MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Klausur
27.10.2020

Klausur zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

1. a) Man zeige, daß die Funktion

$$f : \left]-\pi, \pi\right[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sin x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 1, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

stetig differenzierbar ist, und bestimme ihre Ableitung f'. (3)

b) Gegeben sei die Funktion

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}.$$

Man bestimme die Grenzwerte von $g(x)$ für $x \to 0\pm$ und für $x \to \pm\infty$; ferner untersuche man g auf Nullstellen sowie Monotonieintervalle und globale Extremstellen. (3)

2. a) Man formuliere (mit allen Voraussetzungen) den Mittelwertsatz der Differentialrechnung und interpretiere seine Aussage geometrisch. (2)

b) Man zeige für alle a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ die Ungleichung

$$\left| e^{\sin b} - e^{\sin a} \right| \leq e \cdot (b - a)\,. \tag{2}$$

c) Gegeben sei die Funktion

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2} \cdot \ln(1 + x^2).$$

Man bestimme die Nullstellen von f und folgere daraus, daß die Ableitung f' von f mindestens eine positive und mindestens eine negative Nullstelle besitzt. (2)

3. Für einen Parameter $a > 0$ werden die beiden Funktionen

$$F_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_a(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right),$$

und

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_a(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}},$$

betrachtet.

a) Man zeige, daß F_a eine Stammfunktion von f_a ist. (2)

b) Man berechne das Integral $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}a} f_a(x)\,dx$ und zeige, daß sein Wert unabhängig von a ist. (2)

c) Man zeige, daß F_a eine differenzierbare Umkehrfunktion F_a^{-1} besitzt, und bestimme $(F_a^{-1})'(\ln a)$. (2)

4. a) Für den Punkt $a \in \mathbb{R}$ und die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ betrachte man die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - a)^n$$

mit Konvergenzradius $\varrho \in \mathbb{R}^+$. Man formuliere den Hauptsatz über Potenzreihen zu den Eigenschaften der Funktion

$$f :]a - \varrho,\ a + \varrho[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - a)^n . \qquad (3)$$

b) Man bestimme das Konvergenzintervall $D \subseteq \mathbb{R}$ der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - n}{1 + 2\,n} \cdot (x - 1)^n$$

und zeige, daß die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - n}{1 + 2\,n} \cdot (x - 1)^n,$$

an der Stelle $a = 1$ ein isoliertes lokales Maximum besitzt. (3)