1}; \end{aligned}$$

dies legt die folgende Fallunterscheidung nahe:

- Im Falle $|x| \leq 1$ ist

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 3 \cdot \frac{|x|^{2n+1}}{n+1} \leq \frac{3}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{also} \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0;$$

damit ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium konvergent.

- Im Falle $|x| > 1$ ist $|x| = 1 + x_0$ für ein $x_0 > 0$, und nach der Bernoulli'schen Ungleichung gilt $|x|^n = (1 + x_0)^n \geq 1 + n x_0$, woraus sich

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= 3 \cdot \frac{|x|^{2n+1}}{n+1} = 3 \cdot \frac{|x|^n}{n+1} \cdot |x|^{n+1} \geq 3 \cdot \frac{1 + n x_0}{n+1} \cdot |x|^{n+1} = \\ &= 3 \cdot \underbrace{\frac{\frac{1}{n} + x_0}{1 + \frac{1}{n}}}_{\rightarrow x_0 > 0} \cdot \underbrace{|x|^{n+1}}_{\rightarrow \infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty, \quad \text{also} \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty; \end{aligned}$$

damit ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium divergent.

- 2.18 a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ergibt sich mit Hilfe der 3. binomischen Formel

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} &= \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \\ &= \frac{1^2 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}^2}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

sowie wegen der Monotonie der Quadratwurzel

$$1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \leq 1 + \sqrt{1 - 0} = 1 + \sqrt{1} = 2,$$

insgesamt also

$$1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \geq \frac{\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2n}.$$

Damit besitzt die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)$ die (wie harmonische Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$) divergente Minorante $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n}$ und ist damit nach dem Minorantenkriterium selbst divergent.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ergibt sich mit Hilfe der 3. binomischen Formel

$$\begin{aligned} 0 \leq 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} &= \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right)}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \\ &= \frac{1^2 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}^2}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} \leq \frac{\frac{1}{n^2}}{1 + 0} = \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Damit besitzt die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right)$ die konvergente Majorante $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und ist damit nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent.

2.19 a) Eine zweimalige Anwendung der Regel von de l'Hospital liefert

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos x}{x^2} \stackrel{\text{L'H}}{\underset{„\frac{0}{0}“}}= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{2x} \stackrel{\text{L'H}}{\underset{„\frac{0}{0}“}}= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2};$$

wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ergibt sich damit insbesondere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

b) Gemäß a) gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ mit $a = \frac{1}{2}$; damit gibt es zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ dann $|a_n - a| < \varepsilon$, also

$$a_n - a \leq |a_n - a| < \varepsilon \quad \text{und damit} \quad a_n < 1 \quad \text{bzw.} \quad 1 - \cos \frac{1}{n} < \frac{1}{n^2}$$

gilt. Damit besitzt die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$ die (bekanntlich konvergente) Majorante $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und ist damit nach dem Majorantenkriterium selbst (absolut) konvergent; folglich konvergiert aber auch die gegebene Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$.

2.20 a) Der zu untersuchende Grenzwert

$$n \left(\sqrt[n]{a} - 1 \right) = \frac{e^{\frac{1}{n} \ln a} - 1}{\frac{1}{n}} \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty$$

ist vom Typ „ $\frac{0}{0}$ “ und lässt sich damit mit Hilfe der Regel von de l'Hospital behandeln. Dazu betrachten wir die beiden differenzierbaren Funktionen

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{x \ln a} - 1, \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x,$$

mit

$$f'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a \quad \text{und} \quad g'(x) = 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$; dabei ist $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ sowie

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (e^{x \ln a} - 1) = e^0 - 1 = 0$$

und

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} x = 0,$$

wobei beim ersten Grenzwert die Stetigkeit der Exponentialfunktion an der Stelle 0 eingeht. Wegen

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^{x \ln a} \cdot \ln a}{1} = e^{x \ln a} \cdot \ln a \xrightarrow{x \rightarrow 0+} e^0 \cdot \ln a = \ln a$$

existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, und nach der Regel von de l'Hospital

existiert damit auch der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{g(x)}$ mit

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ln a.$$

Schließlich erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[n]{a} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n} \ln a} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} = \ln a.$$

b) Für $a = 1$ gilt $\sqrt[n]{a} - 1 = \sqrt[n]{1} - 1 = 1 - 1 = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$; insbesondere ist damit die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)$ konvergent. Für $a > 1$ ist gemäß a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[n]{a} - 1 \right) = \ln a > 0,$$

so daß es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$n (\sqrt[n]{a} - 1) > \frac{\ln a}{2}, \quad \text{also} \quad \sqrt[n]{a} - 1 > \frac{\ln a}{2n}$$

für alle $n \geq n_0$. Damit besitzt die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)$ die (wegen $\ln a > 0$ wie harmonische Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n}$) divergente Minorante $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\ln a}{2n}$ und ist damit nach dem Minorantenkriterium selbst divergent; folglich divergiert auch die zu untersuchende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)$.

2.21 a) Wir betrachten die Funktion

$$f : [2, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}.$$

Für alle $x_1, x_2 \in [2, \infty[$ mit $x_1 \leq x_2$ ergibt sich, da der natürliche Logarithmus $\ln$ streng monoton wächst, zunächst $0 < \ln 2 \leq \ln x_1 \leq \ln x_2$, also $0 < (\ln x_1)^2 \leq (\ln x_2)^2$, und damit

$$0 < x_1 (\ln x_1)^2 \leq x_2 (\ln x_2)^2,$$

woraus dann wegen

$$f(x_1) = \frac{1}{x_1 (\ln x_1)^2} \geq \frac{1}{x_2 (\ln x_2)^2} = f(x_2)$$

folgt, daß f eine monoton fallende Funktion ist.

Sei nun $n \in \{2, \dots, k-1\}$. Für alle $x \in [n, n+1]$ gilt $n \leq x \leq n+1$ und wegen der Monotonie von f damit

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1),$$

woraus aufgrund der Monotonie des Integrals

$$\int_n^{n+1} f(n) dx \geq \int_n^{n+1} f(x) dx \geq \int_n^{n+1} f(n+1) dx,$$

also

$$f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x) dx \geq f(n+1)$$

folgt. Damit ergibt sich in

$$\sum_{n=2}^{k-1} f(n) \geq \sum_{n=2}^{k-1} \int_n^{n+1} f(x) dx \geq \sum_{n=2}^{k-1} f(n+1),$$

also

$$\sum_{n=2}^{k-1} f(n) \geq \int_2^k f(x) dx \geq \sum_{n=3}^k f(n),$$

und damit

$$\sum_{n=3}^k \frac{1}{n(\ln n)^2} \leq \int_2^k \frac{1}{x(\ln x)^2} dx \leq \sum_{n=2}^{k-1} \frac{1}{n(\ln n)^2},$$

die Behauptung.

b) Zur Ermittlung einer Stammfunktion von f betrachten wir die Substitution

$$g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = \ln t, \quad \text{mit} \quad g'(t) = \frac{1}{t}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t(\ln t)^2} dt &= \int (g(t))^{-2} \cdot g'(t) dt = \\ &= \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C = -\frac{1}{\ln t} + C. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\int_2^k \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_2^k = \underbrace{\left(-\frac{1}{\ln k} \right)}_{\rightarrow 0} - \left(-\frac{1}{\ln 2} \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln 2},$$

woraus sich mit der ersten in a) gezeigten Ungleichung

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=3}^k \frac{1}{n(\ln n)^2} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_2^k \frac{1}{n(\ln n)^2} dx = \frac{1}{\ln 2}$$

ergibt.

2.22 a) Sei $n \in \{1, \dots, N\}$. Für alle $x \in [n-1; n]$ gilt

$$x \leq n \implies x^4 \leq n^4 \implies 1 + x^4 \leq 1 + n^4 \implies \frac{1}{1 + n^4} \leq \frac{1}{1 + x^4},$$

woraus sich wegen der Monotonie des Integrals

$$\int_{n-1}^n \frac{dx}{1 + n^4} \leq \int_{n-1}^n \frac{dx}{1 + x^4}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{1 + n^4} \leq \int_{n-1}^n \frac{dx}{1 + x^4},$$

ergibt. Durch Summation erhält man schließlich

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{1 + n^4} \leq \sum_{n=1}^N \int_{n-1}^n \frac{dx}{1 + x^4} = \int_0^N \frac{dx}{1 + x^4}.$$

b) Von der zu betrachtenden Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n = 3$$

vorausgesetzt; damit gibt es zu $\varepsilon = 3$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$

$$|2^n a_n - 3| < \varepsilon, \quad \text{also} \quad -3 < 2^n a_n - 3 < 3 \quad \text{bzw.} \quad 0 < 2^n a_n < 6,$$

und damit

$$|a_n| \stackrel{a_n > 0}{=} a_n \leq \frac{6}{2^n} = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

gilt. Damit besitzt die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ die (als geometrische Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} cq^n$ mit $|q| < 1$) konvergente Majorante $\sum_{n=n_0}^{\infty} 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, so daß nach dem Majorantenkriterium die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ selbst (absolut) konvergent ist; damit ist aber auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

2.23 a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$ gilt

$$0 \leq \tan x \leq 1 \quad \text{und damit} \quad 0 \leq (\tan x)^{n+1} \leq (\tan x)^n,$$

woraus sich wegen der Monotonie des Integrals

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 0 \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{n+1} \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \, dx,$$

also

$$0 \leq a_{n+1} \leq a_n$$

ergibt. Ferner gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_{n+2} + a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{n+2} \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \, dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((\tan x)^{n+2} + (\tan x)^n) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \underbrace{((\tan x)^2 + 1)}_{=\tan' x} \, dx = \\ &= \left[\frac{(\tan x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \underbrace{\frac{(\tan \frac{\pi}{4})^{n+1}}{n+1}}_{=\frac{1^{n+1}}{n+1}} - \underbrace{\frac{(\tan 0)^{n+1}}{n+1}}_{=\frac{0^{n+1}}{n+1}} = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

b) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus a) ist wegen $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ monoton fallend und durch 0 nach unten beschränkt, mithin konvergent. Für ihren Grenzwert $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ergibt sich wegen $a_{n+2} + a_n = \frac{1}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a + a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+2} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+2} + a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

und damit $a = 0$.

c) Zu betrachten ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{(\tan x)^n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left| \frac{(\tan x)^n}{n} \right|} = \sqrt[n]{\frac{|\tan x|^n}{n}} = \frac{|\tan x|}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |\tan x|$$

ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Wurzelkriterium

- für alle $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ mit $|\tan x| < 1$ (absolut) konvergent, wegen

$$|\tan x| < 1 \iff -1 < \tan x < 1 \iff -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$$

also für $x \in]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$, sowie

- für alle $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ mit $|\tan x| > 1$ divergent, wegen

$$\begin{aligned} |\tan x| > 1 &\iff \tan x < -1 \text{ oder } 1 < \tan x \iff \\ &\iff -\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{4} \text{ oder } \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

also für $x \in]-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$.

Es sind noch die Fälle $x = \pm\frac{\pi}{4}$ zu untersuchen:

- Für $x = \frac{\pi}{4}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tan x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tan \frac{\pi}{4})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

als harmonische Reihe divergent, und

- für $x = -\frac{\pi}{4}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tan x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tan(-\frac{\pi}{4}))^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

als alternierende harmonische Reihe konvergent.

Insgesamt konvergiert also die gegebene Reihe genau für alle $x \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$.

- 2.24 a) Für die durch $x_0 = 1$ und $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n^3}$ für $n \geq 0$ rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ zeigen wir zunächst $x_n > 0$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe vollständiger Induktion: für „ $n = 0$ “ ist dies klar, und für „ $n \rightarrow n+1$ “ folgt aus $x_n > 0$ zunächst $1 + x_n^3 > 0$ und damit $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n^3} > 0$. Insbesondere ist die

Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ nach unten beschränkt.

Ferner ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}_0$ wegen $x_n > 0$ zunächst $1 + x_n^3 > 1$ und damit

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{1+x_n^3} < 1, \quad \text{also} \quad x_{n+1} < x_n;$$

damit ist die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ zudem (streng) monoton fallend, insgesamt also konvergent. Für den Grenzwert $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ erhält man unter Verwendung der Rekursionsvorschrift

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{1+x_n^3} = \frac{a}{1+a^3},$$

woraus sich $a(1+a^3) = a$, also $a+a^4 = a$, und damit $a^4 = 0$, also $a = 0$, ergibt.

- b) Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ergibt sich notwendig, daß die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Reihenglieder eine Nullfolge ist; damit ist aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + a_n} = \frac{1}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \frac{1}{1 + 0} = 1,$$

weswegen die Folge $\left(\frac{1}{1+a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ insbesondere keine Nullfolge ist und damit die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a_n}$ sicher divergiert.

- c) Wir untersuchen das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{n^n}{(2n)!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe des Quotientenkriteriums; wegen

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(n+1)^{n+1} \cdot (2n)!}{(2(n+1))! \cdot n^n} \right| = \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{n^n \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)} = \\ &= \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \cdot \frac{n+1}{(2n+1) \cdot 2(n+1)} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}_{\rightarrow e} \cdot \underbrace{\frac{1}{2(2n+1)}}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ konvergent.

2.25 Zu betrachten ist die Reihe $\sum_{k \geq 1} (-1)^k a_k$ mit $a_k = f\left(\frac{1}{k}\right)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

- Die als differenzierbar vorausgesetzte Funktion f ist damit insbesondere (an der Stelle $a = 0$) stetig; damit folgt aus

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0 \quad \text{schon} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{k}\right) = f(0) = 0,$$

weswegen $(a_k)_{k \geq 1}$ eine Nullfolge ist.

- Wegen $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f zudem monoton wachsend; für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k}$ und damit

$$a_{k+1} = f\left(\frac{1}{k+1}\right) \leq f\left(\frac{1}{k}\right) = a_k,$$

weswegen die Folge $(a_k)_{k \geq 1}$ monoton fallend ist.

Folglich ist nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium die alternierende Reihe

$$\sum_{k \geq 1} (-1)^k a_k = \sum_{k \geq 1} (-1)^k f\left(\frac{1}{k}\right)$$

konvergent.

2.26 a) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) &= \ln\frac{k+1}{k} + \ln\frac{(k+1)-1}{k+1} = \\ &= \ln\frac{k+1}{k} + \ln\frac{k}{k+1} = \ln\left(\frac{k+1}{k} \cdot \frac{k}{k+1}\right) = \ln 1 = 0.\end{aligned}$$

b) Zu betrachten ist die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k \quad \text{mit} \quad a_k = \ln\left(1 + (-1)^k \frac{1}{k}\right) \quad \text{für alle } k \geq 2.$$

Gemäß a) gilt für alle $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}a_{2j} + a_{2j+1} &= \ln\left(1 + (-1)^{2j} \frac{1}{2j}\right) + \ln\left(1 + (-1)^{2j+1} \frac{1}{2j+1}\right) = \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{2j}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{2j+1}\right) \stackrel{\text{a) für } k=2j}{=} 0,\end{aligned}$$

so daß sich zunächst für alle Partialsummen s_{2n+1} mit ungeradem Index $2n+1$

$$s_{2n+1} = \sum_{k=2}^{2n+1} a_k = \sum_{j=1}^n (a_{2j} + a_{2j+1}) = 0$$

ergibt; ferner gilt dann für alle Partialsummen s_{2n+2} mit geradem Index $2n+2$

$$\begin{aligned}s_{2n+2} &= \underbrace{s_{2n+1}}_{=0} + a_{2n+2} = a_{2n+2} = \ln\left(1 + (-1)^{2n+2} \frac{1}{2n+2}\right) = \\ &= \ln\left(1 + \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{\rightarrow 0}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln(1+0) = \ln 1 = 0,\end{aligned}$$

wobei beim Grenzübergang die Stetigkeit des Logarithmus (an der Stelle $a=1$) eingeht. Damit ist die Folge $(s_n)_{n \geq 2}$ der Partialsummen eine Nullfolge, also

$$\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1 + (-1)^k \frac{1}{k}\right) = 0.$$

2.27 Bei der zu betrachtenden Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{1}{2n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

handelt es sich um eine alternierende Reihe; da die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die Reihe nach dem Konvergenzkriterium von Leibniz. Für die Summe

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

dieser klassischen Reihe ist zwar $s = \frac{\pi}{4}$ angegeben, der konkrete Wert von s ist allerdings für die folgende Überlegung unerheblich.

Man erhält für die Partialsummen von ungeradem Index

$$s_{2j+1} - s_{2j-1} = (-1)^{2j+1}a_{2j} + (-1)^{2j+2}a_{2j+1} = -a_{2j} + a_{2j+1} \leq 0$$

und damit $s_{2j+1} \leq s_{2j-1}$ sowie für die Partialsummen von geradem Index

$$s_{2j+2} - s_{2j} = (-1)^{2j+2}a_{2j+1} + (-1)^{2j+3}a_{2j+2} = a_{2j+1} - a_{2j+2} \geq 0$$

und damit $s_{2j+2} \geq s_{2j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$; damit sind die beiden Teilfolgen $(s_{2j-1})_{j \in \mathbb{N}}$ bzw. $(s_{2j})_{j \in \mathbb{N}}$ monoton fallend bzw. monoton steigend, so daß sich

$$s_{2j} \leq s \leq s_{2j+1} \quad \text{und} \quad s_{2j-1} \geq s \geq s_{2j}$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ ergibt. Folglich liegt s stets zwischen zwei aufeinanderfolgenden Partialsummen s_n und s_{n+1} , so daß sich

$$|s - s_n| \leq |s_{n+1} - s_n| = |(-1)^{n+2}a_{n+1}| = a_{n+1}$$

mit

$$a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1) - 1} = \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{2n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt; wegen

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} \iff \frac{1}{n} \leq 10^{-4} \iff n \geq 10^4$$

können wir $N = 10^4 \in \mathbb{N}$ wählen und erhalten insgesamt

$$\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \right| = |s - s_N| \leq a_{N+1} \leq \frac{1}{2N} \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}.$$

- 2.28 a) Wir konstruieren für jede Nullfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen über vollständige Induktion eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$|a_{n_k}| \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N};$$

die damit gebildete Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ besitzt dann die konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ als Majorante und ist damit nach dem Majorantenkriterium selbst absolut konvergent.

- Für „ $k = 1$ “ gibt es wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ zu $\varepsilon = 1$ ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_1$; für $n_1 = N_1$ gilt damit insbesondere $|a_{n_1}| \leq 1$.
- Für „ $k \rightarrow k+1$ “ gibt es wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ zu $\varepsilon = \frac{1}{(k+1)^2}$ ein $N_{k+1} \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_{k+1}$; für $n_{k+1} = \max\{n_k, N_{k+1}\} + 1$ gilt damit $n_{k+1} > n_k$ mit $|a_{n_{k+1}}| \leq \frac{1}{(k+1)^2}$.

- b) Für die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen gibt es ein $d > 0$ mit $b_{n+1} < b_n - d$ für alle $n \in \mathbb{N}$; wir zeigen

$$b_n \leq b_1 - (n-1) \cdot d \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

mit Hilfe vollständiger Induktion:

- Für „ $n = 1$ “ gilt sogar $b_1 = b_1 - 0 = b_1 - (1-1) \cdot d$.
- Für „ $n \rightarrow n+1$ “ ergibt sich

$$b_{n+1} < b_n - d \leq (b_1 - (n-1) \cdot d) - d = b_1 - n \cdot d.$$

Damit erhält man wegen der Monotonie der Exponentialfunktion

$$0 \leq e^{b_n} \leq e^{b_1 - (n-1) \cdot d} = e^{(b_1+d) - n \cdot d} = e^{b_1+d} \cdot e^{-n \cdot d} = e^{b_1+d} \cdot (e^{-d})^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; damit ist die geometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot q^n \quad \text{mit} \quad c = e^{b_1+d} \quad \text{und} \quad q = e^{-d}$$

eine Majorante der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} e^{b_n}$. Wegen

$$d > 0 \quad \text{ist} \quad |q| = e^{-d} < e^0 = 1$$

und damit die Majorante konvergent, so daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} e^{b_n}$ nach dem Majorantenkriterium selbst konvergiert.

- 2.29 a) Sei $x \in [-1; 1]$; für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| \frac{x^n}{n(n+1)} \right| = \frac{|x|^n}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent; damit besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ die konvergente Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und ist nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent.

- b) Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$ ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{2}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ keine Nullfolge; damit ist aber die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{2}}$ divergent.

- c) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist monoton fallend, und für den Grenzwert gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; damit konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium.

- d) Wir wählen $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ und damit $a_n b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit sind zwar die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ gemäß c) konvergent, aber die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ divergiert.

2.30 a) Die Aussage ist falsch: als Gegenbeispiel betrachte man etwa die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

sowie die Folge

$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad b_n = (-1)^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n};$$

die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist (nach dem Leibnizschen Kriterium) konvergent und die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offensichtlich beschränkt, die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ aber divergent.

- b) Die Aussage ist richtig: die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bedeutet

die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, und wegen der Beschränktheit der Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert eine reelle Konstante $M > 0$ mit $|b_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$; damit gilt aber

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot \underbrace{|b_n|}_{\leq M} \leq M \cdot |a_n| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

so daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ die (wie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ebenfalls) konvergente Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} M |a_n|$ besitzt und folglich nach dem Majorantenkriterium selbst absolut konvergent ist.

2.31 Für die gegebene Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen werden die beiden Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad \text{mit} \quad b_k = \frac{a_k}{1 + a_k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

betrachtet; für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt dabei wegen

$$0 < a_k < 1 + a_k \quad \text{dann} \quad 0 < b_k = \frac{a_k}{1 + a_k} < 1$$

mit

$$\begin{aligned} b_k = \frac{a_k}{1 + a_k} &\iff (1 + a_k) b_k = a_k \iff b_k + a_k b_k = a_k \iff \\ &\iff b_k = a_k - a_k b_k \iff b_k = a_k (1 - b_k) \iff a_k = \frac{b_k}{1 - b_k}. \end{aligned}$$

Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ nach Voraussetzung konvergiert, ist die Folge $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ihrer Glieder eine Nullfolge; damit ergibt sich aber auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_k}{1 - b_k} = \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} b_k}{1 - \lim_{k \rightarrow \infty} b_k} = \frac{0}{1 - 0} = 0.$$

Folglich gibt es insbesondere zu $\varepsilon = 1$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \geq k_0$

$$|a_k - 0| < \varepsilon, \quad \text{also} \quad -1 < a_k < 1 \quad \text{und damit} \quad 0 < 1 + a_k < 2,$$

und damit

$$|a_k|_{a_k > 0} = a_k = \underbrace{(1 + a_k)}_{< 2} \cdot \underbrace{\frac{a_k}{1 + a_k}}_{> 0} < 2 \cdot \frac{a_k}{1 + a_k} = 2b_k$$

gilt. Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ nach Voraussetzung konvergiert, konvergieren auch die

Reihen $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ sowie $\sum_{k=k_0}^{\infty} 2b_k$, so daß die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ die konvergente Majorante

$\sum_{k=k_0}^{\infty} 2b_k$ besitzt; damit ist nach dem Majorantenkriterium die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$, also

auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, (absolut) konvergent.