



Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2012): Lineare Algebra und analytische Geometrie 2

2.1 (Frühjahr 2009, Thema 3, Aufgabe 3)

Gegeben sei die reelle 3×3 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- a) Zeigen Sie, dass $\lambda = 3$ ein Eigenwert von A ist, und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenraum.
- b) Zeigen Sie, dass $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von A ist, und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.
- c) Zeigen Sie, dass A reell diagonalisierbar ist, und geben Sie eine invertierbare Matrix $P = \text{GL}_3(\mathbb{R})$ sowie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$ an.

2.2 (Herbst 2003, Thema 3, Aufgabe 2)

Betrachten Sie die reelle 3×3 -Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie die Determinante von B .
- b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B .
- c) Ermitteln Sie alle Eigenräume von B , indem Sie für jeden Eigenraum eine Basis angeben.
- d) Entscheiden Sie, ob B diagonalisierbar ist.

2.3 (Herbst 2004, Thema 1, Aufgabe 2)

Gegeben sei die reelle 3×3 -Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von M .
- b) Entscheiden Sie, ob M ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.

2.4 (Herbst 2005, Thema 2, Aufgabe 1)

Gegeben sei die reelle Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine reelle Diagonalmatrix D und eine invertierbare reelle Matrix T derart, dass

$$D = T^{-1}MT.$$

2.5 (Frühjahr 2010, Thema 1, Aufgabe 2)

- a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

- b) Ist die Matrix M diagonalisierbar?

2.6 (Frühjahr 2005, Thema 1, Aufgabe 5)

- a) Berechnen Sie die Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ist A diagonalisierbar?

- b) Ist A invertierbar?

- c) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^4$, welche möglichst viele Eigenvektoren von A enthält.

2.7 (Herbst 2005, Thema 1, Aufgabe 2)

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

- a) Zeigen Sie, dass die Zahlen 1 und -1 Eigenwerte der Matrix A sind und bestimmen Sie die geometrischen Vielfachheiten dieser Eigenwerte.
- b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A .
- c) Entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist.

2.8 (Frühjahr 1997, Thema 1, Aufgabe 1)

Man betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ist A diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie eine Matrix S an, so daß $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

2.9 (Herbst 2011, Thema 2, Aufgabe 5)

Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren einer

Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -1$. Berechnen Sie eine mögliche Matrix A !

2.10 (Herbst 2007, Thema 2, Aufgabe 3)

Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von M besteht.

2.11 (Herbst 2002, Thema 2, Aufgabe 2)

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Matrix den Eigenwert 3 besitzt.

c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und alle Eigenvektoren der Matrix A .

2.12 (Herbst 2008, Thema 3, Aufgabe 4)

Betrachtet werde die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine orthogonale 3×3 -Matrix S an derart, dass $S^t A S$ Diagonalform besitzt.

2.13 (Frühjahr 2010, Thema 2, Aufgabe 2)

Gegeben sei die reelle 3×3 -Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- Berechnen Sie die Eigenwerte dieser Matrix.
- Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $P \in O_3(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $P^t S P = D$ an.

2.14 (Frühjahr 2010, Thema 3, Aufgabe 4)

Gegeben sei die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $v_1 = (2, 1, 2)^t$ ein Eigenvektor von S ist. Bestimmen Sie alle Eigenwerte von S und eine orthogonale Matrix T so, dass die Matrix $T^t S T$ Diagonalform besitzt.

2.15 (Frühjahr 2011, Thema 1, Aufgabe 4)

Bestimmen Sie zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

eine Drehmatrix R und eine Diagonalmatrix D so, dass $D = R^T \cdot A \cdot R$.

2.16 (Herbst 2011, Thema 3, Aufgabe 5)

Sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Zeigen Sie, dass A nur die Eigenwerte ± 2 besitzt.
- Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix M , die die Matrix A diagonalisiert.

2.17 (Frühjahr 2001, Thema 2, Aufgabe 3)

- Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf Diagonalisierbarkeit und begründen Sie jeweils das Ergebnis:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Die reelle 3×3 -Matrix A genüge der Bedingung $A^2 + A + E = 0$, wobei E die 3×3 -Einheitsmatrix bedeutet. Zeigen Sie, dass A nicht reell diagonalisierbar ist.

2.18 (Frühjahr 2009, Thema 1, Aufgabe 3)

- a) Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf reelle Diagonalisierbarkeit und begründen Sie das Ergebnis:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Beweisen oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel die folgende Aussage über reelle 2×2 -Matrizen:

Sind die Matrizen A und B reell diagonalisierbar, dann ist auch ihr Produkt $A \cdot B$ reell diagonalisierbar.

2.19 (Frühjahr 2004, Thema 3, Aufgabe 2)

Entscheiden Sie (mit Begründung), welche der folgenden vier Matrizen reell diagonalisierbar sind:

$$M_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 11 \\ 0 & 3 & 5 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}, \quad M_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_4 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.20 (Herbst 2004, Thema 3, Aufgabe 3) Zu $a \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a \\ -a & 2+a \end{pmatrix}$$

gegeben. Zeigen Sie: A diagonalisierbar $\implies a = 0$.

2.21 (Frühjahr 2007, Thema 2, Aufgabe 2)

In Abhängigkeit vom reellen Parameter $t \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ t & t+1 & 0 \\ t+1 & t+1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

gegeben.

- a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom χ_t von A_t gegeben ist durch

$$\chi_t(\lambda) = -(\lambda + 1)(\lambda - t)(\lambda - 1).$$

- b) Untersuchen Sie A_t in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ auf Diagonalisierbarkeit.
 c) Nun sei $t = 0$. Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $P^{-1}A_0P = D$.

2.22 (Herbst 2010, Thema 3, Aufgabe 3)

Untersuchen Sie die reelle 3×3 -Matrix

$$C_t = \begin{pmatrix} 0 & t & t-2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ auf reelle Diagonalisierbarkeit.

2.23 (Herbst 2002, Thema 1, Aufgabe 1)

Gegeben sei die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die reellen Eigenwerte von A .
- Untersuchen Sie, für welche Zahlen α die Matrix A zu einer reellen Diagonalmatrix ähnlich ist.

2.24 (Herbst 2001, Thema 3, Aufgabe 4)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 2 & -a & b \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass A genau dann reell diagonalisierbar (d.h. zu einer reellen Diagonalmatrix ähnlich) ist, wenn $b \neq 0$ und $a^2 > -4b$ gilt.

2.25 (Herbst 2005, Thema 3, Aufgabe 1)

Geben Sie eine diagonalisierbare reelle 3×3 -Matrix S so an, daß $S^2 = Y$ mit

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.26 (Frühjahr 2009, Thema 2, Aufgabe 4)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie die Eigenwerte von A und eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren für A .
- Bestimmen Sie eine orthogonale 2×2 -Matrix T und eine Diagonalmatrix D so, dass

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = D.$$

- Folgern Sie aus b), dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$A^n = T \cdot D^n \cdot T^{-1}.$$

- Zeigen Sie mit c)

$$A^n = 5^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 2^{n+2} + 1 & 2^{n+1} - 2 \\ 2^{n+1} - 2 & 2^n + 4 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

2.27 (Frühjahr 2006, Thema 2, Aufgabe 1)

Es sei $s \in \mathbb{R}$ und $A_s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & s \\ s & 1 & 2 \\ 2 & s & 1 \end{pmatrix}$.

- Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A_s ist und berechnen Sie den zugehörigen Eigenwert λ_s . Für welche s ist $\lambda_s = 0$?
- Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$ den Rang von A_s .
- Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A_s \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.28 (Frühjahr 2006, Thema 1, Aufgabe 1)

Es sei A eine reelle 2×2 -Matrix mit den (nicht notwendig reellen) Eigenwerten λ_1 und λ_2 . Bekanntlich heißt A reell diagonalisierbar, wenn A ähnlich zu einer reellen Diagonalmatrix D ist, d.h., wenn es eine invertierbare reelle 2×2 -Matrix T gibt mit $A = T^{-1}DT$. Welche der folgenden Aussagen a), ..., d) sind richtig, bzw. falsch? Geben Sie jeweils einen Beweis, bzw. ein Gegenbeispiel an!

- λ_1 und λ_2 sind reell mit $\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies A$ ist reell diagonalisierbar;
- $\det(A) < 0 \implies A$ ist reell diagonalisierbar;
- A ist nicht reell diagonalisierbar $\implies \lambda_1$ und λ_2 sind nicht reell;
- A^2 ist reell diagonalisierbar $\implies A$ ist reell diagonalisierbar.

2.29 (Herbst 2006, Thema 2, Aufgabe 2)

Es sei $n \geq 2$ und A eine reelle $n \times n$ -Matrix. Zeigen Sie:

- A ist genau dann invertierbar, wenn 0 kein Eigenwert von A ist.
- Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A , so ist λ^2 ein Eigenwert von A^2 . Ist zudem A invertierbar, so ist λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1} .
- Ist A reell diagonalisierbar, so gilt dies auch für A^2 .
- Ist A^2 reell diagonalisierbar, so braucht dies für A nicht zu gelten. Hinweis: Betrachten Sie etwa spezielle Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a \neq 0.$$

2.30 (Herbst 2008, Thema 2, Aufgabe 3)

Es sei B eine reelle $n \times n$ -Matrix mit $B^2 = I_n$, wobei I_n die $n \times n$ -Einheitsmatrix bezeichnet. Zeigen Sie:

- Für jeden Eigenwert λ von B gilt $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$.
- Ist 1 der einzige Eigenwert von B , so gilt $B = I_n$. (Hinweis: Betrachten Sie für einen Spaltenvektor $x \in \mathbb{R}^n$ das Produkt von B mit dem Vektor $x - Bx$.)

2.31 (Herbst 2009, Thema 1, Aufgabe 1)

Es sei $b \in \mathbb{R}^n$ und A eine reelle $n \times n$ -Matrix. Die affine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei definiert durch

$$f(x) = A \cdot x + b, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie:

- a) Die Menge der Fixpunkte von f

$$\text{Fix}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = x\}$$

ist ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^n$ oder sie ist leer.

- b) Wenn 1 kein Eigenwert von A ist, dann hat f genau einen Fixpunkt.

2.32 (Herbst 2011, Thema 1, Aufgabe 3)

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ werde eine reelle $n \times n$ -Matrix B betrachtet; es bezeichne $B^\top$ die zu B transponierte Matrix. Man beweise oder widerlege:

- a) Ist $l \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von B , so auch von $B^\top$.
- b) Ist $x \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von B , so auch von $B^\top$.
- c) Ist B diagonalisierbar, so auch $B^\top$.