



Klausurenkurs zum Staatsexamen (SS 2012): Differential- und Integralrechnung 2

2.1 (*Frühjahr 2004, Thema 2, Aufgabe 2*)

a) Bestimmen Sie für die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x+3}{(x-3)^k}, \quad x \neq 3,$$

alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe konvergiert, und berechnen Sie den Wert der Reihe.

b) Beweisen Sie oder widerlegen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k} \right)$.

2.2 (*Frühjahr 2002, Thema 2, Aufgabe 1*)

Untersuchen Sie die folgende Reihen auf Konvergenz:

a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$$

b)
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}$$

2.3 (*Frühjahr 2001, Thema 1, Aufgabe 1*)

Untersuchen Sie die Reihen

$$\sum_{k \geq 1} \frac{2^k}{k^{10}} \quad \text{und} \quad \sum_{k \geq 1} \frac{3k^2+1}{k^4+1}$$

auf Konvergenz.

2.4 (*Frühjahr 2004, Thema 1, Aufgabe 1*)

a) Man beweise oder widerlege für jede der beiden Reihen die Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + 4^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2^n + 3^n}.$$

b) Man zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

konvergiert mit dem Grenzwert $\frac{3}{4}$.

2.5 (Herbst 2006, Thema 2, Aufgabe 1)

Man beweise oder widerlege die Konvergenz der beiden folgenden Reihen.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{2^{n^3}} \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n^2 + n}}$$

2.6 (Herbst 2011, Thema 2, Aufgabe 1)

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^4} \right).$$

2.7 (Herbst 2011, Thema 3, Aufgabe 1)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \frac{\ln n}{n}$. Zeigen Sie:

- a) Für alle $n \geq 3$ gilt $a_n > a_{n+1}$.
- b) Mit $n_k := 2^k$ ist $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.
- c) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist konvergent.
- d) Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ auch absolut? Begründen Sie Ihre Antwort.

2.8 (Herbst 2009, Thema 3, Teilaufgabe 1b)

Bestimmen Sie (mit Begründung) alle reellen Zahlen $x > 0$, für die die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n}.$$

2.9 (Herbst 2007, Thema 1, Aufgabe 2)

Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x , für die die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} x^n$$

konvergiert.

2.10 (Herbst 2010, Thema 1, Aufgabe 1)

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{1 + x^{2n}}$$

konvergiert.

2.11 (Herbst 2010, Thema 2, Aufgabe 2)

- a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n^2 - n)}$$

konvergiert. Konvergiert sie absolut?

- b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - n + n^2 - n^3 + n^4 - n^5}{n^7}$$

konvergiert. Konvergiert sie absolut?

- c) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(kx)^k}{k!}$$

für alle $|x| < \frac{1}{e}$ konvergiert. Konvergiert sie absolut?

2.12 (Herbst 2007, Thema 1, Aufgabe 2)

- a) Man beweise oder widerlege die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{\left(\frac{1+n}{n} \right)^n}{3} \right)^n.$$

- b) Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n.$$

2.13 (Herbst 2010, Thema 3, Aufgabe 1)

Für welche positiven Zahlen $a, b > 0$ mit $b \neq 1$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1 - b^n}?$$

2.14 (Herbst 2008, Thema 1, Aufgabe 1)

- a) Man beweise oder widerlege die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(2 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

- b) Man bestimme alle reellen Zahlen x , für die die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n x^{2n}}{1 + n^2}$$

konvergent ist.

2.15 (Herbst 2008, Thema 3, Aufgabe 1)

Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x , für welche folgende Reihen konvergieren:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} (x^2 - 1)^n \qquad \text{b) } \sum_{n \geq 1} n x^{(n^2)}$$

2.16 (Frühjahr 2006, Thema 1, Aufgabe 2)

Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Reihen konvergent bzw. absolut konvergent sind:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot \sqrt{n - \frac{1}{2}}} \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{(n^2)}}{(n+1)^{(n^2)}} x^n$$

2.17 (Herbst 2004, Thema 1, Aufgabe 1)

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die gegebenen Reihen konvergent sind:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n \qquad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^{n^2}$$

2.18 (Frühjahr 2011, Thema 2, Aufgabe 1)

a) Man zeige

$$1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \geq \frac{1}{2n}$$

für $n \geq 2$ und bestimme damit, ob die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right)$$

konvergiert.

b) Man bestimme, ob die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right)$$

konvergiert.

2.19 (Frühjahr 2008, Thema 3, Aufgabe 2)

a) Man zeige: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}.$

b) Man untersuche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right)$ auf Konvergenz.

2.20 (Herbst 2008, Thema 2, Aufgabe 1)

Gegeben sei eine reelle Zahl $a > 0$.

- a) Zeigen Sie: $\lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a$.
 b) Untersuchen Sie für $a \geq 1$ die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)$$

auf Konvergenz.

2.21 (Frühjahr 2007, Thema 2, Aufgabe 3)

- a) Beweisen Sie für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$

$$\sum_{n=3}^k \frac{1}{n(\ln n)^2} \leq \int_2^k \frac{1}{x(\ln x)^2} \leq \sum_{n=2}^{k-1} \frac{1}{n(\ln n)^2}.$$

- b) Beweisen Sie die Ungleichung

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} \leq \frac{1}{\ln 2}.$$

2.22 (Frühjahr 2001, Thema 3, Aufgabe 1)

- a) Man beweise $\sum_{n=1}^N \frac{1}{1+n^4} \leq \int_0^N \frac{dx}{1+x^4}$ für alle $N \in \mathbb{N}$, ohne das Integral zu berechnen.
 b) Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n = 3$.

Man zeige, dass die hiermit gebildete Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ist.

2.23 (Herbst 2006, Thema 2, Aufgabe 1)

- a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n := \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n dx.$$

Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl n gilt:

$$(i) \quad a_{n+1} \leq a_n; \quad (ii) \quad a_{n+2} + a_n = \frac{1}{n+1}.$$

- b) Konvergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus a)?
 Begründen Sie Ihre Antwort und ermitteln Sie gegebenenfalls den Grenzwert der Folge.
 c) Bestimmen Sie (mit Begründung) alle $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, für die die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tan x)^n}{n}.$$

2.24 (Herbst 2005, Thema 1, Aufgabe 1)

- a) Die Folge $(x_n)_{n \geq n_0}$ sei rekursiv durch $x_0 = 1$ und $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n^3}$ für $n \geq 0$ definiert. Man beweise die Konvergenz der Folge und zeige:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

- b) Für eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ positiver Zahlen zeige man:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a_n} \text{ divergent}.$$

- c) Man beweise oder widerlege die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}.$$

2.25 (Herbst 2005, Thema 2, Aufgabe 3)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) \geq 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k \geq 1} (-1)^k f\left(\frac{1}{k}\right)$$

konvergiert.

2.26 (Frühjahr 2006, Thema 3, Aufgabe 3)

Beweisen Sie:

- a) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 0$ ist $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 0$.

- b) $\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1 + (-1)^k \frac{1}{k}\right) = 0$.

2.27 (Frühjahr 2002, Thema 2, Aufgabe 2)

Bekanntlich gilt:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

Bestimmen Sie ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \right| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$$

gilt.

2.28 (Frühjahr 2011, Thema 1, Aufgabe 1)

- a) Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass sich eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ finden lässt, so dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ absolut konvergiert.
- b) Es sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, so dass es ein $d > 0$ mit $b_{n+1} < b_n - d$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} e^{b_n}$ konvergiert.

2.29 (Frühjahr 2003, Thema 1, Aufgabe 3)

Man beweise oder widerlege die folgenden Aussagen über reelle Reihen:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ ist für alle $x \in [-1, 1]$ konvergent.
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{2}}$ ist konvergent.
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ist konvergent.
- d) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent und } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergent} \right) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ konvergent.}$

2.30 (Frühjahr 2009, Thema 2, Aufgabe 2)

Man beweise jede der folgenden Aussagen, sofern sie allgemeingültig ist, oder widerlege sie durch ein Gegenbeispiel:

- a) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, so ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent.
- b) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, so ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut konvergent.

2.31 (Frühjahr 2010, Thema 2, Aufgabe 2)

Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie: Wenn die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1 + a_k}$$

konvergiert, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.