MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2020
Blatt 13
06.08.2020

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

49. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2006).* Gegeben sei die Kurve

$$f : [0, \infty[\to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (x(t),\ y(t)) = \left(\tfrac{t^6}{6},\ 2 - \tfrac{t^4}{4}\right).$$

Man berechne die Bogenlänge von f zwischen den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen.

50. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2006.)*

a) Man beweise, daß die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right),$$

eine Stammfunktion der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, ist.

b) Man bestimme die Länge der Kurve $\gamma : [0, 6\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = t \cdot (\cos t, \sin t)$.

c) Man skizziere die Bildmenge $\gamma\left([0, 6\pi]\right)$.

51. Gegeben sei die Kurve

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = \left(t^2 - 1,\ t\left(t^2 - 1\right)\right).$$

a) Man bestimme alle Kurvenpunkte, in denen die Tangente zu einer der beiden Koordinatenachsen parallel ist.

b) Man zeige, daß die Kurve f genau einen Doppelpunkt besitzt, und bestimme die Tangentialvektoren in diesem Doppelpunkt.

c) Man skizziere die Bildmenge K der Kurve f.

d) Man bestimme den Inhalt derjenigen Fläche, die von der in K enthaltenen geschlossenen Teilkurve umrandet wird.

52. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 1999).* Es sei die Kurve $K : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $K(t) = (x(t),\ y(t))$, gegeben durch

$$x(t) = t - \sin t \qquad \text{und} \qquad y(t) = 1 - \cos t$$

a) Man berechne die Bogenlänge der Kurve. (Hinweis: $1 - \cos t = 2\left(\sin \frac{t}{2}\right)^2$.)

b) Man berechne den Inhalt der Fläche, die von der Kurve und der x–Achse eingeschlossen wird.