



Dr. Erwin Schörner

Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2012): Lineare Algebra und analytische Geometrie 1

1.1 (Herbst 2005, Thema 1, Aufgabe 1)

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned}2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 9x_4 &= 20 \\2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 12x_4 &= 27 \\3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 14x_4 &= 31\end{aligned}$$

1.2 (Herbst 2007, Thema 2, Aufgabe 1)

Lösen Sie das reelle lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}3x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 4x_4 &= 5 \\-x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 &= -3 \\2x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 3 \\x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 2\end{aligned}$$

1.3 (Herbst 2010, Thema 1, Aufgabe 1)

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 0 \\2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 &= 3 \\x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 1\end{aligned}$$

1.4 (Frühjahr 2010, Thema 1, Aufgabe 1)

a) Lösen Sie das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}2x_1 + 9x_2 - 5x_3 + 12x_4 + x_5 &= 0 \\x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 0 \\x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 6x_4 - x_5 &= 0\end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass der Vektor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-12, 3, 0, 0, 0)$ eine spezielle Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}2x_1 + 9x_2 - 5x_3 + 12x_4 + x_5 &= 3 \\x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 0 \\x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 &= 3 \\x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 6x_4 - x_5 &= 3\end{aligned}$$

ist.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems aus b).

1.5 (Frühjahr 2007, Thema 3, Aufgabe 1)

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$ die Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{cccccccl} x_1 & + & x_2 & & & + & \lambda x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & - & \lambda x_3 & + & \lambda x_4 & = & 0 \\ -x_1 & & & + & \lambda x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & & & + & \lambda^2 x_4 & = & 1 \end{array}$$

1.6 (Frühjahr 2009, Thema 3, Aufgabe 1)

Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge L_s des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{cccccccl} x_1 & - & x_2 & + & & s x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & - & & 2 x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & 2 x_2 & + & & s x_3 & - & 2 s x_4 & = & -1 \\ x_1 & & & + & 2(s-1) x_3 & + & 3 x_4 & = & 2 \end{array}$$

1.7 (Frühjahr 2005, Thema 3, Aufgabe 1)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccl} x_1 & + & x_2 & + & s x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & s x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ s x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array}$$

- Berechnen Sie in Abhängigkeit von s alle reellen Lösungen.
- Bestimmen Sie für jedes $s \in \mathbb{R}$ die Dimension des Lösungsraumes des zugehörigen homogenen Systems.

1.8 (Herbst 2008, Thema 1, Aufgabe 1)

Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccl} x_1 & + & (\lambda + 1) x_2 & + & 2\lambda x_3 & + & 2\lambda x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & \lambda x_3 & + & \lambda x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & 2\lambda x_3 & + & 2\lambda x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & \lambda x_3 & + & 2\lambda x_4 & = & 1 \end{array}$$

je nach Wahl von $\lambda \in \mathbb{R}$ entweder unlösbar oder eindeutig lösbar ist. Bestimmen Sie im zweiten Fall die Lösung.

1.9 (Herbst 2006, Thema 3, Aufgabe 1)

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$ alle Lösungen $(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{R}^4$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{cccccccl} x_1 & + & & & 2 x_3 & - & x_4 & = & -2 \\ 2 x_1 & + & x_2 & + & 7 x_3 & & & = & -3 \\ -3 x_1 & + & 2 x_2 & + & & & a x_4 & = & 8 \\ x_1 & + & 2 x_2 & + & 8 x_3 & + & 3 x_4 & = & b \end{array}$$

1.10 (Herbst 2008, Thema 3, Aufgabe 1)

Für welche Wahl von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcccccl} 2x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 = 0 \\ & & & & x_3 & + & \alpha x_4 = \beta \end{array}$$

- a) genau eine Lösung,
- b) keine Lösung,
- c) mehrere Lösungen?

Geben Sie im Fall c) alle Lösungen an.

1.11 (Frühjahr 2008, Thema 3, Aufgabe 1)

- a) Lösen Sie für $x \in \mathbb{R}^4$ das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 & -6 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

- b) Ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ lösbar für jeden Vektor $b \in \mathbb{R}^4$?

1.12 (Herbst 2003, Thema 3, Aufgabe 1)

Gegeben sei die reelle 4×4 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie einen Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ derart, dass das lineare Gleichungssystem

$$A \cdot x = b, \quad x \in \mathbb{R}^4,$$

keine Lösung besitzt.

- b) Gibt es einen Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ derart, dass das lineare Gleichungssystem aus a) genau eine Lösung besitzt? (Begründung!)
- c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem aus a) für $b = (1, 1, 1, 1)^t$.

1.13 (Frühjahr 2010, Thema 3, Aufgabe 1)

Betrachtet werde das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -a & 1 & 2 \\ -2 & 2 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von a gibt es keine, bzw. genau eine, bzw. unendlich viele Lösungen? Geben Sie in den letzten beiden Fällen jeweils die Lösungsmenge an.

1.14 (Herbst 2007, Thema 3, Aufgabe 1)

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & t & 7 \\ 3 & t+2 & t+4 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mit dem reellen Parameter t . Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem

eindeutig lösbar, mehrdeutig lösbar, bzw. nicht lösbar

ist und leiten Sie im Falle der mehrdeutigen Lösbarkeit eine Parameterdarstellung der Lösungsmenge her.

1.15 (Herbst 2003, Thema 1, Aufgabe 1)

Gegeben seien die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ und der Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 8 \\ -1 & 3 & \alpha - 3 & -12 \\ 2 & \alpha & 6 & \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$A \cdot x = b, \quad x \in \mathbb{R}^4.$$

- Geben Sie für $\alpha = -3$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems an.
- Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem lösbar? Bestimmen Sie für diese α die Dimension des Lösungsraums.

1.16 (Herbst 2006, Thema 2, Aufgabe 1)

In Abhängigkeit von zwei Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ werde das lineare Gleichungssystem

$$A \cdot x = b, \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{R}^4,$$

betrachtet mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \alpha \\ 2 & 6 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 + \beta \end{pmatrix}.$$

- Untersuchen Sie wann dieses Gleichungssystem lösbar ist und bestimmen Sie in diesem Fall die Dimension d des Lösungsraumes.
- Ermitteln Sie in den beiden Fällen $\alpha = \beta = 0$ und $\alpha = \beta = 1$ jeweils explizit alle reellen Lösungen dieses linearen Gleichungssystems.

1.17 (Herbst 2011, Thema 3, Aufgabe 4)

- a) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & 2 & t \\ 1 & t & 3 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

- b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.18 (Herbst 2011, Thema 2, Aufgabe 4)

Gegeben sind die Gleichungen der drei Ebenen

$$\begin{aligned} E_1 &: x - \frac{1}{4}y - 2z + 1 = 0 \\ E_2 &: 2x - \frac{5}{2}y - 5z - \lambda = 0 \\ E_3 &: 4x + \lambda y - 6z - \mu = 0 \end{aligned}$$

mit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Für welche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gibt es keinen gemeinsamen Punkt der drei Ebenen? Für welche λ, μ schneiden sich die drei Ebenen in einer Schnittgeraden? Geben Sie diese Schnittgerade an.

1.19 (Herbst 2007, Thema 1, Aufgabe 3)

In Abhängigkeit von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ sei $L \subset \mathbb{R}^4$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + (2-b)x_2 - 2x_3 &= 1-b \\ x_2 - 2x_3 + x_4 &= a-1 \\ 2x_1 - 2bx_2 + x_3 - x_4 &= 3-a-2b \end{aligned}$$

- a) Zeigen Sie: L ist die Gerade

$$\{(1, 1, 1, a)^t + \lambda \cdot (b, 1, 1, 1)^t : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- b) Nun sei $H \subset \mathbb{R}^4$ die Hyperebene mit der Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Für welche Wahl der Parameter a und b ist

- (i) $L \subset H$; (ii) $L \cap H$ ein Punkt; (iii) $L \cap H$ leer?

1.20 (Frühjahr 2003, Thema 1, Aufgabe 2)

- a) Zeigen Sie, dass die Menge ℓ aller $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, für die das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcccccl} X_1 & + & X_2 & - & 2X_3 & = & s^2 \\ 2X_1 & + & X_2 & - & 3X_3 & = & st \\ 3X_1 & - & 3X_2 & & & = & t^2 \end{array}$$

lösbar ist, eine Gerade ist!

- b) Bestimmen Sie für $(s, t) \in \ell$ die allgemeine Lösung des obigen Gleichungssystems!

1.21 (Herbst 2003, Thema 2, Aufgaben 1 und 2)

Gegeben sei das von den Parametern $r, s, t \in \mathbb{R}$ abhängige lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcccccl} x_1 & + & 2x_2 & & + & 2x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & rx_3 & & = & 1 \\ sx_1 & & & + & x_3 & + & tx_4 & = & 1 \end{array}$$

- a) Für welche Wahl der Parameter ist die Lösungsmenge des Systems eindimensional, also eine affine Gerade? (Die Antwort ist zu begründen.)
- b) Es sei C die Menge der Parametertripel (r, s, t) , für welche die Lösungsmenge des Systems keine affine Gerade ist. Als Teilmenge des euklidischen $\mathbb{R}^3$ mit den Koordinaten r, s, t ist C ein Kegelschnitt, der in einer Koordinatenebene liegt. Was ist der affine Typ des Kegelschnitts und in welcher Koordinatenebene liegt er?
- c) Bestimmen Sie die Parameter r, s, t im Gleichungssystem so, dass die Lösungsmenge zweidimensional, also eine affine Ebene ist. Lösen Sie das System für diese Wahl der Parameter.