



Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2012): Lineare Algebra und analytische Geometrie 3

3.1 (Herbst 1997, Thema 3, Aufgabe 1)

Berechnen Sie die Determinante der reellen Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.2 (Frühjahr 2001, Thema 1, Aufgabe 4)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei die $n \times n$ -Matrix A_n gegeben durch

$$a_{ik} := \begin{cases} -1, & \text{für } i = k, \quad k = 1, \dots, n, \\ 1, & \text{für } i = k + 1, \quad k = 1, \dots, n - 1, \\ 1, & \text{für } i = k - 1, \quad k = 2, \dots, n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Ermitteln Sie $\det(A_1)$, $\det(A_2)$ und $\det(A_3)$.
- Bestimmen Sie eine Rekursionsformel für $\det(A_n)$.
- Berechnen Sie $\det(A_n)$ für alle n .

3.3 (Frühjahr 2008, Thema 3, Aufgabe 2)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei die folgende $n \times n$ -Matrix gegeben:

$$T_n := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Zeigen Sie mit Hilfe des Determinanten-Entwicklungssatzes die Rekursionsformel

$$\det(T_n) = 2 \cdot \det(T_{n-1}) - \det(T_{n-2}) \quad \text{für } n > 2.$$

- Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

$$\det(T_n) = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

3.4 (Herbst 2008, Thema 2, Aufgabe 2)

Berechnen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & \alpha \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.5 (Herbst 2009, Thema 2, Aufgabe 1)

Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und berechnen Sie in diesen Fällen die inverse Matrix.

3.6 (Herbst 2010, Thema 3, Aufgabe 2)

In Abhängigkeit von einem Parameter $s \in \mathbb{R}$ seien die beiden 3×3 -Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & s \\ 0 & 1-s & 0 \\ s & s & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -s & s & -1 \\ 0 & -1 & s \\ s^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

- Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, für die A bzw. B invertierbar sind.
- Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$ den Rang der Matrix $A \cdot B$.

3.7 (Frühjahr 2001, Thema 3, Aufgabe 4)

Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & -a \\ a+b & a+b & 2a \end{pmatrix}$$

genau dann den vollen Rang hat, wenn für die reellen Parameter a, b gilt: $a^2 \neq b^2$ und $b \neq 3a$.

3.8 (Frühjahr 2003, Thema 3, Aufgabe 5)

Es sei $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ein vom Nullvektor verschiedener Vektor und $A := \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

- Zeigen Sie: Ist $a + b + c = 0$, so ist A nicht invertierbar!
- Zeigen Sie: Ist A nicht invertierbar und $a = 0$, so gilt $a + b + c = 0$.
- Kann in b) auf die Voraussetzung $a = 0$ verzichtet werden?

3.9 (Herbst 2002, Thema 2, Aufgabe 1)

- a) Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 \\ s^2 & 1 & s \\ s & s^2 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

- b) Bestimmen Sie für die $s \in \mathbb{R}$ aus Teilaufgabe a) die inverse Matrix M^{-1} .
c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$ alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.10 (Frühjahr 2007, Thema 2, Aufgabe 3)

In Abhängigkeit vom reellen Parameter $s \in \mathbb{R}$ sei die symmetrische Matrix

$$M_s = \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 \\ s & 1 & s \\ s^2 & s & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

- a) Zeigen Sie $\det(M_s) = (1 - s^2)^2$ für alle $s \in \mathbb{R}$.
b) Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist M_s invertierbar? Geben Sie in diesen Fällen auch die zu M_s inverse Matrix M_s^{-1} an.
c) Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist M_s positiv definit?

3.11 (Herbst 2007, Thema 2, Aufgabe 2)

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eine beliebige reelle 2×2 -Matrix. Weiter sei $D := \det(A)$ die Determinante und

$$S := a + d$$

die Spur dieser Matrix.

- a) Zeigen Sie

$$D \cdot E_2 - S \cdot A + A^2 = 0,$$

wobei E_2 die 2×2 -Einheitsmatrix und 0 die 2×2 -Nullmatrix bezeichnet.

- b) Folgern Sie aus a): Es gilt $A^2 = E_2$ genau dann, wenn
- entweder $S = 0$ und $D = -1$,
 - oder $b = c = 0$ und $a^2 = d^2 = 1$.

3.12 (Herbst 2001, Thema 2, Aufgabe 2)

Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Zeigen Sie, dass -1 ein Eigenwert von B ist. Bestimmen Sie eine Basis für den zugehörigen Eigenraum E .
- Sei $0 \neq n \in \mathbb{R}^4$ ein Vektor orthogonal zu E (bezüglich des Standard-Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^4$). Bestimmen Sie $B \cdot n$ und folgern Sie daraus, dass B das charakteristische Polynom

$$\chi_B(\lambda) = (\lambda + 1)^3(\lambda - 3)$$

besitzt.

- Berechnen Sie für alle $a, b \in \mathbb{R}$ die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}.$$

3.13 (Herbst 2007, Thema 1, Aufgabe 4)

Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf Orthogonalität und reelle Diagonalisierbarkeit:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad A_4 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.14 (Frühjahr 2006, Thema 3, Aufgabe 3)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt eine reelle invertierbare 3×3 -Matrix C so, dass $C^{-1}AC$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

3.15 (Herbst 2006, Thema 1, Aufgabe 3)

Es sei A eine reelle $n \times n$ -Matrix. Zu A gebe es eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bestehend aus Eigenvektoren für A . Beweisen Sie, dass A symmetrisch ist.

3.16 (Frühjahr 2006, Thema 2, Aufgabe 2)

Es seien A , B und C invertierbare reelle 2×2 -Matrizen. Beweisen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel jede der folgenden sechs Aussagen. (Die Regel $(AB)^t = B^t A^t$ darf verwendet werden.)

- a) A und B symmetrisch $\implies A \cdot B$ symmetrisch.
- b) A symmetrisch $\implies A^{-1}$ symmetrisch.
- c) A symmetrisch $\implies C^t A C$ symmetrisch.
- d) A und B orthogonal $\implies A \cdot B$ orthogonal.
- e) A orthogonal $\implies A^{-1}$ orthogonal.
- f) A orthogonal $\implies C^t A C$ orthogonal.

3.17 (Herbst 2004, Thema 1, Aufgabe 1)

Es sei $n > 1$. Zwei reelle $n \times n$ -Matrizen A und B heißen ähnlich, wenn es eine invertierbare reelle $n \times n$ -Matrix T gibt mit $B = T^{-1} A T$. Welche der folgenden Aussagen für ähnliche Matrizen sind richtig, welche sind falsch? (Begründung!)

- a) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A , so auch von B .
- b) Ist $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von A , so auch von B .
- c) Ist A invertierbar, so ist dies auch B .
- d) Ist A eine Diagonalmatrix, so auch B .
- e) Ist A die Einheitsmatrix, so auch B .
- f) $\det(A) = \det(B)$.

3.18 (Frühjahr 2004, Thema 1, Aufgabe 2)

Es bezeichnen A , B reelle 2×2 -Matrizen, E die 2×2 -Einheitsmatrix und O die 2×2 -Nullmatrix. Man beweise oder widerlege durch ein Gegenbeispiel jede der folgenden Aussagen a) – d):

- a) $\det(AB) = 0 \iff \det(A) = 0$ oder $\det(B) = 0$.
- b) $AB = O \iff A = O$ oder $B = O$.
- c) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A , so ist λ^k ein Eigenwert von A^k ($k \in \mathbb{N}$).
- d) $A^2 = E \implies A = E$ oder $A = -E$.

3.19 (Herbst 2011, Thema 3, Aufgabe 1)

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

- a) Es gibt eine Basis v_1, v_2, v_3, v_4 des $\mathbb{R}^4$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 23 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -17 \\ 23 \\ 11 \end{pmatrix}$.
- b) Jede diagonalisierbare Matrix ist invertierbar.
- c) Jede invertierbare Matrix ist diagonalisierbar.
- d) Sei A eine Matrix mit $A^3 = A$. Dann sind die einzig möglichen Eigenwerte von A gleich 0 oder ± 1 .