



Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2012): Lineare Algebra und analytische Geometrie 4

4.1 (Frühjahr 2007, Thema 1, Aufgabe 1)

Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Unterräume des $\mathbb{R}^3$ übereinstimmen:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

4.2 (Frühjahr 2001, Thema 2, Aufgabe 1)

Gegeben seien die folgenden Unterräume des $\mathbb{R}^3$:

$$U := \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad V := \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie eine Basis von $U \cap V$.

4.3 (Frühjahr 2000, Thema 2, Aufgabe 1)

Gegeben seien die beiden Unterräume

$$U := \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V := \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie eine Basis des Unterraums $U \cap V$.

4.4 (Frühjahr 2011, Thema 2, Aufgabe 1)

Es sei $V \subset \mathbb{R}^4$ der von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugte Unterraum. Zeigen Sie, dass V den Vektor

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

enthält und bestimmen Sie die Dimension von V .

4.5 (Frühjahr 2000, Thema 3, Aufgabe 1)

Gegeben seien die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

- Zeigen Sie, dass u, v, w und x in einem Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^4$, $U \neq \mathbb{R}^4$, enthalten sind.
- Geben Sie eine lineare Gleichung an, deren Lösungsmenge der Untervektorraum U ist.

4.6 (Herbst 2002, Thema 1, Aufgabe 2)

Gegeben seien die Vektoren $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^4$.

U sei der von u_1 , u_2 und u_3 aufgespannte Unterraum des $\mathbb{R}^4$. $W \subset \mathbb{R}^4$ sei die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rclcl} & x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & & & - & 4x_4 & = & 0 \end{array}$$

- Bestimmen Sie eine Basis B_U von U und eine Basis B_W von W .
- Bestimmen Sie die Dimension von $U \cap W$ und von $U + W$.
- Ergänzen Sie B_U zu einer Basis von $U + W$.

4.7 (Herbst 2001, Thema 2, Aufgabe 1)

Gegeben seien die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ und der Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie den Rang der Matrix A .
- Es sei $V \subset \mathbb{R}^4$ der durch die Vektoren

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Untervektorraum. Zeigen Sie: Das lineare Gleichungssystem

$$A \cdot x = b, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

ist genau dann lösbar, wenn $b \in V$.

- c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $s, t \in \mathbb{R}$ alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems

$$A \cdot x = s v + t w.$$

4.8 (Herbst 2009, Thema 2, Aufgabe 2)

Es sei V der $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad ≤ 2 . Die Teilmenge

$$U := \{p \in V \mid p(x) = p(1-x)\}$$

ist ein linearer Unterraum von V .

- a) Bestimmen Sie eine Basis von U .
- b) Ergänzen Sie die Basis von U aus a) zu einer Basis von V .

4.9 (Herbst 2011, Thema 1, Aufgabe 1)

Im $\mathbb{R}$ -Vektorraum V aller Polynome mit reellen Koeffizienten seien

$$u_1 = X^3 + X^2, \quad u_2 = X^2 + X \quad \text{und} \quad u_3 = X + 1$$

sowie

$$w_1 = X^3 - X^2 + X \quad \text{und} \quad w_2 = X^2 - X + 1$$

gegeben; ferner seien $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ und $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ die von u_1, u_2, u_3 bzw. von w_1, w_2 erzeugten Unterräume von V . Man bestimme eine Basis des Unterraums $U \cap W$.

4.10 (Frühjahr 2001, Thema 3, Aufgabe 1)

Im Vektorraum der reellen 2×2 -Matrizen seien die linearen Unterräume

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ -v & w \end{pmatrix} : u, v, w \in \mathbb{R} \right\}, \quad N := \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben. Bestimmen Sie $\mathbb{R}$ -Basen von M , N , $M \cap N$ und $M + N$.

4.11 (Frühjahr 2004, Thema 3, Aufgabe 1)

Gegeben sei die reelle 2×2 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei C die Menge aller reellen Matrizen

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

mit $A \cdot X = X \cdot A$.

- a) Drücken Sie die Beziehung $A \cdot X = X \cdot A$ als homogenes lineares Gleichungssystem in x_1, x_2, x_3, x_4 aus und bestimmen Sie für dieses Gleichungssystem die Dimension des Lösungsraums.
- b) Zeigen Sie:

$$C = \left\{ \lambda A + \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

4.12 (Herbst 2005, Thema 2, Aufgabe 3)

Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ sei

$$U = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid A^\top = A \text{ und } \text{Spur}(A) = 0\}.$$

- a) Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist.
- b) Bestimmen Sie die Dimension von U .
- c) Zeigen Sie, dass

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in U liegen und linear unabhängig sind. Ergänzen Sie $\{A_1, A_2\}$ zu einer Basis von U .

4.13 (Frühjahr 2002, Thema 1, Aufgabe 1)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- a) Zeigen Sie: Die Menge

$$M = \{X \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid AX = (AX)^\top\}$$

ist ein reeller Vektorraum, und $S = \{X \in M \mid X^\top = X\}$ ist ein Untervektorraum von M .

- b) Ermitteln Sie $\dim(M)$.
- c) Ermitteln Sie eine Basis von S .

Hinweis: Matrizen X schreibt man hier vorteilhaft in der Form

$$X = \begin{pmatrix} a & d_1 & d_2 \\ e_1 & b & d_3 \\ e_2 & e_3 & c \end{pmatrix}.$$

4.14 (Herbst 2008, Thema 1, Aufgabe 2)

- a) Es seien W_1 und W_2 Untervektorräume eines reellen Vektorraums V . Wie lautet die Dimensionsformel für Summe $W_1 + W_2$ und Durchschnitt $W_1 \cap W_2$?
- b) Welche Dimension kann $W_1 \cap W_2$ haben, wenn $\dim W_1 = \dim W_2 = 3$ und $V = \mathbb{R}^5$ ist? Belegen Sie jeden möglichen Wert von $\dim(W_1 \cap W_2)$ durch ein Beispiel.

4.15 (Frühjahr 2003, Thema 1, Aufgabe 1)

Welche Dimension kann der Durchschnitt eines dreidimensionalen und eines vierdimensionalen Untervektorraums in einem sechsdimensionalen Vektorraum haben?

4.16 (Herbst 2009, Thema 3, Aufgabe 2)

Es seien v und w linear unabhängige Vektoren in einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum V , sowie α und β zwei reelle Zahlen. Zeigen Sie: Die Vektoren $x = \alpha v + \beta w$ und $y = \beta v + \alpha w$ sind genau dann linear abhängig, wenn $\alpha = \beta$ oder $\alpha = -\beta$.

4.17 (Frühjahr 1999, Thema 1, Aufgabe 1)

Es sei $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ eine Basis des Vektorraums V über dem Körper $\mathbb{R}$. Weiter seien Vektoren $a_i \in V$ gegeben durch

$$a_1 = b_1 + \beta_1 \cdot b_3, \quad a_2 = b_2 + \beta_2 \cdot b_4, \quad a_3 = \beta_3 \cdot b_1 + b_3, \quad a_4 = \beta_4 \cdot b_2 + b_4,$$

wobei $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ und β_4 feste reelle Zahlen sind. Zeigen Sie, dass $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ genau dann eine Basis von V ist, wenn

$$(1 - \beta_1 \beta_3)(1 - \beta_2 \beta_4) \neq 0.$$

4.18 (Frühjahr 2009, Thema 2, Aufgabe 1)

Es sei $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ eine Basis des $\mathbb{R}$ -Vektorraums V . Ferner seien

$$a_1 = 2b_1 - b_2, \quad a_2 = b_2 + b_3 + b_4, \quad a_3 = b_3 - b_4$$

und $U = \text{span}\{a_1, a_2, a_3\}$ der von a_1, a_2, a_3 aufgespannte Unterraum.

- Zeigen Sie, dass $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ eine Basis von U ist.
- Zeigen Sie, dass $x = 6b_1 - 5b_2 - 4b_4$ in U liegt und bestimmen Sie die Koordinaten von x bezüglich A .
- Ergänzen Sie A zu einer Basis von V .

4.19 (Frühjahr 2006, Thema 3, Aufgabe 2)

Es seien v_1, v_2, v_3, v_4 vier linear unabhängige Vektoren in einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Weiter sei U der von

$$u_1 := v_1 + v_2, \quad u_2 := v_2 + v_3, \quad u_3 := v_3 + v_4$$

aufgespannte Untervektorraum und W der von

$$w_1 := v_1 - v_2, \quad w_2 := v_2 - v_3$$

aufgespannte Untervektorraum. Bestimmen Sie die Dimensionen der Untervektorräume $U, W, U \cap W$ und geben Sie eine Basis von $U \cap W$ an.

4.20 (Frühjahr 2002, Thema 3, Aufgabe 1)

Es seien a, b, c und d linear unabhängige Vektoren in einem reellen Vektorraum. Man bestimme die Dimension des von den Vektoren

$$v_1 = a + b + c + d, \quad v_2 = b + c, \quad v_3 = c + d, \quad v_4 = a + b$$

aufgespannten Unterraums.

4.21 (Herbst 2000, Thema 1, Aufgabe 1)

V sei ein reeller Vektorraum und $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ eine Basis von V . Der Unterraum $U \subset V$ werde von den Vektoren u_1, u_2 und u_3 aufgespannt, der Unterraum $W \subset V$ von w_1 und w_2 , wobei

$$u_1 = v_1 + v_2 - v_3 - v_4, \quad u_2 = 2v_2 + 3v_3, \quad u_3 = -v_1 + v_2 + 4v_4,$$

$$w_1 = 2v_2 + v_3 + v_4, \quad w_2 = -2v_1 + 3v_3 + 2v_4.$$

- a) Untersuchen Sie, ob $x = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ in U liegt.
- b) Bestimmen Sie eine Basis von $U \cap W$.

4.22 (Frühjahr 2000, Thema 1, Aufgabe 1)

Seien a, b und c Vektoren eines $\mathbb{R}$ -Vektorraums V . Zeigen Sie:

- a) Die Vektoren $v_1 = a + b + c$, $v_2 = a + 2b + 3c$, $v_3 = 2a + 3b + c$ und $v_4 = 3a + b + 2c$ sind linear abhängig.
- b) Sind $\{a, b, c\}$ eine Basis von V , so sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.

4.23 (Frühjahr 2011, Thema 1, Aufgabe 5)

Im Vektorraum der reellen Polynome seien die folgenden Teilmengen gegeben:

$$U_1 = \{P : P(x) = ax^2 + bx + c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}\},$$

$$U_2 = \{P : P(x) = ax^2 + bx \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}\},$$

$$U_3 = \{P : P(x) \equiv 0 \text{ oder } \text{Grad}(P) \geq 2\},$$

$$U_4 = \{P : P(x) = ax^2 + bx + c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ und } c \neq 0\}.$$

Überprüfen Sie, welche dieser Teilmengen einen linearen Unterraum bilden.

4.24 (Herbst 2007, Thema 1, Aufgabe 5)

Es sei M eine reelle $n \times n$ -Matrix mit $M^2 = M$. Weiter sei $U \subset \mathbb{R}^n$ der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems $M \cdot x = 0$ und $S \subset \mathbb{R}^n$ der von den Spalten der Matrix M erzeugte Untervektorraum. Zeigen Sie:

- a) Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ ist $v - M \cdot v \in U$,
- b) $\mathbb{R}^n = U \oplus S$ (direkte Summe).